И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

1999 МАТЕМАТИКА № 8 (447)

УДК 517.958:57

Н.В. ПЕРЦЕВ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НУЛЕВОГО РЕШЕНИЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ В МОДЕЛЯХ ДИНАМИКИ ПОПУЛЯЦИЙ

1. Постановка задачи

Для описания динамики популяций в задачах биологии, экологии, демографии и т.д. широко применяются дифференциальные уравнения, которые во многих случаях имеют вид

$$\dot{x}(t) = f(x_t) - \lambda(x_t)x(t), \quad t \geq 0,$$

где $x(t)$ означает численность популяции в момент времени t, функции $f(x_t)$ и $\lambda(x_t)x(t)$ описывают скорости рождения, иммиграции, гибели и эмиграции индивидуумов. Эти функции могут зависеть как от текущего, так и от предшествующих состояний $x(s)$, $s \leq t$. Примем, что $x(t) \in R^m$, символ x_t означает набор $(x(t), x(t-\omega_1), \dots, x(t-\omega_n))$, где $0 \leq \omega_k \leq r$, $1 \leq k \leq n$, $0 < r < \infty$, $f(x_t) = \mathrm{col}(f_1(x_t), \dots, f_m(x_t))$ является вектор-функцией, а $\lambda(x_t) = \mathrm{diag}(\lambda_1(x_t), \dots, \lambda_m(x_t))$ — диагональной матрицей. Конкретный вид $f(x_t)$, $\lambda(x_t)$ определяется процессами, описывающими взаимодействие индивидуумов как между собой, так и с окружающей средой. Если при моделировании динамики популяций учитывать ограниченность времени жизни индивидуумов, то уравнения модели можно модифицировать следующим образом:

$$\dot{x}(t) = f(x_t) - \lambda(x_t)x(t) - (\rho x)(t), \quad t \geq 0, \tag{1}$$

где оператор $(\rho x)(t)$ задает скорость уменьшения численности индивидуумов за счет процессов старения. В соответствии с [1]–[3] компоненты $(\rho x)_i(t)$ оператора $(\rho x)(t)$ будем задавать формулами

$$(\rho x)_i(t) = \int_0^{\tau_i} e^{-\int_{t-a}^{t} \lambda_i(x_s)ds} f_i(x_{t-a})p_i(a)da, \quad t \geq \tau_i,$$

$$(\rho x)_i(t) = e^{-\int_0^t \lambda_i(x_s)ds} \int_0^{\tau_i - t} \varphi_i(a)p_i(a+t)da + \int_0^t e^{-\int_{t-a}^{t} \lambda_i(x_s)ds} f_i(x_{t-a})p_i(a)da, \quad 0 \leq t \leq \tau_i, \quad 1 \leq i \leq m,$$

где $0 < \tau_i < \infty$ — максимальная продолжительность времени жизни индивидуумов i-го вида, $R_i(s) = \int_s^{\tau_i} p_i(a)da$ — функция выживаемости индивидуумов i-го вида, $R_i(0) = 1$, $R_i(\tau_i) = 0$, функция $\varphi_i(s)$ описывает распределение по возрасту первоначально существующих индивидуумов i-го вида, $0 \leq s \leq \tau_i$, $1 \leq i \leq m$.

Систему уравнений (1) дополним начальным условием

$$x(t) = \psi(t), \quad -r \leq t \leq 0, \tag{2}$$

в котором функция $\psi_i(t)$ задает численность индивидуумов i-го вида на отрезке времени $[-r, 0]$, причем $\psi_i(0) = x_i(0)$ означает их начальную численность, $1 \le i \le m$. Из смысла функций $\varphi_k(s)$, $R_k(s)$ видно, что начальная численность индивидуумов k-го вида (с учетом их выживаемости) равна $x_k(0) = \int\limits_0^{\tau_k} R_k(s)\varphi_k(s)ds$. Поэтому будем требовать, чтобы выполнялись соотношения

$$\psi_i(0) = x_i(0) = \int_0^{\tau_i} R_i(s)\varphi_i(s)ds, \quad 1 \le i \le m.$$

В работах [3], [4] исследованы свойства решений системы (1) для некоторых ее частных случаев. Целью данной работы является получение достаточных условий устойчивости нулевого решения системы (1) рассматриваемого вида.

