И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

1999 МАТЕМАТИКА № 2 (441)

УДК 517.934

Ю.В. МАСТЕРКОВ

К ВОПРОСУ О ЛОКАЛЬНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

Введение

Здесь изучаются условия управляемости в нуль системы

$$\dot{x} = f_0(x) + uf_1(x), \quad (x,u) \in \mathbb{R}^n \times [-1,1] \tag{1}$$

в критическом случае (т. е. в случае, когда система линейного приближения не является вполне управляемой). В работе введено понятие устойчивой локальной управляемости и показано, что если система линейного приближения вполне управляема, то система (1) устойчиво управляема; если же свойство вполне управляемости системы линейного приближения отсутствует, то реализуется один из трех случаев: 1) система (1) устойчиво локально управляема; 2) система (1) управляема; 3) система (1) неуправляема. Выделен класс систем вида (1), для которых имеет место устойчивая локальная управляемость. Показано, что N-управляемость [1] системы

$$\dot{x} = f(x,u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in U \subset \mathbb{R}^m \tag{2}$$

влечет устойчивую управляемость. Таким образом, свойство N-управляемости является наиболее сильным из известных к настоящему времени свойств управляемости, а устойчивая управляемость занимает промежуточное положение между N-управляемостью и локальной управляемостью.

Задачам исследования условий управляемости систем вида (2) посвящен ряд работ [1]–[10], причем в [2], [7], [10] получены достаточные условия управляемости в критическом случае. Полный ответ на вопрос об устойчивой управляемости получен лишь для систем второго порядка. Для произвольного $n > 2$ полный ответ о локальной управляемости остается открытым. В некоторых работах проверка управляемости в критическом случае предполагает наличие некоторых объектов, существование и построение которых весьма проблематично [10]. Здесь возникает ситуация, аналогичная построению функций Ляпунова во втором методе Ляпунова, что не умаляет достоинств таких утверждений.

1. Обозначения и определения

В работе используются следующие обозначения: $\mathbb{R}^n$ — евклидово пространство размерности n с нормой $|x| = \sqrt{x^*x}$ ($*$ — операция транспонирования); $\mathbb{R} \doteq \mathbb{R}^1$; $\mathbb{R}^+ \doteq [0,\infty)$; $O^n_\varepsilon(x_0) \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < \varepsilon\}$; $O^n_\varepsilon \doteq O^n_\varepsilon(0)$; $\operatorname{int} G$ — внутренность, $\overline{G}$ — замыкание, ∂G — граница множества $G \subset \mathbb{R}^n$; $C^n(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^p)$ — пространство n раз непрерывно-дифференцируемых функций из $\mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}^p$.

Рассмотрим систему (2) в предположении, что U — непустой выпуклый компакт в $\mathbb{R}^n$, $0 \in \operatorname{int} U$, $f \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, $f(0,0) = 0$ и матрица $\left(\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\right)_{(0,0)}$ ненулевая.

Всевозможные измеримые вектор-функции $u : \mathbb{R} \longrightarrow U$ будем называть *допустимыми управлениями.*

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант 97–01–00413) и конкурсным центром Удмуртского госуниверситета (грант 97–04).

Точка x_0 называется τ-управляемой, если существует такое допустимое управление $u : [0,\tau] \longrightarrow U$, что разрешима краевая задача $\dot{x} = f(x, u(t))$, $x(0) = x_0$, $x(\tau) = 0$.

Множество всех τ-управляемых точек называется *множеством управляемости* системы (2) *за время* τ и обозначается D_τ. Известно (напр., [11], гл. 1, § 2, с. 78), что при всех $\tau > 0$ множество D_τ — компакт в $\mathbb{R}^n$. Множество $D_\infty = \bigcup\limits_{\tau>0} D_\tau$ называется *множеством управляемости* системы (2).

Напомним, что система (2) называется локально управляемой (напр., [11], гл. 1, § 2, с. 77; [12], гл. 1, § 7, с. 60), если $0 \in \operatorname{int} D_\tau$ при некотором $\tau > 0$.

