ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 12 (523)

УДК 517.972

*Т.Ю. КАШИРЦЕВА, А.Г. ЧЕНЦОВ*

# ОБ ОДНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ПУЧКА ДОПУСТИМЫХ ТРАЕКТОРИЙ В ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ С ИМПУЛЬСНЫМ ОГРАНИЧЕНИЕМ

Статья посвящена исследованию одного класса линейных импульсно-управляемых систем с разрывностью в коэффициентах при управлении. В составе ограничений на управление выделяется импульсная и моментная компоненты. Последняя определяет условие на интегрант управления. Рассматривается ослабление данного ограничения и устанавливается при некоторых условиях ступенчатости функций, порождающих интегрант, свойства устойчивости пучка траекторий.

## 1. Введение

Известно, что в условиях импульсных ограничений на выбор управления в системе может возникать эффект, имеющий смысл произведения разрывной функции на обобщенную. В задаче, изучаемой в статье, продолжающей работу [1], данный эффект связан с разрывностью в зависимостях коэффициентов при управлении (ограничиваемся случаем скалярного управления). Кроме того, предполагается, что управление должно удовлетворять некоторым моментным и невыпуклым, вообще говоря, ограничениям. Рассматривается вопрос об устойчивости пучка при ослаблении упомянутых моментных ограничений. Устойчивость понимается при этом как топологическое свойство и относится, строго говоря, к замыканию пучка в топологии поточечной сходимости. В работе указаны условия, достаточные для такой устойчивости при двух формализациях импульсной компоненты ограничений. В основе этих условий — положения [1], связанные с расширением задач управления в классе конечно-аддитивных (к.-а.) мер. В связи с другими подходами к построению обобщенных режимов импульсного управления отметим [2], [3]. В целом, использование обобщенных конструкций импульсного управления в линейных системах связано с общим подходом Н.Н. Красовского [4], послужившим основой для многих исследований в данном направлении и определившим перспективы. Наряду с [2], [3] отметим монографии [5]–[7].

Следуя [1], рассмотрим обобщенную линейную управляемую систему, в качестве управлений используя к.-а. меры. Роль системы здесь иная (в сравнении с [1]). Именно, с ее помощью устанавливается при некоторых условиях упомянутое свойство "топологической" устойчивости замыкания пучка траекторий при ослаблении моментных ограничений. Хотя эти условия использовались давно [8]–[10], но в данном положении возникают некоторые особенности, связанные с топологическим оснащением пространства траекторий. Следует отметить, что при отказе от этих условий (ступенчатости функций, участвующих в соотношениях, определяющих ограничения) указанное свойство, имеющее смысл устойчивости, может отсутствовать (см. соответствующие примеры в [8]–[10], а также [8], с. 7, 8; [10], гл. 1).

## 2. Постановка задачи

Рассматривается линейная управляемая система на конечном промежутке времени. На выбор управляющих программ накладываются импульсные ограничения, формализуемые в двух характерных вариантах: ограничение на полный импульс, ограничение на сумму амплитуд импульсов в схеме управления с толчками. Соответственно в дальнейшем реализуются две конструкции расширения задачи управления.

В одной из этих конструкций следуем разделу 8 работы [1], рассматриваем векторное дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = A(t)x(t) + f(t)b(t) \tag{2.1}$$

в $n$-мерном (фазовом) пространстве $\mathbb{R}^n$ на промежутке времени $I_0 \triangleq [t_0, \vartheta_0]$ $(t_0 < \vartheta_0)$, $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$. При этом $A(\cdot) = (A(t), t_0 \le t \le \vartheta_0)$ есть непрерывный $n \times n$-матрицант, а $b = b(\cdot)$ есть функция, действующая из $I \triangleq [t_0, \vartheta_0[$ в $\mathbb{R}^n$; компоненты $b_i = b_i(\cdot)$, $i \in \overline{1,n}$, этой функции могут быть разрывными. При этом для полуалгебры $\mathcal{I}$ всех промежутков $[a, b[$, $t_0 \le a \le b \le \vartheta_0$, и $\sigma$-алгебры $\mathcal{B}$ всех борелевских подмножеств (п/м) промежутка $I$ полагаем, что используемая в дальнейшем измеримая структура в виде полуалгебры $\mathcal{L}$ п/м $I$ удовлетворяет требованиям

$$\mathcal{I} \subset \mathcal{L} \subset \mathcal{B}. \tag{2.2}$$

Будем полагать, что каждая компонента $b_i = b_i(\cdot)$ вектор-функции $b$ является равномерным пределом некоторой последовательности ступенчатых в смысле $(I, \mathcal{L})$ вещественнозначных (в/з) функций на $I$. Функция

$$f : I \to \mathbb{R} \tag{2.3}$$

в (2.1) предполагается, в простейшем случае, ступенчатой в смысле $(I, \mathcal{L})$ и удовлетворяющей, кроме того, условию

$$\int_I |f(t)| \lambda(dt) \le c, \tag{2.4}$$

где $\lambda$ — след меры Лебега–Бореля на полуалгебру $\mathcal{L}$, а $c \in [0, \infty[$. Функции (2.3), удовлетворяющие (2.4), исполняют роль обычных управлений.

При другом варианте представления системы используется так называемое управление с толчками [2] (чисто импульсное управление [3]). В этом случае обычное управление имеет смысл конечной комбинации $\delta$-импульсов, а уравнение, определяющее соответствующую траекторию, на содержательном уровне имеет вид

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + \sum_{i=1}^{k} c_i b(t) \delta(t - t_i)$$

с тем же начальным условием $x(t_0) = x_0$. Здесь $A(\cdot)$ и $b(\cdot)$ удовлетворяют вышеупомянутым условиям, $k \in \mathcal{N}$, где $\mathcal{N} \triangleq \{1; 2; \dots\}$, $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ и при этом

$$\sum_{i=1}^{k} |c_i| \le c. \tag{2.5}$$

Уточнение второй постановки будет дано ниже. Сейчас заметим, что наряду с ресурсными ограничениями (2.4), (2.5) выбор обычного управления будет стеснен некоторым условием моментного характера.

Пусть $Y$ — непустое замкнутое множество в $m$-мерном арифметическом пространстве $\mathbb{R}^m$; (2.4) дополняем требованием

$$\Big( \int_I s_1(t) f(t) \lambda(dt), \dots, \int_I s_m(t) f(t) \lambda(dt) \Big) \in Y, \tag{2.6}$$

где $m \in \mathcal{N}$, а в/з функции $s_1, \ldots, s_m$, определенные на $I$, являются линейными комбинациями индикаторов ([11], с. 56) множеств из $\mathcal{L}$. В свою очередь, (2.5) будем дополнять условием

$$\Big(\sum_{i=1}^{k} c_i s_1(t_i), \ldots, \sum_{i=1}^{k} c_i s_m(t_i)\Big) \in Y. \tag{2.7}$$

Заметим, что вопросам совместного рассмотрения двух упомянутых постановок задач управления с импульсными ограничениями (2.4), (2.5) посвящена работа [12]. Будем допускать возможность ослабления условий (2.6), (2.7) путем замены множества $Y$ той или иной его $\varepsilon$-окрестностью в определенной норме $\mathbb{R}^m$. Будем интересоваться свойством, имеющим смысл своеобразной устойчивости пучков траекторий. Хорошо известно, что ([8], [9], гл. 1, 2, и [10], гл. 1, 2) во многих задачах такого типа устойчивость при ослаблении $Y$-ограничения отсутствует.