2. Основные предположения и результаты

Введем следующие обозначения: $f_i(x, u, \dots, w), \lambda_i^0(x, u, \dots, w) : R_+^m \times R_+^m \times \dots \times R_+^m \to R_+$, $1 \le i \le m$, R_+^m — множество векторов $u \in R^m$ с неотрицательными компонентами. Матрица $\lambda(x_t)$ имеет вид $\lambda(x_t) = \lambda_0 + \mathrm{diag}(\lambda_1^0(x_t), \dots, \lambda_m^0(x_t))$, $\lambda_0 = \mathrm{diag}(\lambda_{0,1}, \dots, \lambda_{0,m})$, $\lambda_{0,i} = \mathrm{const} \ge 0$, $1 \le i \le m$. Далее, $\varphi_i(s), p_i(s) : [0, \tau_i] \to R_+$, $1 \le i \le m$, $\psi(t) : [-r, 0] \to R_+^m$.

Считается, что все рассматриваемые функции предполагаются непрерывными в своих областях определения и что выполнено следующее предположение:

H) функции $f(x, u, \dots, w)$, $\lambda_i(x, u, \dots, w)$, $1 \le i \le m$, удовлетворяют условию Липшица на D^{n+1}, и при всех $(x(t), x(t-\omega_1), \dots, x(t-\omega_n)) \in D^{n+1}$ справедливо неравенство $f(x_t) \le \theta(x_t) = \gamma_0 x(t) + \sum\limits_{i=1}^{n} \gamma_i x(t-\omega_i)$ (покомпонентно), где $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n$ — матрицы с неотрицательными элементами, $D = \{u \in R^m : 0 \le u_i < d_i^0,\ 1 \le i \le m\}$ — некоторый параллелепипед, $D^{n+1} = D \times D \times \dots \times D$.

В дальнейшем неравенства между векторами $u \in R^m$ понимаются как неравенства между их компонентами, запись $u > 0$ означает, что все компоненты вектора u положительны. Под $|u|$ будем понимать норму вектора $u \in R^m$, которую зададим формулой $|u| = \max\limits_{1 \le i \le m} |u_i|$. Если $C = \mathrm{diag}(c_1, \dots, c_m)$ — диагональная матрица, то $\exp(C) = \mathrm{diag}(\exp c_1, \dots, \exp c_m)$, символ I соответствует единичной матрице. В системе уравнений (1) под $\dot{x}(t)$ будем понимать правостороннюю производную.

Решением системы дифференциальных уравнений (1) с начальным условием (2) будем называть непрерывную функцию $x(t)$, удовлетворяющую соотношению (2) и системе (1) на некотором полуинтервале $[0, \delta)$, $\delta > 0$. Нетрудно заметить, что в рамках сделанных предположений система (1) с нулевым начальным условием (2) имеет нулевое решение $x(t) \equiv 0$, $t \in [0, \infty)$. Для исследования свойств решений системы уравнений (1) с начальным условием (2) перейдем к эквивалентной системе интегральных уравнений

$$\begin{aligned} x(t) &= (Gx)(t), \qquad 0 \le t < \infty, \\ x(t) &= \psi(t), \qquad -r \le t \le 0, \end{aligned}$$

в которой оператор $(Gx)(t)$ имеет компоненты

$$(Gx)_i(t) = \int\limits_0^{\tau_i} R_i(a) e^{-\int\limits_{t-a}^{t} \lambda_i(x_s)ds} f_i(x_{t-a})da, \quad t \ge \tau_i,$$

$$(Gx)_i(t) = e^{-\int\limits_0^{t} \lambda_i(x_s)ds} \int\limits_0^{\tau_i - t} R_i(a+t)\varphi_i(a)da + \int\limits_0^{t} R_i(a) e^{-\int\limits_{t-a}^{t} \lambda_i(x_s)ds} f_i(x_{t-a})da, \quad 0 \le t \le \tau_i, \quad 1 \le i \le m.$$