Определение 1. Система (2) называется устойчиво управляемой, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для каждого $x_0 \in O^n_\delta$ найдутся время $\tau = \tau_{x_0} > 0$ и такое допустимое управление $u_{x_0} : [0,\tau] \longrightarrow U$, что решение $x(t)$, $t \in [0,\tau]$, системы (2) при данном управлении $u = u_{x_0}(t)$ и начальном условии $x(0) = x_0$ удовлетворяет условиям: $x(\tau) = 0$, $|x(t)| < \varepsilon$, $t \in [0,\tau]$.

В [1] введено понятие *N-управляемости*, которое означает, что $0 \in \operatorname{int} D_\tau$ при всех $\tau > 0$.

Пусть $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ соответственно множества локально управляемых, устойчиво управляемых и N-управляемых систем вида (2).

Лемма 1. $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M} \subset \mathfrak{L}$.

Доказательство. Докажем, что $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$. Действительно, если система (2) N-управляема, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\tau > 0$, что $D_\tau \subset O^n_\varepsilon$. Пусть $\delta = \min\limits_{x\in\partial D_\tau} |x|$. Тогда существует такое решение $x(t)$ системы (2), что $x(0) = x_0$, $x(\tau) = 0$, $x(t) \subset D_\tau \subset O^n_\varepsilon$ при всех $t \in [0,\tau]$, т. е. система (2) устойчиво управляема.

Включение $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{L}$ очевидно. □

Приводимые ниже примеры показывают, что множества $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{L}$ не совпадают.

Пример 1. Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = u, \quad \dot{x}_2 = \frac{1}{2}(5x_1^4 - 8x_1^3 + 3x_1^2) + \frac{1}{2}(5x_1^4 - 8x_1^3 + 3x_1^2)u + u, \tag{3}$$

где $u \in [-1,1]$. Здесь (см. (1)) $f_0(x) = (0, \frac{1}{2}(5x_1^4 - 8x_1^3 + 3x_1^2))^*$; $f_1(x) = (1, \frac{1}{2}(5x_1^4 - 8x_1^3 + 3x_1^2))^*$; $b = f_1(0) = (1,1)^*$. Очевидно, $A = \left(\frac{\partial f_0(x)}{\partial x}\right)_{x=0}$ — нулевая матрица и, следовательно, $\operatorname{rank}(b, Ab) = 1$, т. е. к системе (3) не применима теорема о локальной управляемости по первому приближению. Тем не менее, система (3) является локально управляемой. Действительно, кривые $x_2 = x_1^5 - 2x_1^4 + x_1^3 + x_1 + C_1$ являются траекториями решений системы (3) при $u = 1$. Движение по ним осуществляется в сторону возрастания x_1. Соответственно прямые $x_2 = x_1 + C_2$ суть траектории допустимых решений системы (3) при $u = -1$ и движение по ним осуществляется в сторону убывания x_1. Пусть $\gamma_+ \doteq \{x_2 = x_1^5 - 2x_1^4 + x_1^3 + x_1,\ x_1 \leqslant 0\}$, $\gamma_- \doteq \{x_2 = x_1,\ x_1 \geqslant 0\}$ (см. рис. 1). Легко видеть, что из любой точки $\beta \in \mathbb{R}^2$, находящейся ниже кривой $\gamma = \gamma_+ \cup \gamma_-$, двигаясь по прямой $x_2 = x_1 + C(\beta)$, изображающая точка системы (3) за конечное время достигает траектории γ_+ и далее, двигаясь по ней, за конечное же время достигает нуля. Как осуществляется переход в нуль из точек, находящихся выше кривой γ, поясним по рисунку 1, на котором движение в заштрихованной области показано справа в более крупном масштабе. Из произвольной точки $\alpha \in \mathbb{R}^2$, находящейся выше кривой γ, по траектории $\{x_2 = x_1^5 - 2x_1^4 + x_1^3 + x_1 + C(\alpha)\}$ за конечное время можно достичь полосы $0.6 \leqslant x_1 \leqslant 1$, в которой (см. рис. 1 справа) осуществляется спуск до траектории γ_- и далее, двигаясь по γ_-, можно достичь начала координат за конечное время. Таким образом, система (3) локально управляема (отметим, что для оптимального по быстродействию перехода из изображенной на рис. 1 точки α в нуль потребовалось 27 переключений управления).

