ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 3 (430)

УДК 517.958

Р.Р. ШАГИДУЛЛИН

МИНИМИЗАЦИЯ ФУНКЦИОНАЛА ПОЛНОЙ ЭНЕРГИИ ДЛЯ МЯГКОЙ ОБОЛОЧКИ

1. Введение

В статье на примере мягкой оболочки, удовлетворяющей физическим соотношениям закона Муни, предлагается новый, основанный на геометрических идеях Нэша, подход к исследованию последовательности деформаций, минимизирующей функционал полной энергии оболочки.

Кратко опишем построение функционала полной энергии для однородной изотропной мягкой оболочки в рамках модели, изложенной в [1].

Физические соотношения для однородной изотропной мягкой оболочки в терминах главных усилий T_1, T_2 и степеней удлинений λ_1, λ_2 всюду имеют вид (см. [1])

$$\begin{aligned} T_1(\lambda_1,\lambda_2) &= \varphi_0(\lambda_1,\lambda_2) + \lambda_1\varphi_1(\lambda_1,\lambda_2),\\ T_2(\lambda_1,\lambda_2) &= \varphi_0(\lambda_1,\lambda_2) + \lambda_2\varphi_1(\lambda_1,\lambda_2). \end{aligned} \tag{1}$$

Специфика мягкой оболочки сказывается в ограничениях, накладываемых на функции φ_0, φ_1:

1) функции φ_0, φ_1 заданы и непрерывны в некоторой области
$$\Omega \subseteq \{(\lambda_1 \ge 1\,\&\lambda_2 > 0) \cup (\lambda_1 > 0\,\&\lambda_2 \ge 1)\};$$
2) функции $\varphi_0 + \lambda_i\varphi_1$, $i = 1, 2$, неотрицательны;
3) если $\lambda_i > 1$ при $i = 1$ или $i = 2$, то соответствующее $T_i > 0$;
4) если $\lambda_1 \le 1$ и $\lambda_2 \le 1$, то $T_1 = T_2 = 0$.

Удельная потенциальная энергия деформированной оболочки $э$ есть величина, вариация которой равна элементарной работе внешних сил, отнесенная к единице площади отсчетной конфигурации. Условием ее существования является (см. [1]) наличие следующего тождества:

$$\frac{\partial}{\partial\lambda_2}(\lambda_2\varphi_0 + \lambda_1\lambda_2\varphi_1) = \frac{\partial}{\partial\lambda_1}(\lambda_1\varphi_0 + \lambda_1\lambda_2\varphi_1). \tag{2}$$

В литературе, посвященной расчетам мягких оболочек, выбор φ_0, φ_1 продиктован особенностями материала, а зачастую и методов решения, и вид их весьма разнообразен. В монографиях [2], [3] наиболее сложная зависимость представлена законом Муни

$$\begin{aligned} T_1 &= (\lambda_1^4\lambda_2^2 - 1)(1 + c\lambda_2^2)/\lambda_1^3\lambda_2^3,\\ T^2 &= (\lambda_2^4\lambda_1^2 - 1)(1 + c\lambda_1^2)/\lambda_1^3\lambda_2^3. \end{aligned} \tag{3}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 95-01-00400).

Здесь $\varphi_0 = \lambda_1^4\lambda_2^4 - 1 - c(\lambda_1^2+\lambda_2^2) - \lambda_1^3\lambda_2^3 - c\lambda_1\lambda_2$, $\varphi_1 = \lambda_1^2\lambda_2^2(\lambda_1+\lambda_2) + c(\lambda_1+\lambda_2)$, условие (2) имеет место, и

$$э(\lambda) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + c\left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2}\right) + \frac{1}{\lambda_1^2\lambda_2^2} + c\lambda_1^2\lambda_2^2.$$

Область определения функции $э(\lambda)$ $\overline{\Omega} = \{(\lambda_1,\lambda_2) : \lambda_1^2\lambda_2 \geq 1, \quad \lambda_2^2\lambda_1 \geq 1\}$.. Выполнение всех условий 1)–4) на $\overline{\Omega}$ проверяется просто.

В данной работе развивается схема исследования проблемы минимизации функционала полной энергии для мягкой оболочки с закрепленной границей при физических соотношениях (3). Для простоты изложения будем считать, что первоначальная ("раскройная") форма мягкой оболочки ненапряженная, плоская и даже представляет прямоугольник S_0: $0 \leq x_1 \leq a$, $0 \leq x_2 \leq b$ на плоскости переменных x_1, x_2, которые и примем за лагранжевы координаты частиц оболочки. По границе этого прямоугольника оболочка закреплена. Деформированная форма оболочки задается как поверхность $R(x)$, $R(x)$ – радиус-вектор частицы x с координатами $x = (x_1, x_2)$, $R(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x))$. Условием того, что вектор-функция $R(x)$ определяет поверхность, примем невырожденность первой квадратичной формы $g(R(x))$, построенной по $R(x)$: $g_{ij} = \partial_i R \cdot \partial_j R$. Относительно внешних сил, действующих на оболочку, предположим, что они обладают потенциалом, и полная потенциальная энергия их непрерывна в метрике $C(S_0)$. Это условие выполняется, например, если внешние силы заморожены, т.е. их поверхностная плотность не меняется при деформации оболочки. Поэтому вклад этих сил в полную энергию деформированной оболочки задается линейным функционалом $L(R(x)) = \int\limits_{S_0} f(x)\cdot R(x)dx$ от определяющей деформацию вектор-функции $R(x)$ ([4], сс. 115, 386, 396). Полная энергия оболочки представляется следующим функционалом:

$$I(R(x)) = \int_{S_0} [\lambda_1^2(x) + \lambda_2^2(x) + c(\lambda_1^{-2}(x) + \lambda_2^{-2}(x) + \lambda_1^{-2}(x)\lambda_2^{-2}(x) + c\lambda_1^2(x)\lambda_2^2(x)]dx + L(R). \quad (4)$$