Компоненты $G(x)(t)$ получены путем интегрирования i-го уравнения системы (1) с помощью вариации произвольной постоянной, $1 \le i \le m$. Предполагается, что функции $x(t)$, входящие в выражение для $(Gx)(t)$, определены и непрерывны при всех $-r \le t < \infty$. Доопределим функции $R_i(s)$, $\varphi_i(s)$ по правилу $R_i(s) = R_i(\tau_i) = 0$, $\varphi_i(s) = \varphi_i(\tau_i)$ при всех $s \ge \tau_i$, $1 \le i \le m$. Обозначим

$$\tau = \max(\tau_1, \dots, \tau_m), \quad h_1(t) = \max(0, \tau - t), \quad h_2(t) = \min(t, \tau), \quad t \ge 0,$$

$R(s) = \mathrm{diag}(R_1(s), \dots, R_m(s))$, $\varphi(s) = \mathrm{col}(\varphi_1(s), \dots, \varphi_m(s))$, $s \ge 0$. С учетом введенных обозначений запишем

$$(Gx)(t) = e^{-\int\limits_0^t \lambda(x_s)ds} \int_0^{h_1(t)} R(a+t)\varphi(a)da + \int_0^{h_2(t)} R(a) e^{-\int\limits_{t-a}^t \lambda(x_s)ds} f(x_{t-a})da.$$

Из приведенных выше свойств функций $f(x_t)$, $\lambda(x_t)$ следует, что для всех $x_t \in D^{n+1}$, $t \ge 0$, справедлива оценка $(Gx)(t) \le (Lx)(t)$, $t \ge 0$, где оператор $(Lx)(t)$ имеет вид

$$(Lx)(t) = e^{-\lambda_0 t} \int_0^{h_1(t)} R(a+t)\varphi(a)da + \int_0^{h_2(t)} R(a) e^{-\lambda_0 a} \theta(x_{t-a})da.$$

Зададим матрицы $A = \mathrm{diag}(a_1, \dots, a_m)$, $a_i = \int\limits_0^{\tau_i} R_i(a)\exp(-\lambda_{0,i}a)da$, $1 \le i \le m$, $B = \sum\limits_{k=0}^n \gamma_k$, $Q = I - AB$.

Теорема 1. *Пусть выполнено предположение* H) *и существует* $y^0 \in D$ *такой, что*

$$(Ly^0)(t) \le y^0, \quad 0 \le t \le \tau. \tag{3}$$

Тогда, если $0 \le \psi(t) \le y^0$, $-r \le t \le 0$, *то для единственного решения* $x(t)$ *системы уравнений* (1) *с начальным условием* (2) *справедлива оценка* $0 \le x(t) \le y^0$, $0 \le t < \infty$. *Если, кроме того, матрица* Q *является невырожденной, то существует* $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = 0$.

Доказательство. В неравенстве (3) положим $t = \tau$. Тогда $y^0 \ge (Ly^0)(\tau) = (Ly^0)(t)$ для $t \ge \tau$. Отсюда вытекает неравенство $(Ly^0)(t) \le y^0$ при всех $0 \le t < \infty$. Рассмотрим непрерывную функцию $x(t)$ такую, что $0 \le x(t) \le y^0$, $-r \le t < \infty$. Тогда для любого фиксированного $0 < T < \infty$ имеют место неравенства $0 \le (Gx)(t) \le (Lx)(t) \le (Ly^0)(t) \le y^0$, $0 \le t \le T$. Используя оценки на $(Gx)(t)$ из [3] и применяя принцип сжимающих отображений, получаем, что система уравнений (1) с начальным условием (2) имеет единственное непрерывное решение $x(t)$ такое, что $0 \le x(t) \le y^0$, $0 \le t < \infty$. Полагая $y^0(t) = y^0$, $-r \le t < \infty$, построим последовательность функций

$$\begin{aligned} y^n(t) &= (Ly^{n-1})(t), \qquad 0 \le t < \infty, \\ y^n(t) &= \psi(t), \qquad -r \le t \le 0, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Следуя [4], получим неравенства

$$0 \le x(t) \le \dots \le y^n(t) \le y^{n-1}(t) \le \dots \le y^0(t), \quad 0 \le t < \infty,$$
$$0 \le \liminf_{t \to +\infty} x(t) \le \limsup_{t \to +\infty} x(t) \le w^*,$$