Введем фундаментальную матрицу-функцию [13] $\Phi = \Phi(\cdot, \cdot)$ решений однородной системы

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t),$$

причем непрерывный матрицант $\Phi$ определен на $I_0 \times I_0$. Тогда в обеих версиях задачи (см. (2.6), (2.7)) может быть определен соответствующий пучок возможных траекторий.

Всюду в дальнейшем def заменяет фразу "по определению", $\triangleq$ — равенство по определению. Пусть $B_0(I, \mathcal{L})$ есть def множество всех ступенчатых, в смысле $(I, \mathcal{L})$, в/з функций на $I$, а $B(I, \mathcal{L})$ — замыкание $B_0(I, \mathcal{L})$ в смысле топологии равномерной сходимости пространства $\mathbf{B}(I)$ всех ограниченных в/з функций на $I$. В силу (2.2) сужения на $I$ в/з функций, определенных и непрерывных на $I_0$, являются элементами $B(I, \mathcal{L})$.

Через $\mathbb{F}$ обозначим множество всех $f \in B_0(I, \mathcal{L})$, удовлетворяющих условию (2.4). Тогда, если $f \in \mathbb{F}$, то траектория $\varphi_f : I_0 \to \mathbb{R}^n$ системы (2.1) определяется обычной формулой Коши

$$\varphi_f(t) = \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{[t_0, t[} f(\xi)\Phi(t, \xi)b(\xi)\lambda(d\xi) \quad \forall t \in I_0. \tag{2.8}$$

Пусть $F_\partial$ — множество всех $f \in \mathbb{F}$, обладающих свойством (2.6) (напомним, что $s_1, \ldots, s_m \in B_0(I, \mathcal{L})$). Тогда

$$\mathfrak{X}_\partial \triangleq \{\varphi_f : f \in F_\partial\} \tag{2.9}$$

есть пучок допустимых траекторий системы (2.1). Зафиксируем для определенности норму $\|\cdot\|_k$ в $\mathbb{R}^k$, где $k \in \mathcal{N}$, полагая при $(x_i)_{i \in \overline{1,k}} \in \mathbb{R}^k$ $\|(x_i)_{i \in \overline{1,k}}\|_k \triangleq \sup\{|x_i| : i \in \overline{1,k}\}$.

Через $Y^\varepsilon$, $\varepsilon \in ]0, \infty[$, обозначаем открытую $\varepsilon$-окрестность множества $Y$ в смысле метрики, порожденной нормой $\|\cdot\|_m$,

$$F_\partial^{(\varepsilon)} \triangleq \Big\{f \in \mathbb{F} \Big| \Big(\int_I s_i f d\lambda\Big)_{i \in \overline{1,m}} \in Y^\varepsilon\Big\}. \tag{2.10}$$

В соответствии с (2.10) при $\varepsilon \in ]0, \infty[$ определяем пучок

$$\mathfrak{X}_\partial^{(\varepsilon)} \triangleq \{\varphi_f : f \in F_\partial^{(\varepsilon)}\}. \tag{2.11}$$

Пусть теперь $\mathbf{X}$ есть def множество всех отображений из $I_0$ в $\mathbb{R}^n$, т. е. $\mathbf{X} = \{I_0 \to \mathbb{R}^n\}$. Оснащаем $\mathbf{X}$ топологией $\mathbf{t}$ поточечной сходимости, получая в виде

$$(\mathbf{X}, \mathbf{t}) \tag{2.12}$$

тихоновское произведение экземпляров $(\mathbb{R}^n, \tau^{(n)})$, где $\tau^{(n)}$ — топология покоординатной сходимости пространства $\mathbb{R}^n$, с индексным множеством $I_0$. Иными словами, (2.12) — тихоновская степень пространства $(\mathbb{R}^n, \tau^{(n)})$. Обозначаем через $\mathrm{cl}(\cdot, \mathbf{t})$ оператор замыкания в топологическом пространстве (ТП) (2.12). Тогда

$$\mathbf{ATT} \triangleq \bigcap_{\varepsilon>0} \mathrm{cl}(\mathfrak{X}_\partial^{(\varepsilon)}, \mathbf{t}) \tag{2.13}$$

есть множество притяжения (МП) ([8], с. 42) в классе приближенных решений-направленностей. Множество (2.13) может рассматриваться как естественная регуляризация пучка (2.9), причем МП **ATT** (2.13) совпадает с $\mathrm{cl}(\mathfrak{X}_\partial, \mathbf{t})$. Это утверждение может быть извлечено из общих конструкций ([10], гл. 3). Однако представляет интерес исследование этого вопроса прямыми методами с обобщенными программными управлениями — к.-а. мерами — в смысле [1]. Иными словами, введем обобщенную управляемую систему по аналогии со второй частью [1]. Этот подход подобен также ([14], гл. III, IV). Здесь будет полезен и подход, развиваемый в [1], где конструкция расширения была введена аксиоматически, что позволяет применить ее и к уже упомянутой задаче, связанной с МП (2.13), и к подобной задаче, отвечающей случаю ресурсных ограничений вида (2.5), (2.7). Покажем, что и в этом случае имеет место аналог свойства устойчивости, подобный совпадению МП (2.13) и замыкания множества (2.9). Разумеется, для этого следует ввести аналоги обычных траекторий $\varphi_f$, отвечающие чисто импульсным воздействиям для наборов $(k, c_1, \ldots, c_k, t_1, \ldots, t_k)$ с ограничениями (2.5), (2.7). Кроме того, нужно ввести аналоги пучков (2.9)–(2.11) и МП (2.13). В обоих построениях ключевую роль играет конструкция расширения, реализуемая в классе к.-а. мер ([1], [8], [10], [12]). Речь идет о том, чтобы заменить $F_\partial$ (и аналог этого множества для случая чисто импульсного управления) множеством допустимых обобщенных управлений, которым согласно [1] следует сопоставить пучок "траекторий", порожденных управлениями-мерами. Этот пучок будет совпадать с (2.13) либо с надлежащим аналогом (2.13) для случая чисто импульсного управления. Заметим, что условия (2.6), (2.7) являются достаточно типичными в задачах управления техническими системами. В частности, конкретный вариант (2.6) изучался в ([8], с. 13–16) и ([10], с. 1–26), где на упомянутой основе исследовались возможности ослабления весьма характерных ограничений на режим работы двигателя, имеющих смысл условий чередования "импульсов" и "пауз" в расходовании энергии.

