ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 3 (514)

УДК 517.988

М.Ю. КОКУРИН

ОБ УСТОЙЧИВОЙ АППРОКСИМАЦИИ РЕШЕНИЙ НЕГЛАДКИХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пусть H_1, H_2 — гильбертовы пространства, символ $\|\cdot\|$ обозначает норму элемента в соответствующем пространстве.

1. Рассматривается операторное уравнение

$$F(x)=0, \quad x\in H_1, \tag{1}$$

в котором нелинейный оператор $F: H_1\to H_2$ имеет вид $F(x)=F_1(x)+F_2(x)$, где оператор $F_1(x)$ дважды дифференцируем по Гато, и выполняются условия

$$\|F_1'(x)\|\le N_1, \quad \|F_1''(x)\|\le N_2 \quad \forall x\in\Omega_R(x^*), \tag{2}$$

$\Omega_R(x)=\{y\in H_1: \|y-x\|\le R\}, R>0$, x^* — искомое решение уравнения (1). Относительно оператора $F_2(x)$ предполагается липшицевость на $\Omega_R(x^*)$:

$$\|F_2(x)-F_2(y)\|\le L\|x-y\| \quad \forall x,y\in\Omega_R(x^*). \tag{3}$$

Наличие в (1) негладкого слагаемого $F_2(x)$ не позволяет применять к этому уравнению численные методы, ориентированные на уравнения с дифференцируемыми операторами (напр., [1]–[3]). В то же время, в ряде случаев указанные методы допускают естественную модификацию для уравнений вида (1), в которых негладкая составляющая $F_2(x)$ в том или ином смысле доминируется гладким слагаемым $F_1(x)$. В качестве примера укажем негладкий вариант метода Ньютона–Канторовича

$$x_{n+1}=x_n-F_1'(x_n)^{-1}F(x_n). \tag{4}$$

В предположении достаточной малости константы Липшица L и непрерывной обратимости производной $F_1'(x)$ имеет место сильная сходимость итераций (4) к x^* ([1], с. 150; [4], [5]). С практической точки зрения требование регулярности задачи, состоящее в непрерывной обратимости производной $F_1'(x)$ либо оператора $F_1'^*(x)F_1'(x)$, зачастую оказывается весьма ограничительным. Оно не выполняется, например, в важном для приложений случае, когда $F_1(x)$ есть оператор типа Урысона ([6], с. 369) в пространствах Лебега или Соболева. При этом $F_1'(x)$ как линейный непрерывный оператор из H_1 в H_2 в типичных случаях оказывается вполне непрерывным для всех $x\in H_1$. В работе на основе исследования итерационных процессов градиентного типа для гладких нерегулярных операторов ([3], гл. 5) строится негладкий аналог одного из таких процессов, предназначенный для устойчивой аппроксимации решения уравнения (1) с нерегулярной гладкой частью в условиях погрешностей.

2. Считаем, что вместо операторов F_1, F_2 доступны лишь их приближения $\widetilde F_1, \widetilde F_2: H_1\to H_2$ такие, что для всех $x\in\Omega_R(x^*)$ выполняется

$$\|\widetilde F_1(x)-F_1(x)\|\le\delta, \quad \|\widetilde F_1'(x)-F_1'(x)\|\le\delta; \quad \|\widetilde F_2(x)-F_2(x)\|\le\delta. \tag{5}$$

Кроме того, предполагаем, что приближения $\widetilde F_1$, $\widetilde F_2$ удовлетворяют условиям (2), (3) с теми же константами N_1, N_2, L.

Зафиксируем конечномерное подпространство $M \subset H_1$ и будем предполагать выполненным следующее основное

Условие А. Имеет место соотношение $N(F_1'(x^*)) \cap M = \{0\}$, где $N(F_1'(x^*))$ есть нулевое подпространство оператора $F_1'(x^*)$.

Замечание. Отметим, в частности, что $M = M_n$, $\rho = \rho_n$, $\Delta = \Delta_n$ и т. д., где n — размерность пространства. Вообще говоря, эффективный выбор подпространства M не очевиден.