где w^* является решением системы уравнений $Qw = 0$. Если матрица Q невырождена, то $w^* = 0$. Тогда существует $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = 0$, что завершает доказательство теоремы. □

Теорема 2. *Пусть выполнено предположение* H) *и* Q *является невырожденной* M*-матрицей. Тогда существуют* $\alpha \in R$, $c^0 \in D$, $c^1 \in D$, $\alpha > 0$, $c^0 > c^1 > 0$, *такие, что для любого решения* $x(t)$ *системы* (1) *с начальным условием* (2) *справедлива оценка: если* $0 \le \psi(t) \le c^1$, $-r \le t \le 0$, *то*

$$0 \le x(t) \le c^0 \exp(-\alpha t), \quad 0 \le t < \infty. \tag{4}$$

Доказательство. Зафиксируем некоторые $\alpha \in R$, $c^0 \in D$, $\alpha > 0$, $c^0 > 0$, и определим функцию $w(t) = c^0 \exp(-\alpha t)$, $0 \le t < \infty$. Обозначим $B_\alpha = \gamma_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} \gamma_k \exp(\alpha \omega_k)$, $A_\alpha = \operatorname{diag}(a_1(\alpha), \ldots, a_m(\alpha))$, где $a_i(\alpha) = \int\limits_0^{\tau_i} R_i(s) \exp((\alpha - \lambda_{0,i})s) ds$, $1 \le i \le m$, $Q_\alpha = I - A_\alpha B_\alpha$. С учетом этих обозначений

$$(Lw)(t) = e^{-\lambda_0 t} \int_0^{h_1(t)} R(s+t)\varphi(s)ds + e^{-\alpha t} \int_0^{h_2(t)} R(s) e^{(\alpha - \lambda_0)s} B_\alpha c^0 ds, 0 \le t < \infty.$$

Заметим, что если неравенства $0 \le (Lw)(t) \le w(t)$ верны при $0 \le t \le \tau$, то они верны также и для $\tau \le t < \infty$. Действительно, неравенство $(Lw)(\tau) \le w(\tau)$ равносильно неравенству $Q_\alpha c^0 \ge 0$. Поэтому при $t \ge \tau$ $0 \le (Lw)(t) = \exp(-\alpha t) A_\alpha B_\alpha c^0 \le c^0 \exp(-\alpha t) = w(t)$. Отсюда непосредственно следует, что если функция $w(t)$ удовлетворяет неравенству $(Lw)(t) \le w(t)$, $0 \le t \le \tau$, то, выбирая $0 \le \psi(t) \le c^0$, $-r \le t \le 0$, для решения $x(t)$ получим оценку (4). Очевидно, для всех $0 \le t \le \tau$ верно $(Lw)(t) \le x(0) + \exp(-\alpha t) A_\alpha B_\alpha c^0$. Рассмотрим неравенство $x(0) + \exp(-\alpha t) A_\alpha B_\alpha c^0 \le w(t)$, $0 \le t \le \tau$, которое приводится к виду

$$e^{-\alpha t} Q_\alpha c^0 \ge x(0), \quad 0 \le t \le \tau. \tag{5}$$

Матрица Q_α непрерывным образом зависит от α и $Q_\alpha \to Q_0 = Q$ при $\alpha \to 0$ (поэлементно). По условию Q — невырожденная M-матрица. Это эквивалентно, в частности, тому, что все ее главные миноры положительны. Тогда существует достаточно малое $\alpha_0 > 0$ такое, что все главные миноры матрицы Q_{α_0} также будут положительны, иначе Q_{α_0} — невырожденная M-матрица. Для матрицы Q_{α_0} найдется такой $y^0 \in R^m$, $y^0 > 0$, что $Q_{\alpha_0} y^0 > 0$ ([4], [5], ч. 6, с. 134). Полагая $c^0 = qy^0$, где $q > 0$ — некоторое число, зависящее от D, получим $c^0 \in D$, $c^0 > 0$ и $Q_{\alpha_0} c^0 > 0$. В соответствии с (5) начальную функцию $\psi(s)$ будем выбирать из условия $0 \le \psi(s) \le c^1 = \exp(-\alpha_0 \tau) Q_{\alpha_0} c^0$, $-r \le s \le 0$. Очевидно, при таком выборе $0 < c^1 < c^0$, $c^1 \in D$ и выполнено неравенство (5). $\square$