## 3. Общие обозначения и определения

Ниже используются кванторы и связки только в целях сокращения записи основных утверждений. Семейством называем множество, все элементы которого сами являются множествами, принимаем аксиому выбора. Через $\mathcal{P}(X)$ (через $\mathcal{P}'(X)$) обозначаем семейство всех (всех непустых) п/м множества $X$. Обозначаем через $B^A$ множество всех функций, действующих из множества $A$ в множество $B$; если $f \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$, то через $f^1(C)$ обозначаем образ множества $C$ при действии $f$ ([15], с. 81). Пусть $X$ — множество, тогда при

$$\mathcal{B}[X] \triangleq \{\mathfrak{X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(X)) \mid \forall A \in \mathfrak{X}, \forall B \in \mathfrak{X}\ \exists C \in \mathfrak{X} : C \subset A \cap B\}$$

в виде $\mathcal{B}_0[X] \triangleq \{\mathcal{X} \in \mathcal{B}[X] \mid \emptyset \notin \mathcal{X}\}$ имеем множество всех базисов фильтров $X$. Для всякого множества $X$ в виде

$$\mathcal{F}[X] \triangleq \{\mathcal{H} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(X)) \mid (\emptyset \notin \mathcal{H})\,\&\,(A \cap B \in \mathcal{H}\ \forall A \in \mathcal{H},\ \forall B \in \mathcal{H})\,\&$$
$$\&\,(\{U \in \mathcal{P}(X) \mid H \subset U\} \subset \mathcal{H}\ \forall H \in \mathcal{H})\}$$

получаем множество всех фильтров $X$; если $\mathcal{X} \in \mathcal{B}_0[X]$, то

$$\{S \in \mathcal{P}(X) \mid \exists M \in \mathcal{X} : M \subset S\} \in \mathcal{F}[X].$$

Используем направленности и сходимость по Мору–Смиту, следуя ([16], гл. 2). Обозначаем направленности посредством триплетов, как и в ([10], с. 33): $(D, \preccurlyeq, \varphi)$ есть направленность в множестве $U$, если $(D, \preccurlyeq)$, $D \neq \emptyset$, — направленное множество ($\preccurlyeq$ есть направление на $D$) и $\varphi \in U^D$, при этом

$$(U - \mathrm{ass})[D; \preccurlyeq; \varphi] \triangleq \{V \in \mathcal{P}(U) \mid \exists d \in D\ \forall \delta \in D\ ((d \preccurlyeq \delta) \Rightarrow (\varphi(\delta) \in V))\} \in \mathcal{F}[U]$$

есть фильтр множества $U$, ассоциированный с $(D, \preccurlyeq, \varphi)$.

Напомним некоторые понятия из общей топологии. Если $(X, \tau)$ — ТП ($\tau$ — топология $X$) и $M \in \mathcal{P}(X)$, то через $\mathrm{cl}(M, \tau)$ и $\mathbb{N}_\tau[M]$ обозначаем соответственно замыкание $M$ и семейство всех окрестностей ([16], гл. 4) $M$ в $(X, \tau)$. Если при этом $x \in X$, а $M = \{x\}$ (одноэлементное множество), то вместо $\mathbb{N}_\tau[M]$ используем обозначение $\mathrm{N}_\tau(x)$, $\mathrm{N}_\tau(x) \in \mathcal{F}[X]$, получая фильтр всех окрестностей $x$ в $(X, \tau)$. Следуя [8], [10], определяем МП: если $U$ — непустое множество, $\mathcal{U} \in \mathcal{B}[U]$, $(V, \tau)$ есть ТП и $t \in V^U$, то

$$(\tau - \mathrm{LIM})[\mathcal{U}|t] \triangleq \bigcap_{H \in \mathcal{U}} \mathrm{cl}(t^1(H), \tau) \tag{3.1}$$

есть МП в классе приближенных решений-направленностей ([8], с. 41, 42). Следуем ([10], с. 34) при обозначении сходимости направленностей: если $(D, \preccurlyeq, \varphi)$ — направленность в ТП $(X, \tau)$ и $x \in X$, то ([16], гл. 2) def

$$((D, \preccurlyeq, \varphi) \xrightarrow{\tau} x) \Leftrightarrow (\mathrm{N}_\tau(x) \subset (X - \mathrm{ass})[D; \preccurlyeq; \varphi]).$$

Отметим, что $(\tau - \mathrm{LIM})[\mathcal{U}|t]$ — множество всех $v \in V$ таких, что для некоторой направленности $(D, \preccurlyeq, \varphi)$ в $U$ имеет место

$$(\mathcal{U} \in (U - \mathrm{ass})[D; \preccurlyeq; \varphi]) \,\&\, ((D, \preccurlyeq, t \circ \varphi) \xrightarrow{\tau} v), \tag{3.2}$$

символ $\circ$ используется, как обычно, для обозначения суперпозиции функций. Представление (3.2) доставляет МП (3.1) весьма актуальные для приложений свойства: речь идет о естественном для практики способе достижения цели в условиях приближенного соблюдения ограничений.

Если $(X, \tau)$ — ТП, то через $\mathcal{F}_\tau$ (через $(\tau - \mathrm{comp})[X]$) обозначаем семейство всех замкнутых (компактных [17], с. 196) в пространстве $(X, \tau)$ п/м $X$. Если $(U, \tau_1)$ и $(V, \tau_2)$ — два ТП, $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$, то через $C(U, \tau_1, V, \tau_2)$ обозначаем множество всех функций из $U$ в $V$, непрерывных в смысле $\tau_1$, $\tau_2$. Если при этом $(U, \tau_1)$ — компактное ТП, а $(V, \tau_2)$ – хаусдорфово ТП, то

$$f^1(\mathrm{cl}(H, \tau_1)) = \mathrm{cl}(f^1(H), \tau_2) \quad \forall H \in \mathcal{P}(U). \tag{3.3}$$

Отметим одно известное ([8], § 2.5) положение, связанное с (3.3): если $\mathbf{F}$ – непустое множество, $\widetilde{\mathcal{F}} \in \mathcal{B}[\mathbf{F}]$, т. е. $\widetilde{\mathcal{F}}$ — непустое семейство п/м $\mathbf{F}$ такое, что

$$\forall A \in \widetilde{\mathcal{F}}, \ \ \forall B \in \widetilde{\mathcal{F}} \ \ \exists C \in \widetilde{\mathcal{F}} : C \subset A \cap B,$$

$(\mathbf{K}, \tau_1)$ – компактное ТП, $(\mathbf{H}, \tau_2)$ — хаусдорфово ТП, $m \in \mathbf{K}^{\mathbf{F}}$ и $g \in C(\mathbf{K}, \tau_1, \mathbf{H}, \tau_2)$, то

$$(\tau_2 - \mathrm{LIM})[\widetilde{\mathcal{F}}|g \circ m] = g^1((\tau_1 - \mathrm{LIM})[\widetilde{\mathcal{F}}|m]). \tag{3.4}$$

## 4. Конечно-аддитивные меры

Рассмотрим непустое множество $I = [t_0, \vartheta_0[$ $(t_0 < \vartheta_0)$, оснащаемое полуалгеброй $\mathcal{L}$ п/м $I$. Через $(\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$ обозначаем конус всех неотрицательных к.-а. в/з мер на $\mathcal{L}$ ([18], гл. III, IV). Пусть $\mathbf{A}(\mathcal{L})$ — множество всех в/з к.-а. мер на $\mathcal{L}$, имеющих ограниченную полную вариацию, тогда $\mathbf{A}(\mathcal{L})$ является линейным пространством, порожденным конусом $(\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$. В терминах полной вариации определяется сильная норма $\mathbf{A}(\mathcal{L})$. Линейная оболочка $B_0(I, \mathcal{L})$ множества всех индикаторов ([11], с. 56) множеств из $I$ есть п/м множества $\mathbf{B}(I)$ всех ограниченных в/з функций на $I$. Линейное пространство $\mathbf{B}(I)$ оснащаем sup-нормой $\|\cdot\|$ ([18], с. 261), получая в виде замыкания $B_0(I, \mathcal{L})$ в смысле $(\mathbf{B}(I), \|\cdot\|)$ банахово пространство $B(I, \mathcal{L})$, у которого топологическое сопряженное пространство изометрически изоморфно $\mathbf{A}(\mathcal{L})$ в сильной норме. Эту норму определяем посредством полной вариации мер из $\mathbf{A}(\mathcal{L})$: если $\mu \in \mathbf{A}(\mathcal{L})$, то $v_\mu(I)$ есть def полная вариация $\mu$ в традиционном смысле ([8], с. 62). Следуя [8], [10], оснащаем $\mathbf{A}(\mathcal{L})$ $*$-слабой топологией $\tau_*(\mathcal{L})$, получая локально выпуклый $\sigma$-компакт

