ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 5 (432)

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.518

А.И. СЮСЮКАЛОВ

О ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИЙ КЛАССА $C(\varepsilon)$ СРЕДНИМИ ПОДПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ СУММ ФУРЬЕ

Пусть $C_{2\pi}$ — пространство непрерывных 2π-периодических функций с нормой

$$\|f\| = \max_x |f(x)|;$$

$S_n(f)$ — сумма Фурье f порядка n; $E_n(f)$ — наилучшее приближение функции f тригонометрическими полиномами степени не выше n;

$$C(\varepsilon) = \{f \mid f \in C_{2\pi},\ E_n(f) \le \varepsilon_n,\ n = 0, 1, 2, \dots\},$$

где $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}$ — последовательность чисел, $\varepsilon_n \downarrow 0$ при $n \uparrow \infty$. В дальнейшем соотношение $\alpha \asymp \beta$ означает, что существуют постоянные $C_1 > 0$, $C_2 > 0$, для которых выполняется неравенство

$$C_1\beta \le \alpha \le C_2\beta.$$

С.Б. Стечкин [1] доказал, что для сумм Фейера

$$\sigma_n(f, x) = \frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n} S_\nu(f, x)$$

на произвольном классе $C(\varepsilon)$ выполнены соотношения

$$\sup_{f \in C(\varepsilon)} \|f - \sigma_n(f)\| \asymp \frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n} \varepsilon_\nu.$$

Аналогичный результат для сумм Фурье получил К.И. Осколков [2]. М.Ф. Тиман [3] установил оценки в терминах наилучших приближений для общих матричных методов суммирования.

Задачи о восстановлении функций по подпоследовательностям их частных сумм Фурье с помощью линейных методов суммирования изучались в [4]–[8] и др. В [8], [9] получены оценки скорости сходимости $(C, 1)$-средних сумм Фурье $S_{k^2}(f)$ $(k = 0, 1, 2, \dots)$. В [9] установлено, что

$$\sup_{f \in \mathrm{Lip}\,\alpha} \Big\| f - \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} S_{k^2}(f) \Big\| = \begin{cases} O(N^{-2\alpha}), & 0 < \alpha \le 1/6; \\ O(N^{-2\alpha}\ln N), & 1/6 < \alpha < 1/2; \\ O(N^{-1}\ln^2 N), & \alpha = 1/2; \\ O(N^{-1}), & 1/2 < \alpha \le 1. \end{cases} \tag{1}$$

Рассмотрим средние

$$\tau_n(f) = (N+1)^{-1}\sum_{k=0}^{N} S_{n_k}(f), \tag{2}$$

где $n_k = k^\gamma$ $(\gamma = 2, 3, \dots)$, $n = N^\gamma$; $n_k = [2^{k^\varepsilon}]$, $[x]$ — целая часть числа x, $\varepsilon \in (0, 1/2]$, $n = [2^{N^\varepsilon}]$.

Теорема. *Для средних* (2) ($k = 0,1,2,\dots$) *при любой последовательности* $\varepsilon = \{\varepsilon_n \mid \varepsilon_n \downarrow 0,\ n = 0,1,2,\dots\}$ *справедливо соотношение*

$$\sup_{f\in C(\varepsilon)} \|f-\tau_n(f)\| \asymp (N+1)^{-1}\sum_{k=0}^{N}\varepsilon_{n_k}. \tag{3}$$

Для доказательства оценки снизу в соотношении (3), следуя [1], используем функцию

$$f(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}(\varepsilon_{\nu-1}-\varepsilon_\nu)\cos\nu x$$

из класса $C(\varepsilon)$. При доказательстве оценки сверху в (3) применяются неравенства для норм в метрике L_1 четных тригонометрических полиномов из [6], [7].

Следствие. При $n_k = k^2$ из (3) следует

$$\sup_{f\in \mathrm{Lip}\,\alpha} \|f-\tau_n(f)\| \asymp \begin{cases} N^{-2\alpha}, & 0<\alpha<1/2;\\ N^{-1}\ln N, & \alpha = 1/2;\\ N^{-1}, & 1/2<\alpha\le 1.\end{cases} \tag{4}$$

Из сравнения оценок (1), (4) видно, что при $1/6 < \alpha \le 1/2$ оценка (4) является более точной. Оценка (4) уточняет также соответствующий результат в [8].

Автором получены аналогичные результаты для средних Абеля–Пуассона.

Литература

1. Стечкин С.Б. *О приближении периодических функций суммами Фейера* // Тр. Матем. ин-та АН СССР. – 1961. – Т. 62. – С. 48–60.
2. Осколков К.И. *К неравенству Лебега в равномерной метрике и на множестве полной меры* // Матем. заметки. – 1975. – Т. 18. – № 4. – с. 515-526.
3. Тиман М.Ф. *О приближении непрерывных периодических функций линейными операторами, построенными на базе их рядов Фурье* // ДАН СССР. – 1968. – Т. 181. – № 6. – С. 1339–1342.
4. Zalcwasser Z. *Sur la sommabilite des series de Fourier* // Studia math. – 1936. – V. 6. – S. 82–88.
5. Izumi S., Kavata T. *Notes on Fourier series* // Tôhoku Math. J. – 1936 . – V. 46. – № 1. – P. 154–158.
6. Бугров Я.С. *Условия равномерной ограниченности тригонометрических полиномов в метрике L* // Тр. Матем. ин-та АН СССР. – 1975. – Т. 134. – С. 31–37.
7. Bugrov Ya.S. *On linear summation methods of Fourier series* // Anal. math. – 1979. – V. 5. – № 2. – P. 119–133.
8. Бугров Я.С. *Линейные средние рядов и интегралов Фурье и скорость их сходимости* // Тр. Матем. ин-та АН СССР. – 1984. – Т. 170. – С. 77–85.
9. Баскаков А.В. *Приближение функций линейными методами.*: Автореф. дис. … канд. физ.-матем. наук. – М., 1987. – 14 с.

Рязанская государственная
радиотехническая академия

Поступила
30.06.1997