Перейдем далее к анализу устойчивости нулевого решения $x(t) \equiv 0$ системы уравнений (1). Следуя ([6], гл. 2, сс. 89, 94, 105), введем необходимые определения. Нулевое решение системы (1) называется устойчивым по Ляпунову, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, что неравенство $|x(t)| \le \varepsilon$ будет выполняться при всех $0 \le t < \infty$, если только $\|\psi(s)\| \le \delta(\varepsilon)$. Здесь $x(t)$ — решение системы (1) с начальным условием (2), определенное при всех $0 \le t < \infty$, $\|\psi(s)\|$ — норма вектор-функции $\psi(s)$ в пространстве $C[-r, 0]$ непрерывных функций, заданных на отрезке $[-r, 0]$. Нулевое решение системы (1) называется асимптотически устойчивым, если это решение устойчиво по Ляпунову и существует такое $\delta_0 > 0$, что $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = 0$ при $\|\psi(s)\| \le \delta_0$. Пусть существуют такие постоянные $\delta > 0$, $\alpha > 0$, $b > 0$, что всякое решение $x(t)$ системы (1) с начальным условием (2) удовлетворяет неравенству $|x(t)| \le b\|\psi(s)\| \exp(-\alpha t)$, $0 \le t < \infty$, при $\|\psi(s)\| \le \delta$. Тогда нулевое решение системы (1) называется экспоненциально устойчивым.

Теорема 3. *Пусть выполнено предположение* H) *и* Q *является невырожденной* M*-матрицей. Тогда нулевое решение системы уравнений* (1) *асимптотически устойчиво и, более того, экспоненциально устойчиво.*

Доказательство. Предположим, что существует вектор $y^0 \in D$, $y^0 > 0$, такой, что $Qy^0 \geq x(0)$. Тогда $(Ly^0)(t) \leq x(0) + ABy^0 \leq y^0$, $0 \leq t \leq \tau$, откуда следует неравенство (3). Поэтому в условиях теоремы 1 будем искать такой вектор y^0, что

$$y^0 \in D, \quad y^0 > 0, \quad 0 \leq x(0) \leq Qy^0, \quad 0 \leq \psi(t) \leq y^0, \quad -r \leq t \leq 0. \tag{6}$$

По условию Q — невырожденная M-матрица. Следовательно, существует $c \in R^m$, $c > 0$, для которого $Qc > 0$. Поэтому найдется такое число $q > 0$, что $y^0 = qc \in D$, $y^0 > 0$, $Qy^0 > 0$, и можно указать такую начальную функцию $\psi(s)$, что $0 \leq \psi(s) \leq Qy^0 \leq y^0$, $-r \leq s \leq 0$. Отсюда вытекает, что неравенства (6) будут выполнены. Применяя далее теорему 1 и переходя от неравенств для $x(t)$, $\psi(s)$ к неравенствам относительно $|x(t)|$, $\|\psi(s)\|$, установим, что нулевое решение системы уравнений (1) является асимптотически устойчивым.

Докажем теперь экспоненциальную устойчивость нулевого решения. Повторяя схему доказательства теоремы 2 и используя соответствующие неравенства для функции $w(t) = c^0 \exp(-\alpha t)$, перейдем к нахождению вектора $c^0 > 0$ и параметра $\alpha > 0$, удовлетворяющих неравенству (5). Выберем $\alpha = \alpha_0 > 0$ таким, что Q_{α_0} будет невырожденной M-матрицей. Неравенство (5) перепишем в виде

$$Q_{\alpha_0} c^0 \geq \exp(\alpha_0 t) x(0), \quad 0 \leq t \leq \tau. \tag{7}$$