$$(\mathbf{A}(\mathcal{L}), \tau_*(\mathcal{L})). \tag{4.1}$$

Условия компактности в ТП (4.1) определяются известной теоремой Алаоглу ([18], гл. V). Введем топологию $\tau_0(\mathcal{L})$ ([10], с. 44) множества $\mathbf{A}(\mathcal{L})$, отвечающую представлению $\mathbf{A}(\mathcal{L})$ в виде подпространства $\mathbb{R}^{\mathcal{L}}$ в топологии тихоновского произведения экземпляров $\mathbb{R}$, оснащаемых каждый дискретной топологией, с индексным множеством $\mathcal{L}$. Если $\tau$ — топология $\mathbf{A}(\mathcal{L})$ и $M \in \mathcal{P}(\mathbf{A}(\mathcal{L}))$, то через $\tau|_M$ обозначаем топологию $M$, индуцированную (на $M$) из $(\mathbf{A}(\mathcal{L}), \tau)$, $(M, \tau|_M)$ — подпространство $(\mathbf{A}(\mathcal{L}), \tau)$. Для нас будут наиболее существенны случаи $\tau = \tau_*(\mathcal{L})$ и $\tau = \tau_0(\mathcal{L})$. Через $\mathbf{C}$ условимся обозначать семейство всех компактных ([17], с. 196) в ТП (4.1) п/м $\mathbf{A}(\mathcal{L})$, т. е. семейство всех множеств $K$, $K \subset \mathbf{A}(\mathcal{L})$, таких, что $(K, \tau_*(\mathcal{L})|_K)$ есть компактное ТП. Отметим еще одно полезное свойство: $\forall K \in \mathbf{C}$

$$\tau_*(\mathcal{L})|_K \subset \tau_0(\mathcal{L})|_K. \tag{4.2}$$

Нас будет интересовать возможность погружения некоторого естественного с точки зрения реализации непустого множества $\mathbf{F}$ в соответствующий вариант компакта $K \in \mathbf{C}$ (см., в частности, [1]). При этом важную роль играет плотное погружение $\mathbf{F}$ в $(K, \tau_0(\mathcal{L})|_K)$, где $K \in \mathbf{C}$. Для этого погружения потребуется оператор, который, следуя [1], будем обозначать через $\mathbf{m}$. Итак, полагаем, что фиксированы непустой компакт $\mathbf{K} \in \mathbf{C}$, непустое множество $\mathbf{F}$ достаточно произвольной природы и оператор $\mathbf{m} \in \mathbf{K}^{\mathbf{F}}$. Следуя (4.2), получаем для $t_{\mathbf{l}} \triangleq \tau_*(\mathcal{L})|_{\mathbf{K}}$ и $t_{\mathbf{u}} \triangleq \tau_0(\mathcal{L})|_{\mathbf{K}}$ свойство сравнимости $t_{\mathbf{l}} \subset t_{\mathbf{u}}$. Будем также полагать ([1], с. 64)

$$\mathbf{K} = \mathrm{cl}(\mathbf{m}^1(\mathbf{F}), t_{\mathbf{u}}). \tag{4.3}$$

Далее возьмем один частный случай конструкции [1], который в [1] не рассматривался. Согласно разделу 2 полагаем, что множество $\mathbf{\Gamma}$ [1] есть в данном случае $\overline{1,m}$, а число $n$ в ([1], с. 64) есть 1. Тогда в качестве множества $\mathbf{X}$ раздела 5 [1] можно использовать $\mathbb{R}^m$. Напомним, что (см. раздел 2)

$$(s_i)_{i \in \overline{1,m}} : \overline{1,m} \to B_0(I, \mathcal{L}).$$

Условимся о следующем соглашении ([1], с. 65): отображение $\mathbf{g}$, действующее из $\mathbf{K}$ в $\mathbb{R}^m$, имеет вид

$$\mathbf{g}(\mu) \triangleq \left( \int_I s_i d\mu \right)_{i \in \overline{1,m}}. \tag{4.4}$$

Введем детализацию предложения 5.1 [1]. Через $\tau_{\mathbf{l}}$ обозначим обычную топологию покоординатной сходимости в $\mathbb{R}^m$, получим (см. раздел 2) в виде $Y$ замкнутое в $(\mathbb{R}^m, \tau_{\mathbf{l}})$ п/м $\mathbb{R}^m$. Заметим, что для нашего случая множество $\mathbf{\Gamma}_0$ [1] есть $\overline{1,m}$. Поэтому в виде $\tau_{\mathbf{u}}$ [1] имеем дискретную топологию $\mathbb{R}^m$, т. е. $\tau_{\mathbf{u}} = \mathcal{P}(\mathbb{R}^m)$.

**Предложение 4.1.** $\mathbf{g} \in C(\mathbf{K}, t_{\mathbf{l}}, \mathbb{R}^m, \tau_{\mathbf{l}}) \cap C(\mathbf{K}, t_{\mathbf{u}}, \mathbb{R}^m, \tau_{\mathbf{u}})$.

**Доказательство.** Свойство непрерывности $\mathbf{g}$ в смысле $(t_{\mathbf{l}}, \tau_{\mathbf{l}})$ имеется, т. к. каждый из интегралов в (4.4) непрерывно зависит от меры в смысле $(\mathbf{K}, t_{\mathbf{l}})$. Проверим, что $\mathbf{g} \in C(\mathbf{K}, t_{\mathbf{u}}, \mathbb{R}^m, \tau_{\mathbf{u}})$. Действительно, $t_{\mathbf{u}}$-сходимость к $\mu \in \mathbf{K}$ направленности $(D, \preccurlyeq, h)$ в $\mathbf{K}$, где $(D, \preccurlyeq)$ — непустое направленное множество и $h \in \mathbf{K}^D$, эквивалентна свойству $\forall L \in \mathcal{L} \;\; \exists d \in D \;\; \forall \delta \in D$

$$(d \preccurlyeq \delta) \Rightarrow (h(\delta)(L) = \mu(L)). \tag{4.5}$$

Зафиксируем некоторую такую направленность $(D, \preccurlyeq, h)$ и меру $\mu \in \mathbf{K}$ со свойством сходимости в $(\mathbf{K}, t_{\mathbf{u}})$. Тогда имеем свойство (4.5) и в силу ступенчатости $s_1, \ldots, s_m$ получаем $\forall i \in \overline{1,m}$ $\exists d_i \in D \;\; \forall \delta \in D$

$$(d_i \preccurlyeq \delta) \Rightarrow \left( \int_I s_i dh(\delta) = \int_I s_i d\mu \right).$$

Поэтому $\exists \mathbf{d} \in D \;\; \forall \delta \in D$

$$(\mathbf{d} \preccurlyeq \delta) \Rightarrow ((\mathbf{g} \circ h)(\delta) = \mathbf{g}(\mu)).$$