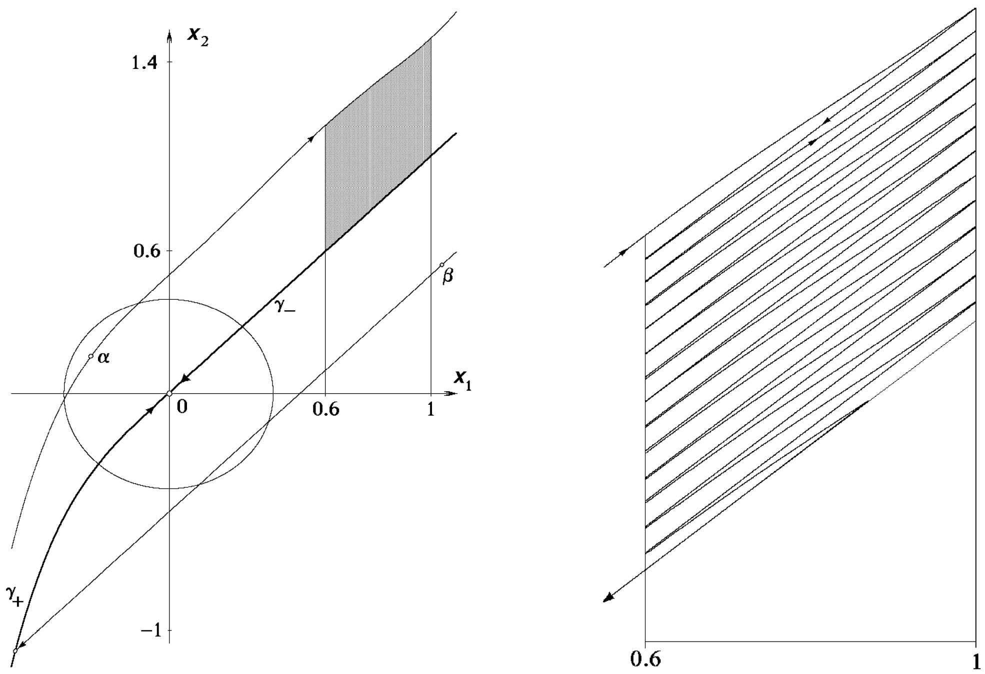

Рис. 1

Покажем, что система (3) не является устойчиво управляемой. Действительно, при $\varepsilon = 0.6$ никакую точку $x_0 \in O_\varepsilon^n$, находящуюся выше кривой γ, нельзя перевести в нуль за конечное время, не покидая при этом окрестности O_ε^n. Дело в том, что в O_ε^n поле скоростей системы (3) направлено вверх относительно любой опорной прямой к кривой γ. Следовательно, никакая допустимая траектория в O_ε^n не сможет подойти “сверху” к траектории γ, а значит, и попасть в начало координат, не покидая при этом окрестности O_ε^n, т. е. система (3) не является устойчиво управляемой.

Покажем, что множества $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{M}$ не совпадают.

Пример 2. Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = x_2 + u(1 - x_2), \quad \dot{x}_2 = -x_1 + ux_1, \tag{4}$$

где $u \in [0, 1]$. Нетрудно заметить, что окружности $x_1^2 + x_2^2 = C_1^2$ и прямые $x_2 = C_2$ суть траектории решений системы (4) при $u = 0$ и $u = 1$ соответственно, причем движение по окружностям осуществляется по часовой стрелке, а по прямым — в сторону возрастания x_1 (см. рис. 2).

Покажем, что система (4) устойчиво управляема. Действительно, пусть ε — произвольное положительное число, а x_0 — произвольная точка, удовлетворяющая условию $|x_0| < \varepsilon$. Двигаясь по окружности $x_1^2 + x_2^2 = |x_0|^2$, за время $t_1 < 2\pi$ можно достичь отрицательной полуоси Ox_1, и далее, двигаясь по траектории $\gamma_+ \doteq \{x_2 = 0, x_1 \leqslant 0\}$, за время $t_2 = |x_0|$ достигаем начала координат, оставаясь все время в окрестности O_ε^n. Однако при всех $\tau \leqslant \pi/4$ множество D_τ содержит нуль на своей границе, т. е. система (4) не является N-управляемой. Отметим, что приблизиться к нулю можно лишь со стороны третьего квадранта. Чтобы достичь нуля из точек положительной полуоси Ox_1, необходимо сначала достичь третьего квадранта, затратив на это время $\tau = \pi/4$, следовательно, при всех $\tau \leqslant \pi/4$ нуль не принадлежит внутренности D_τ, т. е. система (4) не является N-управляемой.