Пусть $x^* = b_0 \|\psi(s)\| e^*$, где $e^* \in R^m$ — вектор, все координаты которого равны единице, $b_0 \in R$, $b_0 \geq 1$ ($\|\psi(s)\| > 0$). Так как матрица $Q_{\alpha_0}^{-1}$ существует и имеет неотрицательные элементы, в силу (7) из равенства $Q_{\alpha_0} c^0 = \exp(\alpha_0 \tau) x^*$ получаем $c^0 = b_0 \|\psi(s)\| \exp(\alpha_0 \tau) Q_{\alpha_0}^{-1} e^*$, причем $c^0 > 0$. Очевидно, параметр $b_0 \geq 1$ можно выбрать таким, что $0 \leq \psi(s) \leq c^0$, $-r \leq s \leq 0$. Кроме того, можно указать такое $\delta_0 \in R$, $\delta_0 > 0$, что из неравенства $\|\psi(s)\| \leq \delta_0$ будет следовать $c^0 \in D$. Отсюда решение $x(t)$ системы уравнений (1) с начальным условием (2), в котором $\|\psi(s)\| \leq \delta_0$, удовлетворяет оценке $0 \leq x(t) \leq c^0 \exp(-\alpha_0 t)$, $0 \leq t < \infty$. Переходя здесь к неравенству для $|x(t)|$, убеждаемся в справедливости последнего утверждения теоремы. □

Замечание. Используя результаты работы [4], легко заметить, что матрица Q будет являться невырожденной M-матрицей, если элементы матрицы B либо параметры a_i, $1 \leq i \leq m$, достаточно малы. Элементы матрицы B задают верхние оценки для интенсивностей процессов рождения индивидуумов рассматриваемых популяций. Параметры a_i можно интерпретировать как средние времена жизни индивидуумов i-го вида, поскольку функции $R_i(a) \exp(-\lambda_{0,i} a)$, $0 \leq a \leq \tau_i$, описывают распределение времени жизни индивидуумов с учетом уменьшения их численности за счет процессов миграции и гибели с интенсивностями $\lambda_{0,i}$, $1 \leq i \leq m$.

3. Примеры

3.1. Рассмотрим одномерную модель, в которой скорость рождения индивидуумов пропорциональна квадрату численности популяции, а интенсивность гибели индивидуумов постоянна,

$$\dot{x}(t) = \gamma x^2(t) - \lambda_0 x(t) - (\rho x)(t), \quad t \geq 0, \tag{8}$$

где $\gamma > 0$, $\lambda_0 \geq 0$ — заданные параметры. Пусть $x(0) \geq 0$ — начальная численность популяции. Если в модели (8) не учитывать ограниченность времени жизни индивидуумов, полагая $(\rho x)(t) \equiv 0$, то решение (8) задается формулой $x(t) = \lambda_0 x(0)/(\gamma x(0) + (\lambda_0 - \gamma x(0)) \exp(\lambda_0 t))$. Нулевое решение этого уравнения при $\lambda_0 > 0$ является асимптотически устойчивым. Если $\lambda_0 > \gamma x(0)$, то $x(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. Если же $\lambda_0 < \gamma x(0)$, то $x(t)$ неограниченно возрастает за конечное время T, иначе $x(t) \to +\infty$ при $t \to T$, где T находится из уравнения $\gamma x(0) + (\lambda_0 - \gamma x(0)) \exp(\lambda_0 T) = 0$. Учтем теперь ограниченность времени жизни индивидуумов и получим условие, при котором $x(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. Зафиксируем $d > 0$ и положим $D = [0, d)$.

Тогда $A = \int_0^\tau R(a)\exp(-\lambda_0 a)da$, $B = \gamma d$, $Q = 1 - AB$. Следуя (6), искомое число y^0 будем находить из неравенств $0 \le y^0 < d$, $x(0) \le Qy^0$. Отметим, что при достаточно малых $A > 0$ верно $1 - A\gamma d > 0$. Очевидно, $y^0 = x(0)/(1 - A\gamma d)$ удовлетворяет указанным неравенствам, если только $\gamma x(0) < k = 0.25/A$. Данное неравенство устанавливает связь между параметрами модели и начальными значениями, для которых решение уравнения (8) $x(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. Видно, что при $\lambda_0 < \gamma x(0) < k$ свойства решений двух моделей (с учетом и без учета ограниченности времени жизни индивидуумов) существенно различаются. Если среднее время жизни индивидуумов достаточно мало, то численность популяции убывает до нуля, несмотря на квадратичный темп размножения.