Это свойство эквивалентно утверждению

$$(D, \preccurlyeq, \mathbf{g} \circ h) \xrightarrow{\tau_{\mathbf{u}}} \mathbf{g}(\mu).$$

Установили импликацию

$$((D, \preccurlyeq, h) \xrightarrow{\tau_{\mathbf{u}}} \mu) \Rightarrow ((D, \preccurlyeq, \mathbf{g} \circ h) \xrightarrow{\tau_{\mathbf{u}}} \mathbf{g}(\mu)).$$

Поскольку выбор $(D, \preccurlyeq, h)$ и $\mu$ был произвольным, то $\mathbf{g} \in C(\mathbf{K}, t_{\mathbf{u}}, \mathbb{R}^m, \tau_{\mathbf{u}})$. $\square$

Введем теперь семейство $\mathcal{Y}_{\mathbf{l}}^*$ ([1], с. 65) всех открытых $\varepsilon$-окрестностей множества $Y$, $\varepsilon > 0$. Иными словами,

$$\mathcal{Y}_{\mathbf{l}}^* \triangleq \{Y^\varepsilon : \varepsilon \in ]0, \infty[\,\}.$$

При этом условимся оснащать $\mathbb{R}^m$ нормой $\|\cdot\|_m$, для которой

$$\|x\|_m \triangleq \sup\{|x(i)| : i \in \overline{1,m}\} \quad \forall x \in \mathbb{R}^m.$$

Все $\varepsilon$-окрестности $Y$ понимаются в смысле этой нормы. Система окрестностей $Y$ в $\tau_{\mathbf{u}}$ сводится фактически к самому $Y$ ($Y$ есть наименьшая по вложению окрестность самого множества $Y$). Далее мы фактически конкретизируем соотношение (5.16) работы [1]. Напомним, что [1] $\mathbf{s} = \mathbf{g} \circ \mathbf{m}$, в нашем случае

$$\mathbf{s} : \mathbf{F} \to \mathbb{R}^m.$$

Воспользуемся свойством (3.4). Для семейства

$$\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}_{\mathbf{l}}^*] = \{\mathbf{s}^{-1}(H) : H \in \mathcal{Y}_{\mathbf{l}}^*\}$$

согласно (3.4) имеет место, в частности, равенство

$$\mathbf{g}^1((t_{\mathbf{l}} - \mathrm{LIM})[\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}_{\mathbf{l}}^*]|\mathbf{m}]) = (\tau_{\mathbf{l}} - \mathrm{LIM})[\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}_{\mathbf{l}}^*]|\mathbf{g} \circ \mathbf{m}].$$

Кроме того, введем $\mathcal{Y}_{\mathbf{u}}^* \triangleq \{Y\}$. Тогда $\mathcal{Y}_{\mathbf{l}}^*$ есть подсемейство $\mathcal{Y}_{\mathbf{l}}$ работы [1], для которого верно свойство $\forall H_1 \in \mathcal{Y}_{\mathbf{l}}\ \ \exists H_2 \in \mathcal{Y}_{\mathbf{l}}^* : H_2 \subset H_1$. Кроме того, $\mathcal{Y}_{\mathbf{u}}^*$ есть подсемейство семейства $\mathcal{Y}_{\mathbf{u}}$ работы [1] и такое, что $\forall H_1 \in \mathcal{Y}_{\mathbf{u}}\ \ \exists H_2 \in \mathcal{Y}_{\mathbf{u}}^* : H_2 \subset H_1$. Если теперь $\mathbf{h} : \mathbf{F} \to \mathbf{X}$, то ([1], с. 66)

$$(\mathbf{t} - \mathrm{LIM})[\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}_{\mathbf{l}}]|\mathbf{h}] = (\mathbf{t} - \mathrm{LIM})[\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}_{\mathbf{l}}^*]|\mathbf{h}], \tag{4.6}$$

$$(\mathbf{t} - \mathrm{LIM})[\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}_{\mathbf{u}}]|\mathbf{h}] = (\mathbf{t} - \mathrm{LIM})[\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}_{\mathbf{u}}^*]|\mathbf{h}] = \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(Y)), \mathbf{t}). \tag{4.7}$$

Напомним, что $\mathcal{Y}_{\mathbf{l}}^* = \{Y^\varepsilon : \varepsilon \in ]0, \infty[\}$. Тогда в (4.6) имеем

$$(\mathbf{t} - \mathrm{LIM})[\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}_{\mathbf{l}}]|\mathbf{h}] = \bigcap_{\varepsilon \in ]0,\infty[} \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(Y^\varepsilon)), \mathbf{t}). \tag{4.8}$$

Введем теперь $\omega : \mathbf{K} \to \mathbf{X}$ по следующему правилу: при $\mu \in \mathbf{K}$

$$\omega(\mu) \triangleq \widetilde{\varphi}_\mu,$$

где $\widetilde{\varphi}_\mu \in \mathbf{X}$ определяется условием ([1], с. 69), а именно $\forall t \in I_0$

$$\widetilde{\varphi}_\mu(t) = \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{[t_0, t[} \Phi(t, \tau)b(\tau)\mu(d\tau).$$

Далее полагаем $\mathbf{h} \triangleq \omega \circ \mathbf{m}$. При этом $\omega \in C(\mathbf{K}, t_{\mathbf{l}}, \mathbf{X}, \mathbf{t})$ по определению $*$-слабой топологии $\mathbf{A}(\mathcal{L})$ и топологии $\mathbf{t}$; $\omega$ — почти совершенное отображение из $(\mathbf{K}, t_{\mathbf{l}})$ в $(\mathbf{X}, \mathbf{t})$ как всякое непрерывное отображение из компактного пространства в хаусдорфово. В этом случае согласно представлению (5.16) работы [1] выполняется равенство

$$\omega^1(\mathbf{g}^{-1}(Y)) = (\mathbf{t} - \mathrm{LIM})[\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}_{\mathbf{l}}]|\mathbf{h}] = (\mathbf{t} - \mathrm{LIM})[\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}_{\mathbf{u}}]|\mathbf{h}]. \tag{4.9}$$

Из определения отображений $\mathbf{g}$ и $\omega$ вытекает, что справедливо равенство

$$\omega^1(\mathbf{g}^{-1}(Y)) = \left\{\widetilde{\varphi}_\mu : \mu \in \mathbf{K},\ \left(\int_I s_i d\mu\right)_{i \in \overline{1,m}} \in Y\right\}, \tag{4.10}$$

т. е. $\omega^1(\mathbf{g}^{-1}(Y))$ есть пучок всех "траекторий", порожденных допустимыми к.-а. обобщенными управлениями.