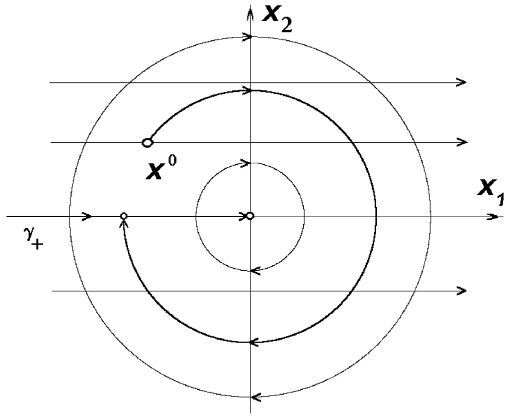

Рис. 2

Вообще говоря, система (4) не является системой вида (2), т. к. нуль находится на границе множества управляемости $U = [0, 1]$. Корректный пример, показывающий, что при отсутствии N-управляемости может иметь место устойчивая управляемость, легко построить на основе примера 2.

Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = x_2 + u_1^2(1 - x_2), \quad \dot{x}_2 = -x_1 + u_1^2 x_1, \quad \dot{x}_3 = u_2, \tag{5}$$

где $u_i \in [-1, 1]$, $i = 1, 2$. Так как траектории системы (4) суть проекции траекторий системы (5), то система (5) не является N-управляемой. Устойчивая управляемость следует из того, что из любой точки $x_0 = (x_{01}, x_{02}, x_{03})^*$ при $u_2 = 0$ можно достичь точки x_{03} на оси ox_3, а затем при $u_2 = \mathrm{sign}(-x_{03})$, $u_1 = 0$ достичь нуля, не покидая при этом окрестности $O^n_{|x_0|}$ (решение здесь понимается в смысле А.Ф. Филиппова).

2. Постановка задачи. Основные утверждения

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = f_0(x) + uf_1(x), \quad (x, u) \in \mathbb{R}^n \times [-1, 1]. \tag{6}$$

Предполагается, что $f_i \in C^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $i = 0, 1$, $f_0(0) = 0$, $f_1(0) = b \neq 0$. Наряду с системой (6) рассмотрим соответствующую ей систему линейного приближения

$$\dot{x} = Ax + bu, \tag{7}$$

где $A = \left(\frac{\partial f_0(x)}{\partial x}\right)_{x=0}$. Известны следующие утверждения (напр., [11], гл. 1, § 3, с. 91; [12], гл. 1, § 7, с. 61).

Лемма 2. *Предположим, что* $\mathrm{rank}(b, Ab, A^2b, \ldots, A^{n-1}b) = k \leqslant n$, *тогда векторы* b, Ab, $A^2b, \ldots, A^{k-1}b$ *линейно независимы.*

Лемма 3. *Пусть* $\mathrm{rank}(b, Ab, A^2b, \ldots, A^{n-1}b) = k \leqslant n$ *и* L^k *— линейное подпространство в* $\mathbb{R}^n$, *порожденное векторами* b, Ab, $A^2b, \ldots, A^{k-1}b$. *Тогда множество управляемости* D_∞ *системы* (7) *содержится в* L^k.

Замечание 1. В условиях леммы 3 система (7) является N-управляемой в L^k (напр., [11], гл. 2, § 3, с. 108).

Лемма 4. *Пусть* $\mathrm{rank}(b, Ab, A^2b, \ldots, A^{n-1}b) = n - 1$, *тогда для любого* $\tau > 0$ *существует гладкое многообразие* M^{n-1}, *которое содержится в множестве управляемости* D_τ *системы* (6).