3.2. Рассмотрим модель динамики m конкурирующих популяций, в которой численность индивидуумов i-го вида описывается системой дифференциальных уравнений типа Лотки-Вольтерра

$$\dot{x_i}(t) = \gamma_i x_i(t) - \lambda_i(x(t))x_i(t) - (\rho x)_i(t), \quad 1 \le i \le m, \quad t \ge 0, \tag{9}$$

с начальным условием $x_i(0) = x_i^0 \ge 0$, $1 \le i \le m$. Коэффициенты $\gamma_i > 0$ означают темпы прироста численности $x_i(t)$ в условиях отсутствия конкуренции и самолимитирования, $1 \le i \le m$. Неотрицательные функции $\lambda_i(x(t))$, $1 \le i \le m$, задают интенсивности гибели индивидуумов вследствие самолимитирования и конкуренции. Предполагается, что $\lambda_i(x)$ определены и непрерывны при всех $x \in R_+^m$, удовлетворяют на R_+^m условию Липшица и, кроме того, $\lambda_i(0) = 0$, $1 \le i \le m$. Для системы уравнений (9) предположение H) выполняется на множестве $D = R_+^m$, матрица Q имеет простую структуру, $Q = I - \mathrm{diag}(q_1, \dots, q_m)$, где $q_i = \gamma_i \int_0^{\tau_i} R_i(s)ds$, $1 \le i \le m$. Пусть для всех $1 \le i \le m$ верны неравенства $q_i < 1$. Тогда любое решение $x(t)$ системы уравнений (9) таково, что $x(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. Используя схему доказательства теорем 2 и 3, можно легко получить коэффициенты в экспоненциальной оценке (4). Главные миноры матрицы Q_α положительны в том случае, когда для всех $1 \le i \le m$ верно $q_i(\alpha) = \gamma_i \int_0^{\tau_i} R_i(s)\exp(\alpha s)ds < 1$. Поскольку $q_i(\alpha)$ является возрастающей функцией α и $q_i(0) < 1$, то существует единственный корень $\alpha_i^* > 0$ уравнения $q_i(\alpha) = 1$, $\alpha \ge 0$, $1 \le i \le m$. Обозначим через α^* наименьший из этих корней и выберем $\alpha_0 = \alpha^* - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число. Следуя (7), вектор c^0 найдем из уравнения $Q_{\alpha_0}c^0 = \exp(\alpha_0\tau)x(0)$, откуда $c_i^0 = \exp(\alpha_0\tau)x_i(0)/(1 - q_i(\alpha_0))$, $1 \le i \le m$. Построенная экспоненциальная оценка может быть уточнена, если в уравнениях (9) сделать некоторую замену переменных и использовать далее результаты работы [1]. Кроме того, можно показать, что если $q_k \le 1$ для некоторого $1 \le k \le m$, то $x_k(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. Отметим, что при выполнении неравенства $q_i \le 1$ численность популяции $x_i(t)$, $1 \le i \le m$, с ростом t убывает до нуля независимо от начальной численности и от начального распределения индивидуумов по возрасту.

Литература

1. Cooke K.L., Yorke James A. *Some equations modelling growth processes and gonorhea epidemics* // Math. Biosci. – 1973. – V. 16. – № 1–2. – P. 75–101.
2. Перцев Н.В. *Применение одного дифференциального уравнения с последействием в моделях динамики популяций* / Под ред. А.К. Гуц // Фундамент. и прикл. матем. – Омск, 1994. – С. 119–129.
3. Перцев Н.В. *Исследование решений одной системы интегродифференциальных уравнений, возникающей в моделях динамики популяций* // Вестн. Омск. ун-та. – 1996. – № 1. – С. 24–26.
4. Перцев Н.В. *Об асимптотическом поведении решений одной системы линейных дифференциальных уравнений с последействием* // Изв. вузов. Математика. – 1996. – № 9. – С. 48–52.

5. Berman A., Plemmons R.J. *Nonnegative matrices in the mathematical sciences.* – N. Y.: Academ. Press, 1979. – 316 p.
6. Колмановский В.Б., Носов В.Р. *Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием.* – М.: Наука, 1981. – 448 с.

Омский государственный
педагогический университет

Поступила
20.03.1997