С учетом (4.6)–(4.9) получаем

$$\omega^1(\mathbf{g}^{-1}(Y)) = \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(Y)), \mathbf{t}) = (\mathbf{t} - \mathrm{LIM})[\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}_{\mathbf{l}}^*]|\mathbf{h}] = \bigcap_{\varepsilon>0} \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(Y^\varepsilon)), \mathbf{t}), \tag{4.11}$$

где $\omega^1(\mathbf{g}^{-1}(Y)) = \{\widetilde{\varphi}_\mu : \mu \in \mathbf{g}^{-1}(Y)\}$. Отметим, что при $\varepsilon \in ]0, \infty[$

$$\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(Y^\varepsilon)) = \omega^1(\mathbf{m}^1(\mathbf{s}^{-1}(Y^\varepsilon))) \subset \omega^1(\mathbf{K}), \quad \omega^1(\mathbf{K}) \in (\mathbf{t} - \mathrm{comp})[\mathbf{X}]$$

(учитывается, что непрерывный образ компактного множества компактен). В итоге, $\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(Y^\varepsilon))$, $\varepsilon > 0$, суть множества, предкомпактные в хаусдорфовом ТП $(\mathbf{X}, \mathbf{t})$, а тогда множества

$$\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(Y^\varepsilon)), \mathbf{t}), \quad \varepsilon > 0,$$

суть множества, компактные в $(\mathbf{X}, \mathbf{t})$. Следовательно, при $H \in \mathbf{s}^{-1}(\mathcal{Y}_{\mathbf{l}}^*)$

$$\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(H), \mathbf{t}) \in (\mathbf{t} - \mathrm{comp})[\mathbf{X}].$$

Само семейство $\mathcal{Y}_{\mathbf{l}}^*$ непусто. Поэтому в согласии с предложением 3.6.1 монографии [8]

$$\mathbb{N}_{\mathbf{t}}[\omega^1(\mathbf{g}^{-1}(Y))] \subset \bigcup_{H \in \mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}_{\mathbf{l}}^*]} \mathbb{N}_{\mathbf{t}}[\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(H), \mathbf{t})] = \bigcup_{\widetilde{Y} \in \mathcal{Y}_{\mathbf{l}}^*} \mathbb{N}_{\mathbf{t}}[\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(\widetilde{Y})), \mathbf{t})] =$$
$$= \bigcup_{\varepsilon>0} \mathbb{N}_{\mathbf{t}}[\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(Y^\varepsilon)), \mathbf{t})]. \tag{4.12}$$

При этом (см. (4.6), (4.7), (4.9))

$$\omega^1(\mathbf{g}^{-1}(Y)) = (\mathbf{t} - \mathrm{LIM})[\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}_{\mathbf{l}}^*]|\mathbf{h}] = (\mathbf{t} - \mathrm{LIM})[\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}_{\mathbf{u}}]|\mathbf{h}] = \mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(Y)), \mathbf{t}). \tag{4.13}$$

Из (4.12), (4.13) вытекает

**Теорема 4.1.** $\mathbb{N}_{\mathbf{t}}[\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(Y)), \mathbf{t})] \subset \bigcup\limits_{\varepsilon>0} \mathbb{N}_{\mathbf{t}}[\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(Y^\varepsilon)), \mathbf{t})]$.

Содержательный смысл теоремы состоит в утверждении, что пучки допустимых траекторий обладают следующим свойством устойчивости. Именно, если для множества $\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(Y)), \mathbf{t})$ выбрать произвольную его окрестность $S$, то окажется, что при всех $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_S[$, где $\varepsilon_S \in ]0, \infty[$, $S$ является окрестностью множества $\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(Y^\varepsilon)), \mathbf{t})$, что, в частности, означает (для таких $\varepsilon > 0$) справедливость вложения

$$\mathrm{cl}(\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(Y^\varepsilon)), \mathbf{t}) \subset S.$$

Операция замыкания пучков рассматривается как несущественная операция: к пучку присоединяются сколь угодно близкие к нему траектории (данное представление лежит в основе оператора замыкания по Куратовскому и оно было использовано в одном из эквивалентных определений ([16], с. 68)).

## 5. Конкретизация общих положений

Вернемся к двум постановкам раздела 2. Для этих случаев конкретизируем множества $\mathbf{F}$ и $\mathbf{K}$, а также отображение

$$\mathbf{m} : \mathbf{F} \to \mathbf{K}.$$

Напомним предположение (2.2), относящееся к выбору $\mathcal{L}$. В этих условиях определяем $\mathbf{F}$ в виде множества всех функций $f \in B_0(I, \mathcal{L})$ таких, что выполняется (2.4). Иными словами, полагаем, что $\mathbf{F} = \mathbb{F}$ (см. раздел 2). Для того чтобы ввести $\mathbf{K}$, потребуется широко используемое в [1], [8]–[10], [12] понятие слабой абсолютной непрерывности к.-а. мер на $\mathcal{L}$ относительно $\lambda$. Именно, как и в ([1], с. 71; [19], с. 333–334), введем

$$\mathbf{A}_\lambda[\mathcal{L}] \triangleq \{\mu \in \mathbf{A}(\mathcal{L}) \mid \forall L \in \mathcal{L} \; ((\lambda(L) = 0) \Rightarrow (\mu(L) = 0))\} \tag{5.1}$$

и определим

$$\mathbf{K} \triangleq \{\mu \in \mathbf{A}_\lambda[\mathcal{L}] \mid v_\mu(I) \le c\}. \tag{5.2}$$

Меры из множества (5.1) принято называть слабо абсолютно непрерывными относительно $\lambda$, (5.2) есть пересечение $\mathbf{A}_\lambda[\mathcal{L}]$ с шаром в сильной норме $\mathbf{A}(\mathcal{L})$. Для определения $\mathbf{m}$ потребуется неопределенный интеграл функций из $B_0(I,\mathcal{L})$ относительно $\lambda$ ([8], с. 70).

Итак, если $f \in B_0(I,\mathcal{L})$, то через $f*\lambda$, $f*\lambda \in \mathbf{A}_\lambda[\mathcal{L}]$, обозначаем неопределенный интеграл $f$ относительно $\lambda$, понимаемый в смысле ([8], с. 34). Если $f \in \mathbf{F}$, то согласно (2.4) получаем ([10], § 3.7), что $f*\lambda \in \mathbf{K}$. Тогда $\mathbf{m}$ определяем как оператор

$$f \mapsto f*\lambda : \mathbf{F} \to \mathbf{K}. \tag{5.3}$$

В (5.2) дана конкретизация $\mathbf{K}$ раздела 4, соответствующая первой (из рассматриваемых в разделе 2) постановке задачи (см. в этой связи ограничения (2.4), (2.6)). Содержательный смысл теоремы 4.1 в данном случае состоит в следующем.

Напомним, что согласно конкретизации (5.3) при $f \in \mathbf{F}$ имеет место утверждение: $\mathbf{h}(f) \in \mathbf{X}$ есть функция, для которой

$$\mathbf{h}(f)(t) = \Phi(t,t_0)x_0 + \int_{[t_0,t[} \Phi(t,\tau)b(\tau)f(\tau)\lambda(d\tau) \quad \forall t \in I_0.$$

Иными словами, $\mathbf{h}(f) = \varphi_f$ из (2.8) есть решение (2.1) с заданными начальными условиями, т. е. обычная траектория управляемой системы. В конкретизации $\mathbf{s}$ для нашего случая в силу (4.4) и (5.3) имеем, что при $f \in \mathbf{F}$ $\mathbf{s}(f)$ совпадает с вектором в левой части (2.6), т. е.

$$\mathbf{s}(f) = \left(\int_I s_i f\, d\lambda\right)_{i\in\overline{1,m}}. \tag{5.4}$$