Здесь $\lambda_1(x)$, $\lambda_2(x)$ — главные значения степени удлинения, вызываемой деформацией $R(x)$. Первый интеграл в (4) обозначим через $I_1(R(x))$. Условимся относительно дальнейших обозначений: знак $\|\cdot\|$ будет означать норму в подходящем пространстве, символ которого в случае необходимости будет записываться как индекс при $\|\cdot\|$. При записи скалярного или матричного произведений употребляется точка. Два рядом стоящих вектора будут означать диаду или тензорное произведение.

Функционал (4) исследуется в пространстве вектор-функций $R(x) \in [W_4^1(S_0)]^3 \equiv \mathbf{W}$. Векторная функция $f(x)$ принадлежит $[L_2(S_0)]^3 \equiv \mathbf{L}$.

2. Вспомогательные результаты

Лемма 1. *Множество V положительных симметричных матриц A второго порядка, собственные числа которых Λ_1, Λ_2 удовлетворяют условию $\Lambda_1^2\Lambda_2 \geq 1$, $\Lambda_2^2\Lambda_1 \geq 1$, выпукло.*

Доказательство. Пусть A_1 и A_2 — матрицы из V и A — их выпуклая комбинация $A = \alpha A_1 + \overline{\alpha}A_2$, $0 \leq \alpha \leq 1$, $\overline{\alpha} = 1 - \alpha$. В силу нашего соглашения $\Lambda_2 \leq \Lambda_1$, и потому достаточно проверить наличие неравенства

$$\Lambda_2^2()\Lambda_1(A) \geq 1. \quad (5)$$

Используем выпуклость $\Lambda_1(A)$ и вогнутость $\Lambda_2(A)$ на множестве положительных матриц (более общий результат Лакса см. в [5], с. 485). Имеем

$$\Lambda_2(\alpha A_1 + \overline{\alpha}A_2) \geq \alpha\Lambda_2(A_1) + \overline{\alpha}\Lambda_2(A_2) \geq \frac{\alpha}{\det(A_1)} + \frac{\overline{\alpha}}{\det(A_2)} \geq \frac{1}{\det^{\alpha}(A_1)}\,\frac{1}{\det^{\overline{\alpha}}(A_2)}. \quad (6)$$

Здесь последовательно использовали равенство $\Lambda_1(A)\Lambda_2(A) = \det(A)$, исходные неравенства (5) для A_1, A_2 и известное числовое неравенство Гёльдера $\alpha x + \overline{\alpha} y \geq x^\alpha y^{\overline{\alpha}}$, $x > 0$, $y > 0$.

Далее воспользуемся вогнутостью функции $\ln(\det(A))$ ([5], с. 480) на множестве положительно полуопределенных матриц

$$\det(\alpha A_1 + \overline{\alpha} A_2) \geq \det{}^{\alpha}(A_1) \det{}^{\overline{\alpha}}(A_2). \tag{7}$$

Из неравенств (6) и (7) следует

$$\Lambda_2(\alpha A_1 + \overline{\alpha} A_2) \geq 1/\det(\alpha A_1 + \overline{\alpha} A_2).$$

Это равносильно выполнению (5) для $\alpha A_1 + \overline{\alpha} A_2$. $\square$

Обозначим через $\mathbf{V}$ множество матричных функций, элементы которых принадлежат $L_2(S_0)$ и значения которых почти для всех $x \in S_0$ суть матрицы из V. Рассмотрим, как связывается множество $\mathbf{V}$ с функционалом полной энергии (4).

Деформацию оболочки характеризует тензорное поле $\overset{\circ}{\nabla} R(x) = e_1 R_1(x) + e_2 R_2(x)$. Здесь e_1, e_2 — единичные орты осей x_1, x_2, $R_i(x) = \partial_i R(x)$, $i = 1, 2$. Тензор $\overset{\circ}{\nabla} R$ однозначно определяется матрицей $\nabla \varphi = \|\partial_i \varphi_j\|$; $i = 1, 2$, $j = 1, 2, 3$. Известно (см., напр., [1]), что функции $\lambda_1(x)$ и $\lambda_2(x)$ являются при фиксированном x ненулевыми собственными числами тензора искажения $V(x)$ из ортогонального разложения $\overset{\circ}{\nabla} R(x) = O(x) \cdot V(x)$. Всюду в статье собственные числа нумеруются в порядке убывания, а символы i_1, i_2, i_3 будут обозначать инварианты матрицы.

