Известия вузов. Математика *http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/*
2012, № 7, с. 60–62 *Гос. номер статьи по НТЦ "Информрегистр" 0421200123\0069*

А.А. НУРМАГОМЕДОВ

СХОДИМОСТЬ СУММ ФУРЬЕ ПО МНОГОЧЛЕНАМ, ОРТОГОНАЛЬНЫМ НА ПРОИЗВОЛЬНЫХ СЕТКАХ

Аннотация. В данной работе исследуются аппроксимативные свойства дискретных сумм Фурье непрерывной функции на отрезке $[-1,1]$ по ортонормированной системе многочленов, являющихся конечно-разностными аналогами классических многочленов Лежандра. В частности, найден порядок нормы для дискретной суммы Фурье.

Ключевые слова: многочлен, ортогональная система, сетка, вес, весовая оценка, асимптотическая формула, сходимость, суммы Фурье.

УДК: 517.98

Пусть $\Omega = \{t_j\}_{j=0}^N$ — дискретное множество (сетка), состоящее из конечного числа различных точек отрезка $[-1,1] : -1 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{N-1} < t_N = 1$. Рассмотрим также еще одну сетку $\Omega_N = \{x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}\}$, состоящую из N точек x_j, где

$$x_j = \frac{t_j + t_{j+1}}{2}, \quad j = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Через

$$\widehat{p}_{k,N}(x) = \widehat{p}_k(x;\Omega), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1,$$

обозначим последовательность многочленов, образующих ортонормированную систему на сетке Ω_N в смысле

$$(\widehat{p}_{n,N}, \widehat{p}_{m,N}) = \sum_{j=0}^{N-1} \widehat{p}_{n,N}(x_j)\widehat{p}_{m,N}(x_j)\Delta t_j = \delta_{nm}, \quad 0 \le n, m \le N-1,$$

где $\triangle t_j = t_{j+1} - t_j$, $j = 0, 1, \ldots, N-1$.

Далее, пусть $\delta_N = \max\limits_{0 \le j \le N-1} \Delta t_j$, $\varkappa_2$ — наименьшая константа в неравенстве типа В.А. Маркова для оценки производных алгебраических многочленов в метрике пространства $L_1[-1,1]$:

$$\int_{-1}^{1} |q_n''(x)|\, dx \le \varkappa_2 n^4 \int_{-1}^{1} |q_n(x)|\, dx,$$

$\widehat{P}_n(x)$ — ортонормированные многочлены Лежандра.

В работе [1] исследованы асимптотические свойства многочленов $\widehat{p}_{n,N}(x)$ при $n, N \to \infty$. В частности, установлены следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть* $0 < b < 1$, $0 < a \le \left(\frac{1-b}{2\varkappa_2}\right)^{1/4}$ *и* $1 \le n \le a\delta_N^{-1/2}$. *Тогда имеет место асимптотическая формула*

$$\widehat{p}_{n,N}(x) = \widehat{P}_n(x) + v_{n,N}(x),$$

Поступила 20.09.2011

для остаточного члена $v_{n,N}(x)$ которой справедлива оценка

$$|v_{n,N}(x)| \le c(a,b)\delta_N n^{5/2}\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n}\right)^{-1/2}.$$

Теорема 2. *Пусть $0<b<1$, $0<a\le\left(\frac{1-b}{2\varkappa_2}\right)^{1/4}$, $1\le n\le a\delta_N^{-1/2}$. Тогда существует такая постоянная $c(a,b)>0$, что*

$$|\widehat{p}_{n,N}(x)| \le c(a,b)(\delta_N n^{5/2}+1)\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n}\right)^{-1/2} \quad (-1\le x\le 1).$$

Пусть $C[-1,\,1]$ — пространство непрерывных на отрезке $[-1,1]$ функций $f(x)$ с нормой

$$\|f\| = \|f\|_{C[-1,1]} = \max_{-1\le x\le 1}|f(x)|,$$

$\mathcal{P}_n$ — пространство алгебраических многочленов степени n,

$$E_n(f) = \min_{q_n\in\mathcal{P}_n}\|f-q_n\|_{C[-1,1]}$$

— наилучшее приближение функции f алгебраическими многочленами степени не выше n.

Через $S_{n,N}(f)=S_{n,N}(f,x)$ обозначим частичную сумму n-го порядка ряда Фурье функции $f(x)$ по системе $\{\widehat{p}_{k,N}(x)\}_{k=0}^{N-1}$:

$$S_{n,N}(f) = \sum_{k=0}^{n}\widehat{f}_k\widehat{p}_{k,N}(x),$$

где $\widehat{f}_k = \sum\limits_{j=0}^{N-1} f(x_j)\widehat{p}_{k,N}(x_j)\Delta t_j$.