Обозначим через P_M оператор ортогонального проектирования из H_1 на M и положим $\Delta = \|x^* - P_M x^*\|$. Величина Δ имеет смысл погрешности аппроксимации искомого решения x^* подпространством M. Через $\sigma(A)$ обозначим спектр линейного оператора A. В силу условия А оператор $P_M F_1'^*(x^*) F_1'(x^*) P_M$, действующий из M в M, положительно определен, так что

$$\rho = \inf\{\lambda : \lambda \in \sigma(P_M F_1'^*(x^*) F_1'(x^*) P_M)\} > 0.$$

Известна

Лемма ([3], гл. 5, § 2; [7]). *Пусть выполняются условия*

$$\delta < \rho/2, \quad \|x - x^*\| < \min\left\{\frac{\rho - 2\delta}{4N_1N_2}, R\right\}. \tag{6}$$

Тогда

$$\inf\{\lambda : \lambda \in \sigma(P_M \widetilde{F}_1'^*(x) \widetilde{F}_1'(x) P_M)\} \geq \rho/2. \tag{7}$$

Рассмотрим итерационный процесс

$$x_0 \in M, \quad x_{n+1} = x_n - \gamma P_M \widetilde{F}_1'^*(x_n) \widetilde{F}(x_n) \quad (\gamma > 0). \tag{8}$$

Исследованию аппроксимационных свойств итераций (8) предпошлем анализ оператора

$$\Phi(x) = x - \gamma P_M \widetilde{F}_1'^*(x) \widetilde{F}(x), \tag{9}$$

рассматриваемого как отображение из M в M. Вначале покажем, что при определенных условиях оператор (9) является сжимающим на некотором шаре $\Omega_r(P_M x^*) \cap M$. Через E в дальнейшем обозначается единичный оператор. Для любых $x, y \in \Omega_r(P_M x^*) \cap M$, $r > 0$, имеем

$$\begin{aligned}\Phi(x) - \Phi(y) = (E - \gamma P_M \widetilde{F}_1'^*(x) \widetilde{F}_1'(x) P_M)(x - y) - \gamma P_M \widetilde{F}_1'^*(x)(\widetilde{F}_1(x) - \widetilde{F}_1(y) - \widetilde{F}_1'(x)(x - y)) -\\ -\gamma P_M[(\widetilde{F}_1'^*(x) - \widetilde{F}_1'^*(y))(\widetilde{F}_1(y) + \widetilde{F}_2(x)) + \widetilde{F}_1'^*(y)(\widetilde{F}_2(x) - \widetilde{F}_2(y))].\end{aligned} \tag{10}$$

Оценим отдельные слагаемые в правой части равенства (10). Нетрудно видеть, что при выполнении условий

$$\delta \leq \frac{\rho}{4}, \quad \Delta \leq \frac{1}{2}\min\left\{\frac{\rho}{8N_1N_2}, R\right\}, \quad r \leq \frac{1}{2}\min\left\{\frac{\rho}{8N_1N_2}, R\right\} \tag{11}$$

оба соотношения в (6) выполняются для всех точек $x \in \Omega_r(P_M x^*) \cap M$, поэтому в силу (7)

$$\begin{aligned}\|E - \gamma P_M \widetilde{F}_1'^*(x) \widetilde{F}_1'(x) P_M\| = \sup\{|1 - \gamma\lambda| : \lambda \in \sigma(P_M \widetilde{F}_1'^*(x) \widetilde{F}_1'(x) P_M)\} \leq\\ \leq 1 - \gamma\rho/2, \quad 0 < \gamma < 4/(\rho + 2N_1^2).\end{aligned} \tag{12}$$

Условия (11) гарантируют включение $\Omega_r(P_M x^*) \cap M \subset \Omega_R(x^*)$ и справедливость оценок (2) для всех точек $x \in \Omega_r(P_M x^*) \cap M$. Из (2) следует ([8], с. 483)

$$\|P_M \widetilde{F}_1'^*(x)(\widetilde{F}_1(x) - \widetilde{F}_1(y) - \widetilde{F}_1'(x)(x - y))\| \leq N_1N_2\|x - y\|^2. \tag{13}$$

Кроме того, с учетом (3), (5) имеем

$$\|\widetilde{F}(y)\| \le \|F(y)\| + 2\delta \le \|F(y) - F(P_M x^*)\| + \|F(P_M x^*) - F(x^*)\| + 2\delta \le (N_1 + L)(r + \Delta) + 2\delta. \tag{14}$$

Согласно (14)

$$\|P_M(\widetilde{F}_1'^*(x) - \widetilde{F}_1'^*(y))(\widetilde{F}_1(y) + \widetilde{F}_2(x))\| \le N_2\|x - y\|(\|\widetilde{F}(y)\| + \|\widetilde{F}_2(x) - \widetilde{F}_2(y)\|) \le$$
$$\le N_2\|x - y\|[(N_1 + L)(r + \Delta) + 2\delta + L\|x - y\|]. \tag{15}$$