Приведение тензора $V(x)$ на касательную к поверхности $R(x)$ в точке x плоскость E_2 будем обозначать через $V_2(x)$. В пространстве $E_2(x)$, определяемом векторами $R_1(x)$, $R_2(x)$, имеет место представление

$$V_2^2(x) = R_1(x) R_1(x) + R_2(x) R_2(x). \tag{8}$$

Если рассмотрим V_2^2 как трехмерный тензор, считая в его представлении $R_1(x)$, $R_2(x)$ трехмерными векторами в E_3, то его след не изменится, поскольку третье собственное число равно нулю. Трехмерное представление $V_2^2(x)$ в исходном ортонормированном базисе e_1, e_2, e_3 имеет вид

$$\sum_{i,j=1}^{3} (\partial_1 \varphi_i \partial_1 \varphi_j + \partial_2 \varphi_i \partial_2 \varphi_j) e_i e_j = \sum_{i,j=1}^{3} (\overset{2}{\nabla} \varphi_i \cdot \overset{\circ}{\nabla} \varphi_j) e_i e_j; \quad \overset{2}{\nabla} = (\partial_1, \partial_2).$$

Следовательно,

$$\|V_2\|^2 = \sum_{i=1}^{3} \|\overset{2}{\nabla} \varphi_i\|^2 = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} (\partial_j \varphi_i)^2 = \sum_{j=1}^{2} \sum_{i=1}^{3} (\partial_j \varphi_i)^2 = |R_1|^2 + |R_2|^2. \tag{9}$$

Пусть g — матрица первой квадратичной формы поверхности $R(x)$, $x \in S_0 : g = (g_{ij})$, $g_{ij} = R_i \cdot R_j$, $i = 1, 2$, а $R^1(x)$, $R^2(x)$ — контравариантный базис в двумерном римановом пространстве, определяемом этой метрикой на поверхности. Из формулы (8) получаем

$$V_2^2(x) = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}(x) R^i(x) R_j(x). \tag{10}$$

Поскольку собственные числа тензора определяются матрицей его смешанных компонент, из (10) следует, что собственные числа матрицы первой квадратичной формы суть $\lambda_1^2(x)$, $\lambda_2^2(x)$; λ_1, λ_2 — главные значения степени удлинения при деформации $R(x)$, а сами элементы матрицы $g(x)$ суть смешанные компоненты тензора $V_2^2(x)$.

Сделаем выводы. Удельную потенциальную энергию $э$ мягкой оболочки можно считать функцией от $\sqrt{g(x)}$ или $g(x)$ — матрицы первой квадратичной формы поверхности $R(x)$. При этом $\lambda_1^2 = \Lambda_1$, $\lambda_2^2 = \Lambda_2$, где Λ_1, Λ_2 — собственные числа $g(x)$. Из (9), (10) следует

$$\Lambda_1 + \Lambda_2 = |R_1|^2 + |R_2|^2 = \|\sqrt{g}\|^2. \tag{11}$$

Соответственно, множество $\mathbf{V}$ можно интерпретировать как множество, содержащее в себе матричные функции $g(R(x)) = \nabla\varphi(x) \cdot \nabla\varphi^T(x)$, соответствующие всевозможным допустимым деформациям $R(x)$. Через $\mathbf{V}_M$ обозначим выпуклое подмножество множества $\mathbf{V}$, состоящее из матричных функций, чьи собственные числа почти всюду не превосходят M.

Лемма 2. *Пусть $c > 0$, тогда функция удельной потенциальной энергии как функция от первой квадратичной формы $э = э(g)$ монотонна на множестве V, т.е. $g_1 > g_2$ $g_1, g_2 \in V \Longrightarrow э(g_1) > э(g_2)$. Для каждого M существует такая константа c_M, что при $c \le c_M$ функция $I_1(g) = \int\limits_{S_0} э(g(x))dx$ выпукла на множестве $\mathbf{V}_M$ и полунепрерывна снизу. Последнее утверждение остается справедливым при любом c, если $M \le \sqrt[6]{4}$.*

Доказательство. Известно, что $g_1(x) > g_2(x)$ влечет $\Lambda_1(g_1(x)) > \Lambda_1(g_2(x))$ и $\Lambda_2(g_1(x)) > \Lambda_2(g_2(x))$ ([5], с. 480). Следовательно, необходимо убедиться лишь в строгой монотонности функции $э(\Lambda_1, \Lambda_2) = \Lambda_1 + \Lambda_2 + c(\Lambda_1^{-1} + \Lambda_2^{-1}) + \Lambda_1^{-1}\Lambda_2^{-1} + c\Lambda_1\Lambda_2$ на множестве $\{(\Lambda_1, \Lambda_2) : \Lambda_1\Lambda_2^2 \ge 1,\ \ \Lambda_2\Lambda_1^2 \ge 1\}$. Но первая производная представляется в виде $\partial_1 э(\Lambda_1, \Lambda_2) = (1 - \Lambda_1^{-2}\Lambda_2^{-1}) + c\Lambda_2(1 - \Lambda_1^{-2}\Lambda_2^{-1})$. Аналогично вычисляется производная $\partial_2 э(\Lambda_1, \Lambda_2)$. Анализ полученных выражений и доказывает первую часть леммы. Для доказательства второй части используем следующий результат Томпсона и Фрида ([4], с. 206): пусть задана симметрическая выпуклая функция $\Phi : [0, +\infty)^2 \to \mathbf{R}$, которая является функцией, неубывающей по каждому аргументу. Тогда функция $W : A \in M^2 \to W(A) = \Phi(\sigma_1(A), \sigma_2(A))$ выпукла. Здесь M^2 — множество квадратных матриц второго порядка; σ_1, σ_2 — сингулярные числа матрицы.