Как следствие, в терминах раздела 2 получим $F_\partial = \mathbf{s}^{-1}(Y)$, а тогда $\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(Y)) = \mathfrak{X}_\partial$ (2.9). С другой стороны, при $\varepsilon \in ]0,\infty[$ в силу (2.10) и (5.4) имеем равенства $F_\partial^{(\varepsilon)} = \mathbf{s}^{-1}(Y^\varepsilon)$ и $\mathfrak{X}_\partial^{(\varepsilon)} = \mathbf{h}^1(F_\partial^{(\varepsilon)}) = \mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(Y^\varepsilon))$. Тогда из теоремы 4.1 вытекает

$$\mathbb{N}_{\mathbf{t}}[\mathrm{cl}(\mathfrak{X}_\partial,\mathbf{t})] \subset \bigcup_{\varepsilon>0} \mathbb{N}_{\mathbf{t}}[\mathrm{cl}(\mathfrak{X}_\partial^{(\varepsilon)},\mathbf{t})].$$

Как следствие, для всякой окрестности $G$ множества-замыкания $\mathrm{cl}(\mathfrak{X}_\partial,\mathbf{t})$ можно указать такое число $\varepsilon_G > 0$, что при любом выборе $\varepsilon > 0$ со свойством $\varepsilon \le \varepsilon_G$

$$\mathrm{cl}(\mathfrak{X}_\partial,\mathbf{t}) \subset \mathrm{cl}(\mathfrak{X}_\partial^{(\varepsilon)},\mathbf{t}) \subset G. \tag{5.5}$$

Таким образом, в (5.5) имеем свойство своеобразной “топологизированной” устойчивости.

Рассмотрим теперь постановку, связанную с условием (2.7). Управляющее воздействие в (2.7) представляет собой конечную систему толчков [2]. Действие таких управлений подобно действию конечных совокупностей мер Дирака. Условимся обозначать через $\delta_t$ при $t \in I$ сужение на $\mathcal{L}$ меры Дирака, соответствующей точке $t$: $\delta_t$ отображает $\mathcal{L}$ в $\{0;1\}$ так, что $\delta_t(L) = 0$ при $t \notin L$ и $\delta_t(L) = 1$ при $t \in L$. Если $k \in \mathcal{N}$, $(t_i)_{i\in\overline{1,k}} : \overline{1,k} \to I$ и $(\alpha_i)_{i\in\overline{1,k}} \in \mathbb{R}_k$, то

$$\mu = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \delta_{t_i} \in \mathbf{A}(\mathcal{L}) \tag{5.6}$$

определяется как обычная линейная комбинация простейших мер $\delta_{t_1},\dots,\delta_{t_k}$ с весами $\alpha_1,\dots,\alpha_k$. Действие каждой меры $\mu$ вида (5.6) на нашу систему можно рассматривать как вариант обобщенной траектории $\widetilde{\varphi}_\mu$. Тогда для $\mu$ (5.6) и $t \in I_0$

$$\widetilde{\varphi}_\mu(t) = \Phi(t,t_0)x_0 + \sum_{i\in T_t} \alpha_i \Phi(t,t_i)b(t_i), \tag{5.7}$$

где $T_t$ есть множество всех $j \in \overline{1,k}$ таких, что $t_j < t$, а в случае $T_t = \emptyset$ сумма в правой части (5.7) определяется как нулевой вектор. Иными словами, если имеем меру (5.6) и при этом

$$t^{(\mu)} \triangleq \inf\{t_i : i \in \overline{1,k}\},$$

то $\widetilde{\varphi}_\mu(t) = \Phi(t,t_0)x_0$, если $t \leq t^{(\mu)}$, и при $t > t^{(\mu)}$

$$\widetilde{\varphi}_\mu(t) = \Phi(t,t_0)x_0 + \sum_{i\in\overline{1,k},\ t_i<t} \alpha_i \Phi(t,t_i)b(t_i). \tag{5.8}$$

Аналогичное действие производит управление (5.6) на функции $s_1, \ldots, s_m$, т. е.

$$\int\limits_I s_j d\mu = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i s_j(t_i) \quad \forall j \in \overline{1,m}. \tag{5.9}$$

Заметим, что $\mu$ (5.6) рассматриваем как обычное управление, а условие (2.7) есть условие на выбор обычного управления такой структуры. Тогда (до конца статьи) определяем $\mathbf{F}$ как множество всех мер $\mu \in \mathbf{A}(\mathcal{L})$ таких, что

$$\exists k \in \mathcal{N},\ \exists (t_i)_{i\in\overline{1,k}} \in I^k,\ \exists (\alpha_i)_{i\in\overline{1,k}} \in \mathbb{R}^k : \left(\mu = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \delta_{t_i}\right) \ \&\ \left(\sum_{i=1}^{k} |\alpha_i| \leq c\right). \tag{5.10}$$

Если $\mu \in \mathbf{F}$, то, с одной стороны, имеем величины (5.9) и, следовательно, вектор

$$\left(\int_I s_j d\mu\right)_{j\in\overline{1,m}} \in \mathbb{R}^m,$$

все компоненты которого определяются конечными суммами (подобно (5.9)), а с другой, располагаем траекторией $\widetilde{\varphi}_\mu$, определяемой в (5.8). Тогда

$$\mathbf{F}_\partial \triangleq \left\{\mu \in \mathbf{F} \,\Big|\, \left(\int_I s_j d\mu\right)_{j\in\overline{1,m}} \in Y\right\} \tag{5.11}$$

есть в новой редакции множество всех обычных управлений, допустимых в смысле соблюдения $Y$-ограничения. Тогда

$$\mathcal{X}_\partial \triangleq \{\widetilde{\varphi}_\mu : \mu \in \mathbf{F}_\partial\} \tag{5.12}$$

есть множество всех допустимых обычных траекторий, структура которых указана в (5.8). В (5.11), (5.12) имеем множества, связанные с точным соблюдением $Y$-ограничения в исходной задаче (см. в этой связи (2.7)). Теперь рассмотрим аналогичные множества для ослабленных ограничений: если $\varepsilon \in ]0,\infty[$, то через $\mathbf{F}_\partial^{(\varepsilon)}$ обозначаем множество всех $\mu \in \mathbf{F}$ таких, что

$$\left(\int_I s_j d\mu\right)_{j\in\overline{1,m}} \in Y^\varepsilon$$

(см. определения раздела 2), в этих терминах

$$\mathcal{X}_\partial^{(\varepsilon)} \triangleq \{\widetilde{\varphi}_\mu : \mu \in \mathbf{F}_\partial^{(\varepsilon)}\}$$

есть аналог (2.12) для рассматриваемого случая чисто импульсного управления. В дальнейшем изучим близость множеств $\mathrm{cl}(\mathcal{X}_\partial, \mathbf{t})$ и $\mathrm{cl}(\mathcal{X}_\partial^{(\varepsilon)}, \mathbf{t})$ при "малых" $\varepsilon > 0$.