Как известно, задача об оценке отклонения частичной суммы $S_{n,N}(f)$ ряда Фурье функции $f\in C[-1,1]$ по системе $\{\widehat{p}_{k,N}(x)\}_{k=0}^{N-1}$ от самой функции f при $x\in[-1,\,1]$ и $n,N\to\infty$ посредством неравенства Лебега

$$|f(x)-S_{n,N}(f,x)| \le (1+L_{n,N}(x))E_n(f)$$

сводится к оценке функции Лебега

$$L_{n,N}(x) = \sum_{j=0}^{N-1}|K_{n,N}(x,x_j)|\Delta t_j,$$

где $K_{n,N}(x,x_j) = \sum\limits_{k=0}^{n}\widehat{p}_{k,N}(x)\widehat{p}_{k,N}(x_j)$.

Основными результатами данной работы являются следующие утверждения, тесно связанные с результатами работ [2]–[12].

Теорема 3. *Пусть $f\in C[-1,1]$, $0<b<1$, $0<a\le\left(\frac{1-b}{2\varkappa_2}\right)^{1/4}$, $n=O(\delta_N^{-2/7})$. Тогда справедливо неравенство*

$$L_{n,N}(x)\le c(a,b)n^{1/2}, \quad -1\le x\le 1.$$

Касаясь вопроса о точности полученной нами оценки для функции $L_{n,N}(x)$, следует отметить, что указанная оценка точна по порядку.

Теорема 4. *Пусть $f\in C[-1,1]$, $0<b<1$, $0<a\le\left(\frac{1-b}{2\varkappa_2}\right)^{1/4}$, $n=O(\delta_N^{-2/7})$. Тогда равномерно относительно $-1\le x\le 1$ справедлива оценка*

$$|f(x)-S_{n,N}(f,x)| \le c(a,b)E_n(f)n^{1/2}.$$

Литература

[1] Нурмагомедов А.А. *Об асимптотике многочленов, ортогональных на произвольных сетках*, Изв. Саратовск. ун-та. Нов. сер. Сер. Матем., механ., информатика **8** (1), 25–31 (2008).

[2] Сеге Г. *Ортогональные многочлены* (Физматгиз, М., 1962).

[3] Rau H. *Über die Lebesgueschen Konstanten der Reihenentwicklungen nach Jacobischen Polynomen*, J. fur Math. **161**, 237–254 (1929).

[4] Gronwall T. *Über die Laplacesche Reihe*, Math. Ann. **74** (2), 213–270 (1913).

[5] Агаханов С.А., Натансон Г.И. *Приближение функций суммами Фурье–Якоби.* ДАН СССР **166** (1), 9–10 (1966).

[6] Агаханов С.А., Натансон Г.И. *Функция Лебега сумм Фурье–Якоби*, Вестн. Ленинградск. ун-та **1**, 11–13 (1968).

[7] Шарапудинов И.И. *О сходимости метода наименьших квадратов*, Матем. заметки **53** (3), 131–143 (1993).

[8] Коркмасов Ф.М. *Аппроксимативные свойства средних Валле-Пуссена для дискретных сумм Фурье–Якоби.* Сиб. мат. журн. **45** (2), 334–355 (2004).

[9] Бадков В.М. *Оценки функции Лебега и остатка ряда Фурье–Якоби*, Сиб. матем. журн. **9** (6), 1263–1283 (1978).

[10] Алексич Г. *Проблемы сходимости ортогональных рядов* (Ин. лит., М., 1963).

[11] Бадков В.М. *Двусторонние оценки функции Лебега и остатка ряда Фурье по ортогональным многочленам*, в сб.: Аппроксимация в конкретных и абстрактных банаховых пространствах (АН СССР, Уральск. научн. центр, Свердловск, 1987), с. 31–45.

[12] Шакиров И.А. *Полное исследование функций Лебега, соответствующих классическим интерполяционным полиномам Лагранжа*, Изв. вузов. Матем., № 10, 80–88 (2011).

А.А. Нурмагомедов

старший преподаватель, кафедра математических дисциплин в экономике,
Дагестанская государственная сельскохозяйственная академия им. М.М. Джамбулатова,
ул. Гаджиева, д. 180, г. Махачкала, 367032, Россия,

e-mail: alimn@mail.ru

A.A. Nurmagomedov

Convergence of Fourier sums by polynomials orthogonal on arbitrary lattice

Abstract. We study approximation properties of discrete Fourier sums of a function on the segment $[-1, 1]$ on an orthonormal system of polynomials representing finite-difference analogs of classical Legendre polynomials. In particular, we find an order of the norm of discrete Fourier sum.

Keywords: polynomial, orthogonal system, lattice, weight, weight estimate, asymptotic formula, approximation, Fourier sums.

A.A. Nurmagomedov

Senior Lecturer, Chair of Mathematical Disciplines in Economics,
M.M. Dzhambulatov Dagestan State Agricultural Academy ,
180 Gadzhiev str., Makhachkala, 367032 Russia,

e-mail: alimn@mail.ru