Из доказательства, приведенного в ([4], с. 206–209), следует, что этот результат остается справедливым, если Φ рассматривается на замкнутом выпуклом подмножестве. Проверим условия, накладываемые на Φ для нашей функции $э(\Lambda) = \Phi_1(\Lambda) + c\Phi_2(\Lambda)$, где

$$\Phi_1(\Lambda) = \Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_1^{-1}\Lambda_2^{-1}, \quad \Phi_2(\Lambda) = \Lambda_1^{-1} + \Lambda_2^{-1} + \Lambda_1\Lambda_2.$$

Матрицы

$$\begin{pmatrix} 2\Lambda_1^{-3}\Lambda_2^{-1} & \Lambda_1^{-2}\Lambda_2^{-2} \\ \Lambda_1^{-2}\Lambda_2^{-2} & 2\Lambda_2^{-3}\Lambda_1^{-1} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2\Lambda_1^{-3} & 1 \\ 1 & 2\Lambda_2^{-3} \end{pmatrix}$$

вторых производных для Φ_1 и Φ_2 являются, как легко видеть, положительно определенными на множестве $\{\Lambda_1, \Lambda_2) : \Lambda_1\Lambda_2^2 \ge 1,\ \ \Lambda_2\Lambda_1^2 \ge 1,\ \ \Lambda_1^3\Lambda_2^3 \le 4\}$.

Итак, условие выпуклости функции $э$ выполняется, если $M \le \sqrt[6]{4}$.

Рассмотрим другое представление $э = \Phi_1 + \Phi_2$,

$$\Phi_1(\Lambda) = \Lambda_1 + \Lambda_2 + c(\Lambda_1^{-1} + \Lambda_2^{-1}), \quad \Phi_2(\Lambda) = \Lambda_1^{-1}\Lambda_2^{-1} + c\Lambda_1\Lambda_2.$$

Выпуклость Φ_1 проверяется просто. Для Φ_2 матрица вторых производных имеет вид

$$\begin{pmatrix} 2\Lambda_1^{-3}\Lambda_2^{-1} & c + \Lambda_1^{-2}\Lambda_2^{-2} \\ c + \Lambda_1^{-2}\Lambda_2^{-2} & 2\Lambda_2^{-3}\Lambda_1^{-1} \end{pmatrix}.$$

При $c \le M^{-4}$ определитель этой матрицы неотрицателен. Для рассматриваемых случаев условия теоремы Томпсона, Фрида выполнены, и потому $э$ выпукла по g, когда g меняется на V_M. Слабая полунепрерывность снизу функционала $I_1(g)$ следует из доказанной выпуклости $э$ и сильной непрерывности $I_1(g)$ в пространстве $\mathbf{L} \cap \mathbf{V}_M$. $\square$

Лемма 3. *Пусть $g \in \mathbf{V}_M$, $R(x) \in \mathbf{W}$, $g(x) \geq g(R(x)) > 0$ п.в. Существует вектор-функция $\widetilde{R}(x)$ со свойствами*

$$g(\widetilde{R}(x)) \in \mathbf{V}, \quad \|g(x) - g(\widetilde{R}(x))\|_{\mathbf{L}} \leq \varepsilon, \quad \|R(x) - \widetilde{R}(x)\|_{C(S_0)} \leq \varepsilon,$$

где ε — наперед заданное положительное число. Аналогичное утверждение справедливо, если вместо $\mathbf{V}$ взять $\mathbf{V}_M$.

Доказательство. Рассмотрим вектор-функцию $R_0(x) = x = (x_1, x_2, 0)$, $x_1, x_2 \in S_0$. Функция перемещений $u(x) = R(x) - R_0(x)$ принадлежит пространству $[\overset{\circ}{W}{}_4^1]^3$. Выбираем функцию $u_H(x)$, бесконечно дифференцируемую, с носителем, лежащим строго внутри S_0, с точностью до ε аппроксимирующую $u(x)$: $\|u - u_H\|_{\mathbf{W}} \leq \varepsilon_1$. В качестве $R_H(x)$ выберем $R_0(x) + u_H(x)$ Существует такое $\delta > 0$, что $R_H(x) = x$ в приграничной полосе S_δ ширины δ. Выбор ε_1, δ определится в дальнейших рассуждениях.