Для этого, как и в случае ограничений (2.6), конкретизируем положения раздела 4, используя конструкцию ([10], § 7.2). Начнем с определения варианта множества $\mathbf{K}$ и отображения $\mathbf{m}$. Для этого заметим, что (см. (5.10))

$$v_\mu(I) \leq c \quad \forall \mu \in \mathbf{F}. \tag{5.13}$$

В этой связи определим $\mathbf{K}$ в виде шара в сильной норме $\mathbf{A}(\mathcal{L})$:

$$\mathbf{K} \triangleq \{\mu \in \mathbf{A}(\mathcal{L}) \mid v_\mu(I) \leq c\}. \tag{5.14}$$

При этом в силу (5.13), (5.14) $\mathbf{F} \subset \mathbf{K}$. Более того, из ([10], с. 286) имеем

$$\mathbf{K} = \mathrm{cl}(\mathbf{F}, \tau_*(\mathcal{L})) = \mathrm{cl}(\mathbf{F}, \tau_0(\mathcal{L})). \tag{5.15}$$

Сравним (4.3) и (5.15), используя $t_{\mathbf{u}}$ согласно определениею раздела 4 для $\mathbf{K}$ (5.14). Тогда

$$\mathrm{cl}(\mathbf{F}, t_{\mathbf{u}}) = \mathrm{cl}(\mathbf{F}, \tau_0(\mathcal{L})) \cap \mathbf{K} = \mathbf{K}. \tag{5.16}$$

Итак, в (5.16) получили версию (4.3), если

$$\mathbf{m} : \mathbf{F} \to \mathbf{K} \tag{5.17}$$

есть тождественное отображение: $\mathbf{m}(\mu) = \mu \ \ \forall \mu \in \mathbf{F}$. Данное соглашение о $\mathbf{m}$ (5.17) соблюдаем в дальнейшем. Принимаем также, что оператор $\mathbf{g}$, действующий из $\mathbf{K}$ (5.14) в $\mathbb{R}^m$, определяется в (4.4), тогда (для конкретизации $\mathbf{m}$)

$$\mathbf{s} = \mathbf{g} \circ \mathbf{m} = (\mathbf{g} \mid \mathbf{F}). \tag{5.18}$$

По аналогии с (5.18) имеем

$$\mathbf{h} = \omega \circ \mathbf{m} = (\omega \mid \mathbf{F}) = (\widetilde{\varphi}_\mu)_{\mu \in \mathbf{F}}. \tag{5.19}$$

Конкретизация $\omega^1(\mathbf{g}^{-1}(Y))$ также вполне очевидна и соответствует (4.10). Разумеется, в нашем случае справедливо (4.13) и теорема 4.1. При этом учтем (4.4), (5.11), (5.18) и

$$\mathbf{F}_\partial = \mathbf{s}^{-1}(Y), \tag{5.20}$$

а тогда в силу (5.19) и (5.20) получаем

$$\mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(Y)) = \mathbf{h}^1(\mathbf{F}_\partial) = \mathcal{X}_\partial. \tag{5.21}$$

Кроме того,

$$\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}_{\mathbf{l}}^*] = \{\mathbf{s}^{-1}(Y^\varepsilon) : \varepsilon \in ]0, \infty[\,\}. \tag{5.22}$$

С другой стороны, при каждом $\varepsilon \in ]0, \infty[$ $\mathbf{F}_\partial^{(\varepsilon)} = \mathbf{s}^{-1}(Y^\varepsilon)$. Поэтому из (5.22) следует равенство

$$\mathbf{s}^{-1}[\mathcal{Y}_{\mathbf{l}}^*] = \{\mathbf{F}_\partial^{(\varepsilon)} : \varepsilon \in ]0, \infty[\,\}.$$

При $\varepsilon \in ]0, \infty[$ имеем

$$\mathcal{X}_\partial^{(\varepsilon)} = \mathbf{h}^1(\mathbf{F}_\partial^{(\varepsilon)}) = \mathbf{h}^1(\mathbf{s}^{-1}(Y^\varepsilon)). \tag{5.23}$$

Из (4.11) и (5.21) получаем равенство $\omega^1(\mathbf{g}^{-1}(Y)) = \mathrm{cl}(\mathcal{X}_\partial, \mathbf{t})$. С учетом этого свойства и (5.23) воспользуемся теоремой 4.1, в итоге

$$\mathbb{N}_{\mathbf{t}}[\mathrm{cl}(\mathcal{X}_\partial, \mathbf{t})] \subset \bigcup_{\varepsilon > 0} \mathbb{N}_{\mathbf{t}}[\mathrm{cl}(\mathcal{X}_\partial^{(\varepsilon)}, \mathbf{t})].$$

Это означает, что для всякой окрестности $G$ множества $\mathrm{cl}(\mathcal{X}_\partial, \mathbf{t})$ можно указать число $\varepsilon_G > 0$ такое, что при всяком выборе $\varepsilon > 0$ со свойством $\varepsilon \leq \varepsilon_G$

$$\mathrm{cl}(\mathcal{X}_\partial, \mathbf{t}) \subset \mathrm{cl}(\mathcal{X}_\partial^{(\varepsilon)}, \mathbf{t}) \subset G.$$

Получили свойство, подобное (5.5) и имеющее смысл устойчивости в топологическом смысле.

## Литература


1. Ченцов А.Г. *К вопросу о построении корректных расширений в классе конечно-аддитивных мер* // Изв. вузов. Математика. – 2002. – № 2. – С. 58–80.
2. Самойленко А.М., Перестнюк Н.А. *Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием.* – Киев: Вища школа, 1987. – 287 с.
3. Миллер Б.М. *Задача нелинейного импульсного управления объектами, описываемыми обыкновенными дифференциальными уравнениями* // Автоматика и телемеханика. – 1987. – № 3. – С. 34–41.
4. Красовский Н.Н. *Теория управления движением.* – М.: Наука, 1968. – 475 с.
5. Завалищин С.Т., Сесекин А.Н. *Импульсные процессы. Модели и приложения.* – М.: Наука, 1991. – 256 с.
6. Халанай А., Векслер Д. *Качественная теория импульсных систем.* – М.: Мир, 1971. – 309 с.
7. Дыхта В.А., Самсонюк О.Н. *Оптимальные импульсные управления с приложениями.* – М.: Физматлит, 2000. – 255 с.
8. Ченцов А.Г. *Конечно-аддитивные меры и релаксации экстремальных задач.* – Екатеринбург: Наука, 1993. – 232 с.
9. Chentsov A.G. *Finitely additive measures and relaxations of extremal problems.* – New York, London, Moscow: Plenum Publishing Corporation, 1996. – 244 p.
10. Chentsov A.G. *Asymptotic attainability.* – Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 1997. – 322 p.
11. Неве Ж. *Математические основы теории вероятностей.* – М.: Мир, 1969. – 309 с.
12. Бердышев Ю.И., Ченцов А.Г. *Об эквивалентности регуляризаций в абстрактных задачах с различными классами допустимых управлений* // Кибернетика и системный анализ. – 1998. – № 3. – С. 71–80.
13. Понтрягин Л.С. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* – М.: Наука, 1965. – 322 с.
14. Варга Дж. *Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями.* – М.: Наука, 1977. – 624 с.
15. Куратовский К., Мостовский А. *Теория множеств.* – М.: Мир, 1970. – 416 с.
16. Келли Дж. *Общая топология.* – М.: Наука, 1981. – 431 с.
17. Энгелькинг Р. *Общая топология.* – М.: Мир, 1986. – 751 с.
18. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. *Линейные операторы. Общая теория.* – М.: Ин. лит., 1962. – 895 с.
19. Ченцов А.Г. *Универсальная асимптотическая реализация интегральных ограничений и конструкции расширения в классе конечно-аддитивных мер* // Тр. ИММ УрО РАН. – 1998. – Т. 5. – С. 211–244.



*Институт математики и*
*механики Уральского отделения*
*Российской академии наук*



*Поступила*
24.10.2004