ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 3 (430)

УДК 514.75

М.А. ЧЕШКОВА

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

В евклидовом пространстве E^{2n} рассматриваются две гладкие n-поверхности M, $\overline{M}$ и диффеоморфизм $f : M \to \overline{M}$. Исследуется случай, когда касательные n-плоскости в соответствующих точках $p \in M$, $f(p) \in \overline{M}$ ортогональны. Пусть $\overrightarrow{pf(p)} = a + \tau$, $a \in TM$, $\tau \in TM^{\perp}$.

Теорема. *Если поле a — инфинитезимальное аффинное преобразование, то поверхность M либо омбилическая относительно τ, либо локально внутренне приводима.*

1. *Основные формулы.* Пусть M, $\overline{M}$ — две гладкие n-поверхности в евклидовом пространстве E^{2n}, $f : M \to \overline{M}$ — диффеоморфизм, $F(M)$ — R-алгебра дифференцируемых на M функций, $T^q_s(M)$ — F-модуль дифференцируемых на M тензорных полей типа (q, s), ∂ — дифференцирование в E^{2n}.

Формулы Гаусса-Вейнгартена поверхности M имеют вид ([1], с. 23)

$$\begin{aligned} \partial_X Y &= \nabla_X Y + \alpha(X, Y), \\ \partial_X \xi &= -A_\xi X + \nabla^{\perp}_X \xi, \end{aligned} \tag{1}$$

где $X, Y \in T^1_0(M)$, ∇ — связность Леви-Чивита метрики $g(X, Y) = \langle X, Y\rangle$, α — вторая фундаментальная форма поверхности M, $\nabla^{\perp}$ — нормальная связность, $A_\xi \in T^1_1(M)$ — симметричный оператор, соответствующий полю $\xi \in TM^{\perp}$.

Обозначим через r радиус-вектор точки $p \in M$, через $\bar{r}$ — радиус-вектор точки $f(p) \in \overline{M}$. Тогда отображение $f : M \to \overline{M}$ запишется в виде

$$\bar{r} = r + \overrightarrow{pf(p)} = r + (a + \tau), \quad a \in TM, \quad \tau \in TM^{\perp}. \tag{2}$$

Дифференциал отображения f определится из равенства

$$\begin{aligned} df(X) &= df(\partial_X r) = \partial_X \bar{r}, \\ \partial_X r &= X \in TM. \end{aligned}$$

Дифференцируя (2) и используя (1), получим

$$df(X) = X + \nabla_X a + \alpha(X, a) - A_\tau X + \nabla^{\perp}_X \tau.$$

Так как касательные плоскости поверхностей M, $\overline{M}$ в соответствующих точках ортогональны, то касательная составляющая $FX = X - A_\tau X + \nabla_X a$ вектора $df(X)$ равна нулю. Имеем

$$\nabla_X a = -\varphi X, \quad \varphi = \delta - A_\tau, \tag{3}$$

где δ — тензор Кронекера.

2. Доказательство теоремы. Так как A_τ симметричный, то и φ — симметричный тензор в силу (3). Дифференцируем равенство $g(Y, \varphi Z) = g(\varphi Y, Z)$ вдоль X в связности ∇. Имеем

$$g(\nabla_X Y, \varphi Z) + g(Y, (\nabla_X \varphi)(Z)) + g(Y, \varphi \nabla_X Z) = g((\nabla_X \varphi)(Y), Z) + g(\varphi \nabla_X Y, Z) + g(\varphi Y, \nabla_X Z),$$

где $(\nabla_X\varphi)(Y) = \nabla_X\varphi Y - \varphi\nabla_X Y$ — ковариантная производная φ в связности ∇. Используя симметричность, получим

$$g((\nabla_X\varphi)(Y), Z) = g(Y, (\nabla_X\varphi)(Z)). \tag{4}$$

Если векторное поле a на римановом многообразии (M, g) есть инфинитезимальное аффинное преобразование, то ([2], с. 221)

$$(\nabla_X\varphi)(Y) = R(a, X)Y, \tag{5}$$

где $R \in T^1_3(M)$ — тензор кривизны связности ∇.

Из (4), (5) получим $g(R(a,X)Y, Z) = g(Y, R(a,X)Z)$. Так как $g(R(a,X)Y,Z) = -g(R(a,X)Z,Y)$ ([2], с. 191), имеем $R(a,X)Y = 0$. Следовательно,

$$(\nabla_X\varphi)(Y) = 0, \quad (\nabla_X A_\tau)(Y) = 0.$$

Тогда либо $A_\tau = k\delta$, $k = \mathrm{const}$, т.е. M — омбилическое относительно τ, либо в силу теоремы Широкова П.А., Валдена ([3], с. 33) (M, g) локально есть риманово произведение интегральных многообразий распределений, определяемых собственными подпространствами оператора A_τ. Следовательно, M внутренне приводимо ([3], с. 33).

Литература

1. Кобаяси Ш., Номидзу К. *Основы дифференциальной геометрии.* Т. 2. – М.: Наука, 1981. – 414 с.
2. Кобаяси Ш., Номидзу К. *Основы дифференциальной геометрии.* Т. 1. – М.: Наука, 1981. – 344 с.
3. Мирзоян В.А. Ric-*полусимметрические подмногообразия* // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Пробл. геометрии. – 1991. – Т. 23. – с. 29–66.

Алтайский государственный университет

Поступили
первый вариант 03.12.1993
окончательный вариант 03.03.1997