Будем строить матричную функцию $g_H(X)$ по шагам, стремясь подчинить получаемые на каждом шаге матрицы $\widetilde{g}(x)$ следующим условиям:

$$\widetilde{g}(x) \in \mathbf{V}, \tag{12.1}$$

$$\|g - \widetilde{g}\|_{\mathbf{L}} \leq \varepsilon_2, \tag{12.2}$$

$$\widetilde{g}(x) \geq g(R_H(x)). \tag{12.3}$$

На первом шаге вводим матрицу $g_1(x) = g(R_H) + (g - g(R))$. Условию (12.3) $g_1(x)$ удовлетворяет. Выполняется также (12.2) подходящим выбором ε_1, что следует из очевидных оценок (компоненты вектор-функции $R(x)$ обозначены через $\varphi_i(x)$, $i = 1, 2, 3$)

$$\int_{S_0} |g_{pq}(R) - g_{pq}(R_H)|^2 dx \leq \int_{S_0} \sum_{i=1}^{3} |\partial_p\varphi_i\partial_q\varphi_i - \partial_p\varphi_{Hi}\partial_q\varphi_i + \partial_p\varphi_{Hi}\partial_q\varphi_i - \partial_p\varphi_{Hi}\partial_q\varphi_{Hi}|^2 dx \leq$$
$$\leq 4\int_{S_0} \sum_{i=1}^{3} (\partial_q\varphi_i)^4 dx \int_{S_0} \sum_{i=1}^{3} (\partial_p\varphi_i - \partial_p\varphi_{Hi})^4 dx +$$
$$+ 4\int_{S_0} \sum_{i=1}^{3} (\partial_p\varphi_{Hi})^4 dx \int_{S_0} \sum_{i=1}^{3} (\partial_q\varphi_i - \partial_q\varphi_{Hi})^4 dx, \quad p, q = 1, 2.$$

На втором шаге переходим к выполнению условия (12.1). Сравним собственные числа матриц $g_1(x)$ и $g(x)$. Имеем

$$\int_{S_0} |\Lambda_i(g(x)) - \Lambda_i(g_1(x))|^2 dx \leq \varepsilon_3.$$

При этом $\varepsilon_3 \to 0$, когда $\varepsilon_2 \to 0$. Рассмотрим ортогональное приведение матричной функции $g_1(x)$ к диагональному виду $g_1(x) = O(x) \cdot d(x) \cdot O^T(x)$. В этом представлении заменим диагональные элементы $d(x)$ (собственные числа $g_1(x)$) новыми по формуле

$$\Lambda_1'(x) = \max(\Lambda_1(g(x)), \Lambda_1(g_1(x))), \quad \Lambda_2'(x) = \max(\Lambda_2(g(x)), \Lambda_2(g_1(x))).$$

Легко проверяется, что $\Lambda_1'(x) \geq \Lambda_2'(x)$, $\Lambda_1'(x)\Lambda_2'^2(x) \geq 1$ п.в.

Поскольку

$$\int_{S_0} |\Lambda_i(g(x)) - \Lambda_i(g_1'(x))|^2 dx \leq \int_{S_0} |\Lambda_i(g(x)) - \Lambda_i(g_1(x))|^2 dx,$$

то по спектральной норме, а следовательно, и по евклидовой норме $g_1'(x)$ при $\varepsilon_2 \to 0$ отличается от $g(x)$ произвольно мало в среднем. Здесь $g_1'(x)$ обозначает матрицу, полученную из $g_1(x)$ указанной заменой $d(x)$, она удовлетворяет всем условиям (12). Как видно из построения $g_1'(x)$, изменяя значения $g_1'(x)$ на множестве сколь угодно малой меры, получаем матричную функцию $g_2(x)$, удовлетворяющую требованиям (12), из класса $[L_\infty(S_0)]^3$, т.е. $|(g_2)_{ij}(x)| \le M_1$ для всех $x \in S_0$, где M_1 — положительная константа.

Делаем третий шаг. Выберем такое открытое множество S_{δ_1} сколь угодно малой меры δ_1, что вне его (на замкнутом множестве $S_0 \setminus S_{\delta_1}$) $g_2(x)$ непрерывна. Переходим к непрерывному продолжению g_2 на всё S_0 с соблюдением условий (12).

Пусть $b(x) = \sqrt{g(R_H(x))}$. Имеем неравенство $a(x) = b^{-1}(x)g_2(x)b^{-1}(x) \ge I$, где I — единичная матрица, а функция $a(x)$ непрерывна на $S_0 \setminus S_{\delta_1}$, и $|a_{ij}(x)| \le M_2$ для всех x с известной нам константой M_2. Для того чтобы непрерывное продолжение $a(x)$ по-прежнему удовлетворяло этому неравенству, необходимо и достаточно выполнение условий

$$a_{11}(x) \ge 1, \quad a_{22}(x) \ge 1, \quad (a_{11}(x)-1)(a_{22}(x)-1) - a_{12}^2(x) \ge 0.$$

Пользуясь теоремой Урысона-Титце, сначала непрерывно продолжим $a_1(x)$ и $a_2(x)$ с сохранением неравенств $M_2 \ge a_{ii}(x) \ge 1$, $i = 1,2$, $x \in S_0$, а затем продолжим непрерывно на всё S_0 функцию $a_{12}(x)$ в рамках оценки

$$-\sqrt{(a_{11}(x)-1)(a_{22}(x)-1)} \le a_{12}(x) \le \sqrt{(a_{11}(x)-1)(a_{22}(x)-1)}.$$

Итак, непрерывная матричная функция $a'(x)$, совпадающая с $a(x)$ на $S_0 \setminus S_{\delta_1}$ и удовлетворяющая всюду оценке $a'(x) \ge I$, получена. Для матричной функции $g_2'(x) = b(x)a'(x)b(x)$ имеем непрерывность на всем S_0, и $g_2'(x)$ на всем S_0 мажорирует $g(R(x))$.