Наконец, согласно (2), (3)

$$\|\widetilde{F}_1'^*(y)(\widetilde{F}_2(x) - \widetilde{F}_2(y))\| \le N_1 L\|x - y\|. \tag{16}$$

Используя (10) и оценки (12), (13), (15), (16), получаем

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \le (1 - \gamma[\rho/2 - 3rN_2(N_1 + L) - (2N_2\delta + N_2(N_1 + L)\Delta) - N_1 L])\|x - y\|. \tag{17}$$

Из (17) следует, что при выполнении условий

$$r \le \frac{\rho}{36N_2(N_1 + L)}, \quad 2N_2\delta + N_2(N_1 + L)\Delta \le \frac{\rho}{12}, \quad L \le \frac{\rho}{12N_1} \tag{18}$$

для любого $0 < \gamma < 4/(\rho + 2N_1^2)$ будем иметь

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \le (1 - \gamma\rho/4)\|x - y\| \quad \forall x, y \in \Omega_r(P_M x^*) \cap M. \tag{19}$$

Таким образом, оператор Φ оказывается сжимающим на $\Omega_r(P_M x^*) \cap M$.

На основании (19) покажем, что если погрешности δ, Δ достаточно малы, так что

$$N_1(2\delta + (N_1 + L)\Delta) \le \frac{\rho r}{4}, \tag{20}$$

то оператор Φ отображает шар $\Omega_r(P_M x^*)$ пространства M в себя. С этой целью определим отображение

$$\widetilde{\Phi}(x) = \Phi(x) + \gamma P_M \widetilde{F}_1'^*(P_M x^*)\widetilde{F}(P_M x^*), \quad x \in M. \tag{21}$$

При выполнении сделанных ранее предположений оператор $\widetilde{\Phi}$ наряду с Φ обладает свойством (19). Следовательно, для любого $x \in \Omega_r(P_M x^*) \cap M$ имеем

$$\|\Phi(x) - P_M x^*\| \le \|\widetilde{\Phi}(x) - P_M x^*\| + \gamma\|P_M \widetilde{F}_1'^*(P_M x^*)\widetilde{F}(P_M x^*)\| \le$$
$$\le (1 - \gamma\rho/4)r + \gamma N_1(2\delta + (N_1 + L)\Delta) \le r.$$

На основании принципа сжимающих отображений ([8], с. 75) заключаем, что для определяемой по правилу (8) последовательности $\{x_n\}$ справедлива оценка

$$\|x_n - \overline{x}^*\| \le q^n(1 - q)^{-1}\|x_0 - x_1\|, \tag{22}$$

где $q = 1 - \gamma\rho/4$, $\overline{x}^*$ — единственная неподвижная точка отображения Φ в шаре $\Omega_r(P_M x^*) \cap M$, т. е.

$$\Phi(\overline{x}^*) = \overline{x}^*. \tag{23}$$

Оценим величину $\|\overline{x}^* - P_M x^*\|$. Из (21), (23) и равенства $\widetilde{\Phi}(P_M x^*) = P_M x^*$ получаем

$$\|\overline{x}^* - P_M x^*\| = \|\Phi(\overline{x}^*) - \widetilde{\Phi}(P_M x^*)\| \le$$
$$\le \|\Phi(\overline{x}^*) - \Phi(P_M x^*)\| + \gamma\|P_M \widetilde{F}_1'^*(P_M x^*)\widetilde{F}(P_M x^*)\| \le$$
$$\le (1 - \gamma\rho/4)\|\overline{x}^* - P_M x^*\| + \gamma N_1(2\delta + (N_1 + L)\Delta).$$

Отсюда следует

$$\|\overline{x}^* - P_M x^*\| \le 4N_1(2\delta + (N_1 + L)\Delta)\rho^{-1}. \tag{24}$$

Объединяя (22), (24), окончательно приходим к следующему утверждению о поведении итераций (8).

Теорема. *Пусть выполняется условие* A, *соотношения* (11), (18), (20). *Тогда при любом выборе начальной точки* $x_0 \in \Omega_r(P_M x^*) \cap M$ *и шага* $\gamma \in (0, 4/(\rho + 2N_1^2))$ *справедлива оценка*

$$\|x_n - x^*\| \le q^n(1-q)^{-1}\|x_1 - x_0\| + 4N_1(2\delta + (N_1 + L)\Delta)\rho^{-1} + \Delta \tag{25}$$

и предельное соотношение

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \|x_n - x^*\| \le 4N_1(2\delta + (N_1 + L)\Delta)\rho^{-1} + \Delta. \tag{26}$$

Замечание. Условие $x_0 \in \Omega_r(P_M x^*) \cap M$ выполняется, если $x_0 \in \Omega_{r_0(\Delta)}(x^*) \cap M$, где $r_0(\Delta) = \sqrt{r^2 + \Delta^2}$.