Как видно из приведенных рассуждений, еще до выбора S_{δ_1} можем оценить сверху элементы $g_2'(x)$. Введем скалярную функцию $\mu(x)$ при помощи условия

$$\mu(x) = \inf_t \{t : t \ge 1, \ \ \Lambda_1[tg_2']\Lambda_2^2[tg_2'] > 1\}.$$

Легко проверить, что $\mu(x)$ — непрерывная на S_{δ_1} функция с известной верхней оценкой (последняя получается по значениям Λ_1, Λ_2 матрицы $g(R_H(x))$, поскольку $\Lambda_1\Lambda_2^2(g_2'(x)) \ge \Lambda_1\Lambda_2^2(g(R_H(x)))$). На $S_0 \setminus S_{\delta_1}$ $\mu(x) = 1$. Функция $\mu(x)g_2'(x)$, будучи непрерывной, удовлетворяет всем условиям (12) при достаточно малом δ_1. Добавляем к $\mu(x)g_2'(x)$ слагаемое вида $\alpha\delta(x)I$, где $\delta(x)$ — расстояние от точки x до границы S_0 в приграничной полосе S_δ и равно δ в $S_0 \setminus S_\delta$, α — положительное число. Применяя подходящую аппроксимацию, получаем матрицу $g_3(x)$, для которой выполняются условия (12), $g_3(x) \in C^\infty(S_0)$, $g_3(x) > g(R_H(x))$ для всех $x \in S_0$.

Теперь, повторяя дословно технические выкладки из [6], строим новую вектор-функцию $\widetilde{R}(x)$ так, что $g(\widetilde{R}(x)) = g_3(x)$ на $S_0 \setminus S_\delta$, а $g_3(x) \ge g(\widetilde{R}) \ge I$ на S_δ, при этом $\widetilde{R}(x)$ остается в заданной ε_4-окрестности $R_H(x)$ пространства $C(S_0)$. Необходимое условие построения $\widetilde{R}(x)$: $\max ds/ds''^2 \ge 4/3$ (обозначения статьи [6]) — выполняется за счет выбора α. Единственное изменение в доказательстве [6] — каждую n-ую стадию проводим в области $S_0 \setminus S_{\delta_n}$, где S_{δ_n} — приграничная полоса ширины δ_n, $\delta_n \uparrow \delta$. Этим обеспечивается то, что $\widetilde{R}(x)$ удовлетворяет условиям закрепления и непрерывна в $\overline{S}_0$. Функция $\widetilde{R}(x)$ получается искомой при подходящем выборе ε_4, δ. Лемма доказана для множества $\mathbf{V}$; для случая $\mathbf{V}_M$ доказательство проводится аналогично. $\square$

3. Основной результат

Рассмотрим функционал полной энергии $I(R(x)$ на следующем множестве $\mathbf{R}_M$ вектор-функций $R(x)$:

$$R(x) \in [W_4^1(S_0)]^3, \quad R(x) = R_0(x) = x \quad \text{для} \quad x \in \partial S_0, \ \ g(R(x)) \in \mathbf{V}_M.$$

Для произвольной симметричной матричной функции $g(x)$ введем множества $S_2(g) = \{x : x \in S_0, \ \ \Lambda_1\Lambda_2^2(g(x)) > 1\}$, $S_1(g) = \{x : x \in S_0, \ \ \Lambda_1\Lambda_2^2(g(x)) = 1, \ \ \Lambda_1(g(x)) > \Lambda_2(g(x))\}$. Можно условно назвать S_2 зоной двухосного состояния, S_1 — зоной одноосного состояния, соответствующего матричной функции $g(x)$.

Теорема. *Пусть последовательность допустимых (т.е. принадлежащих* $\mathbf{R}_M$*) вектор-функций* $R^1(x), R^2(x), \dots, R^k(x) \dots$ *минимизирует функционал (4) полной энергии мягкой оболочки (в (4) c — достаточно малая положительная константа, или c — произвольная, но достаточно малы допускаемые деформации* $M \leq \sqrt[6]{4}$*). Пусть также* $g^1(x), g^2(x), \dots$ *— соответствующая последовательность матричных функций:* $g^k(x) = g(R^k(x))$, $k = 1, 2, \dots$, $x \in S_0$.

Справедливы следующие утверждения. Рассматриваемые последовательности можно выбрать сходящимися:

$$R^k(x) \rightharpoonup R_m \quad \text{в} \quad \mathbf{W}_2, \qquad g^k(x) \to g_m \quad \text{в} \quad \mathbf{L}_2,$$

где $\mathbf{W}_2 = [W_2^1(S_0)]^3$, $\mathbf{L}_2 = [L_2(S_0)]^3$. *При этом* $g_m(x) \in \mathbf{V}_M$.

Далее, $S_2(g_m) = S_2(g(R_m))$, *и почти всюду на* $S_2(g_m)$ $\Lambda_k(g_m(x)) = \Lambda_k(g(R_m(x)))$, $k = 1, 2$. *Почти всюду на* $S_1(g_m)$ $\Lambda_1(g_m(x)) = \Lambda_1(g(R_m(x)))$.

Доказательство. Легко доказать слабую компактность последовательности $R^k(x) = (\varphi_1^k(x), \varphi_2^k(x), \varphi_3^k(x))$ в подходящем пространстве. Действительно, при предварительном обсуждении инвариантов тензора $\overset{\circ}{\nabla} R$ установили, что

$$\Lambda_1^k(x) + \Lambda_2^k(x) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{2} (\partial_i \varphi_j^k)^2,$$

Поэтому

$$\int_{S_0} \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{2} (\partial_i \varphi_j^k)^2 dx = \int_{S_0} \Big[\Lambda_1^k(x) + \Lambda_2^k(x) + c\Big(\frac{1}{\Lambda_1^k(x)} + \frac{1}{\Lambda_2^k(x)}\Big) + $$
$$+ \frac{1}{\Lambda_1^k(x)\Lambda_2^k(x)} + c\Lambda_1^k(x)\Lambda_2^k(x) \Big] dx \leq \int_{S_0} (э(g(R^k(x)))dx + \|L\| \, \|R^k(x)\|_{L_2^3(S_0)}.$$

Интеграл $\Big[\int\limits_{S_0} \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{2} (\partial_i \varphi_j^k)^2 dx\Big]^{1/2}$ представляет полунорму $|R(x)|_{\mathbf{W}_2}$ в соболевском пространстве $\mathbf{W}_2$. Используя последнее неравенство, получим

$$|R^k - R_0|^2_{\mathbf{W}_2} \leq 2|R^k|^2_{\mathbf{W}_2} + 2|R_0|^2_{\mathbf{W}_2} \leq 2I_1(R^k) + 2\|L\| \, \|R^k(x)\|_{\mathbf{L}_2} + 2|R_0|^2_{\mathbf{W}_2}.$$

Поскольку полунорма $|R(x)|_{\mathbf{W}_2}$ в пространстве $\overset{\circ}{\mathbf{W}}_2$ эквивалентна норме $\|R(x)\|_{\mathbf{W}_2}$, имеем следующее квадратичное неравенство

$$\|R^k - R_0\|^2_{\mathbf{W}_2} \leq c_1 \|R^k - R_0\|_{\mathbf{W}_2} + c_2$$

для некоторых положительных, не зависящих от k, констант c_1, c_2. Следовательно, минимизирующая последовательность ограничена, а в силу рефлексивности пространства $\mathbf{W}_2$ слабо относительно компактна. Нормы соответствующих матричных функций $g^k(x)$ в пространстве $\mathbf{L}_2$ определяются равенством

$$\|g(x)\|^2_{\mathbf{L}_2} = \int_{S_0} \operatorname{tr} g^2(x) dx = \int_{S_0} (\lambda_1^4(x) + \lambda_1^4(x)) dx = \int_{S_0} (\Lambda_1^2(x) + \Lambda_1^2(x)) dx,$$

и потому равномерно ограничены, а сама последовательность $\{g^k(x)\}$, $k = 1, 2, \dots$, слабо относительно компактна в $\mathbf{L}_2$. Не теряя общности примем, что

$$R^k(x) \rightharpoonup R_m \quad \text{в} \quad \mathbf{W}_2,' \qquad g^k(x) \rightharpoonup g_m \quad \text{в} \quad \mathbf{L}_2. \tag{13}$$

Из леммы 1 следует $g_m(x) \in \mathbf{V}_M$. Пусть $a(x)$, $b(x)$ — фиксированные вектор-функции из пространства $[L_\infty(S_0)]^2$. В силу определения слабой сходимости

$$\int_{S_0} a(x)g^k(x)b(x)dx \xrightarrow[k\to\infty]{} \int_{S_0} a(x)g_m(x)b(x)dx.$$

Полагая $a(x) = b(x)$ и принимая во внимание равенство $g^k(x) = \nabla\varphi^k(x)\cdot\nabla^T\varphi^k(x)$, последнее соотношение перепишем в виде

$$\int_{S_0} \|a(x)\nabla\varphi^k(x)\|^2 dx \xrightarrow[k\to\infty]{} \int_{S_0} a(x)g_m(x)a(x)dx. \tag{14}$$

С другой стороны, последовательность $\{a(x)\nabla\varphi^k(x)\}$ слабо сходится к функции $a(x)\nabla\varphi_m(x)$ (см. (13)). В силу выпуклости нормы отсюда получаем

$$\varliminf_{k\to\infty} \int_{S_0} \|a(x)\nabla\varphi^k(x)\|^2 dx \geq \int_{S_0} \|a(x)\nabla\varphi_m(x)\|^2 dx. \tag{15}$$

Сравнение неравенств (14) и (15) приводит к следующему заключению: для любой функции $a(x) \in [L_\infty(S_0)]^2$ имеет место

$$\int_{S_0} a(x)g_m(x)a(x)dx \geq \int_{S_0} a(x)\nabla\varphi_m(x)\nabla^T\varphi_m(x)a(x)dx. \tag{16}$$

Стандартными рассуждениями из (16) заключаем, что почти всюду на S_0

$$g_m(x) \geq \nabla\varphi_m(x)\nabla^T\varphi_m(x) = g(R_m(x)). \tag{17}$$

Неравенство (17) — ключевое для дальнейших рассуждений. Оно равносильно положительной полуопределенности симметричной матрицы $h(x) = g_m(x) - g(R_m(x))$.