3. Обсудим вкратце полученный результат. Соотношение (26) означает, что приближения $\{x_n\}$ при $n \to \infty$ стабилизируются в окрестности решения x^*, радиус которой пропорционален суммарной погрешности $\delta + \Delta$. Оценка (25) совпадает по порядку с оценкой из ([3], гл. 5, § 2; [7]), относящейся к гладкому случаю с $F_2(x) \equiv 0$. В отличие от методов итеративной регуляризации ([2], гл. 5; [3], гл. 4), аппроксимационные свойства которых обеспечиваются остановом итераций на подходящем шаге, процесс (8) не требует сопровождения в виде критерия останова. Сходимость процесса (8) носит локальный характер — третье условие в (11) и первое неравенство в (18) определяют необходимую степень близости начального приближения к решению. В этом отношении он подобен схеме (4) и методам типа Ньютона–Канторовича для гладких уравнений с регулярным оператором, которые также обладают лишь локальной сходимостью. Третье условие в (18) есть по существу требование малости негладкой составляющей $F_2(x)$ по сравнению с гладкой компонентой $F_1(x)$. В случае $\delta = \Delta = 0$ условие малости константы Липшица в (18) и оценка скорости сходимости (25) аналогичны соответствующим утверждениям для процесса (4) в применении к уравнению (1) с регулярной гладкой частью ([1], с. 150; [5]). В то же время реализация шага процесса (8) не предполагает обращение оператора и представляется менее трудоемкой.

Условие A автоматически выполняется, если оператор $F_1'(x^*)$ инъективен. В ряде практически интересных случаев, к числу которых относятся различные постановки обратных задач акустического рассеяния, этот факт может быть установлен непосредственно ([9], с. 129; [10]). Вариация подпространства M доставляет дополнительные возможности по обеспечению выполнения условия A.

Условия теоремы существенно упрощаются, если оператор $F_1(x)$ является аффинным, т. е. $F_1(x) = Ax - b$. В этом случае можно положить $N_1 = \|A\|$, $N_2 = 0$, и из условий теоремы нетривиальными остаются лишь (20) и соотношения $\delta \le \rho/4$, $\Delta \le R/2$, $r < R/2$, $L \le \rho/(12N_1)$.

Литература

1. Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рутицкий Я.Б., Стеценко В.Я. *Приближенное решение операторных уравнений.* – М.: Наука, 1969. – 456 с.
2. Bakushinsky A., Goncharsky A. *Ill-posed problems: theory and applications.* – Dordrecht: Kluwer, 1994. – 256 p.
3. Бакушинский А.Б., Кокурин М.Ю. *Итерационные методы решения некорректных операторных уравнений с гладкими операторами.* – М.: Эдиториал УРСС, 2002. – 192 с.
4. Zabrejko P.P., Nguen D.F. *The majorant method in the theory of Newton–Kantorovich approximations and the Ptak error estimates* // Numerical Functional Analysis and Optimization. – 1987. – V. 9. – № 5–6. – P. 671–684.

5. Jiang H., Qi L. *Local uniqueness and convergence of iterative methods for nonsmooth variational inequalities* // J. Math. Anal. and Appl. – 1995. – V. 196. – P. 314–331.
6. Забрейко П.П., Кошелев А.И., Красносельский М.А., Михлин С.Г., Раковщик Л.С., Стеценко В.Я. *Интегральные уравнения.* – М.: Наука, 1968. – 448 с.
7. Бакушинский А.Б., Кокурин М.Ю., Юсупова Н.А. *Об итеративных методах градиентного типа для решения нелинейных некорректных уравнений* // Сиб. журн. вычисл. матем. – 2001. – № 4. – С. 317–329.
8. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа.* – 5-е изд. – М.: Наука, 1976. – 544 с.
9. Colton D., Kress R. *Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory.* Second Edition. – Berlin: Springer, 1998. – 334 p.
10. Hohage T. *On the numerical solution of a three-dimensional inverse medium scattering problem* // Inverse Problems. – 2001. – V. 17. – P. 1743–1763.

Марийский государственный университет

Поступила
20.09.2002