Из слабой полунепрерывности снизу функционала $I_1(g)$ имеем $\varliminf\limits_{k\to\infty} I_1(g^k) \geq I_1(g_m)$. Предположим, что $\varliminf\limits_{k\to\infty} I_1(g^k) - I_1(g_m) = \gamma > 0$. Из леммы 3 следует, что существует допустимая вектор-функция $\widetilde{R}(x)$, находящаяся в ε-C-окрестности функции $R_m(x)$, и для которой $|I_1(g_m) - I_1(g(\widetilde{R}))| \leq \varepsilon$. Отсюда при достаточно малом ε вытекает неравенство $I_1(g(\widetilde{R})) + L(\widetilde{R}) < \varliminf\limits_{k\to\infty} I_1(g^k) + L(R_m)$. Это противоречит тому, что последовательность $\{R^k(x)\}$ минимизирует функционал $I(R)$. Следовательно, $\gamma = 0$. На основании этого факта и результатов работы [7] последовательность $\{g^k(x)\}$ сильно сходится в $[L_2(S_0)]^3$ к $g_m(x)$.

Рассмотрим далее матричную функцию $\widetilde{g}(x)$, определяемую равенством $\widetilde{g}(x) = (1-t(x))g_m(x) + t(x)g(R_m(x))$, где $t(x) = \sup\{t : t \in [0,1],\ \ \Lambda_1\Lambda_1^2(\widetilde{g}(x)) \geq 1\}$. Относительно $\widetilde{g}(x)$ имеем $\widetilde{g}(x) \in \mathbf{V}_M$ и $g_m \geq \widetilde{g} \geq g(R_m)$. Случай $g_m(x) > \widetilde{g}(x)$ на множестве положительной меры приводит к противоречию рассуждениями, аналогичными вышеизложенным. Поэтому $g_m(x) = \widetilde{g}(x)$ п.в.

Если на множестве положительной меры $\Lambda_1\Lambda_2^2(g_m(x)) = 1$, а $\Lambda_1(g_m(x)) > \Lambda_1(g(R_m(x)))$, то, уменьшая подходящим образом значения $\Lambda_1(g_m(x))$ и увеличивая значения $\Lambda_2(g_m(x))$, можно построить матричную функцию $\overline{g}(x)$ со свойствами $\overline{g}(x) \in \mathbf{V}_M$, $I_1(\overline{g}) < I_1(g_m)$, $\overline{g}(x) \geq g(R_m(x))$ п.в. — это опять ведет к противоречию.

Из последних рассуждений следует, что на множестве $S_2 = \{x : x \in S_0,\ \ \Lambda_1\Lambda_2^2(g_m(x)) > 1\}$ почти всюду $\Lambda_1(g_m(x)) = \Lambda_1(g(R_m(x)))$, $\Lambda_2(g_m(x)) = \Lambda_2(g(R_m(x)))$. На множестве $S_1 = \{x : x \in S_0,\ \ \Lambda_1\Lambda_2^2(g_m(x)) = 1,\ \ \Lambda_1(g_m(x) \neq \Lambda_2(g_m(x))\}$ почти всюду имеет место равенство $\Lambda_1(g_m(x)) = \Lambda_1(g(R_m(x)))$. $\square$

Следствие. Если $g_m(x)$ является аффинно-внутренней точкой множества $\mathbf{V}$, то на множестве $\mathbf{R}_M$ достигается минимум функционала полной энергии мягкой оболочки.

Литература

1. Шагидуллин Р.Р. *Математическое моделирование мягких оболочек в рамках общей теории упругости* // Тр. международн. конф. “Применение математического моделирования для решения задач в науке и технике”. 31 января–3 февраля 1996. Ижевск: Изд-во ИРМУ РО РАН. – С. 301–313.
2. Ридель В.В., Гулин Б.В. *Динамика мягких оболочек.* – М.: Наука, 1990. – 206 с.
3. Магула В.Э. *Судовые пластичные конструкции.* – Л.: Судостроение, 1978. – 264 с.
4. Сьярле Ф. *Математическая теория упругости.* – М.: Мир, 1992. – 472 с.
5. Нэш Дж. *Изометричные вложения* // Математика (сб. переводов). – 1957. – Т. 1:2. – С. 3–16.
6. Кейпер Н.Х. *0 изометрических вложениях* // (сб. переводов). – 1957. – Т. 1:2. – С. 17–28.
7. Сычев М.А. *Необходимые и достаточные условия в теоремах полунепрерывности и сходимости с функционалом* // Матем. сб. – 1995. – Т. 186. – № 6. – С. 77–108.

Казанский государственный университет

Поступила 16.12.1996