Доказательство. В силу замечания к лемме 3 система (7) является N-управляемой на многообразии L^{n-1}, порожденном векторами b, Ab, $A^2b, \dots, A^{n-2}b$. Следовательно, для любого $\tau > 0$ существуют допустимые управления $u_i(t)$, $t \in [0,\tau]$, $i = \overline{1, n-1}$, которые переводят систему с обращенным временем

$$\dot{x} = -Ax - bu \tag{8}$$

из начала координат в линейно независимые точки $x_i(\tau) = x(\tau, u_i(\cdot))$, $i = \overline{1, n-1}$. Без ограничения общности будем полагать, что: а) $u_i(t) \in C^\infty([0,\tau])$, $i = \overline{1, n-1}$; б) управления $u_i(t)$ выбраны так, что соответствующие им решения $x_i(t) = x(t, u_i(\cdot))$ системы (8) существуют на отрезке $[0,\tau]$ и удовлетворяют условию $x_i(1) = \varepsilon A^{i-1}b$, $i = \overline{1, n-1}$, где ε — некоторое положительное число. Обозначим $u(t,\xi) = \sum\limits_{i=1}^{n-1} \xi_i u_i(t)$, где $|\xi| \leqslant 1$.

Пусть $x(t,\xi)$ — решение системы с обращенным временем $\dot{x} = -f_0(x) - u(t,\xi) f_1(x)$, удовлетворяющее начальному условию $x(0,\xi) = 0$. Можно полагать, что при всех $\xi \in O_1^{n-1}$ данное решение существует на отрезке $[0,\tau]$. Обозначим $Z(t) = \left(\frac{\partial x(t,\xi)}{\partial \xi}\right)_{\xi=0}$. Легко видеть, что $n \times (n-1)$-матрица $Z(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{Z}(t) = -AZ(t) - bu^*(t),$$

где $bu^*(t)$ — матричное произведение вектор-столбца b на вектор-строку $u^*(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_{n-1}(t))^*$. Отсюда следует, что столбцы $z_i(t)$, $i = \overline{1, n-1}$, матрицы $Z(t)$ удовлетворяют уравнениям

$$\dot{z}_i(t) = -Az_i(t) - bu_i(t), \quad z_i(0) = 0, \quad i = \overline{1, n-1}.$$

Но тогда $z_1(\tau), z_2(\tau), \dots, z_{n-1}(\tau)$ — линейно независимые векторы. Следовательно, отображение $\xi \longrightarrow x(\tau,\xi)$ является непрерывно-дифференцируемым отображением окрестности O_1^{n-1} в $\mathbb{R}^n$. Заметим теперь, что поскольку $\operatorname{rank} Z(\tau) = \operatorname{rank} \left(\frac{\partial x(\tau,\xi)}{\partial \xi}\right)_{\xi=0} = n-1$, то существует такая окрестность O_δ^{n-1}, что $\operatorname{rank} \left(\frac{\partial x(\tau,\xi)}{\partial \xi}\right) = n-1$ для всех $\xi \in O_\delta^{n-1}$. А это означает, что множество $M_\tau^{n-1} \doteq \{x = x(\tau,\xi),\ \xi \in O_\delta^{n-1}\}$ будет гладким многообразием, причем $M_\tau^{n-1} \subset D_\tau$. $\square$

Следствие 1. Пусть $\operatorname{rank}(b, Ab, A^2b, \dots, A^{n-1}b) = n-1$. Тогда для любого $\tau > 0$ существуют окрестность O_ε^n и такая функция $\varphi_\tau \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, что $(\partial\varphi_\tau(x)/\partial x) \neq 0$ для всех $x \in O_\varepsilon^n$ и $M^{n-1} \doteq \{x \in O_\varepsilon^n : \varphi_\tau(x) = 0\} \subset D_\tau$.

Доказательство. Из доказательства леммы 4 видно, что для любого $\tau > 0$ существует окрестность O_δ^{n-1}, для которой многообразие $M_\tau^{n-1} \doteq \{x = x(\tau,\xi),\ \xi \in O_\delta^{n-1}\}$ содержится в D_τ, причем $\operatorname{rank}\left(\frac{\partial x(\tau,\xi)}{\partial \xi}\right) = n-1$ для всех $\xi \in O_\delta^{n-1}$. Известно (напр., [13], гл. 7, § 7, утв. 1, с. 505), что в этом случае существуют такая окрестность O_ε^n, индекс k и функция $\varphi_\tau^k(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n)$, что $M_\tau^{n-1} \doteq \{x \in O_\varepsilon^n : x_k = \varphi_\tau^k(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n)\}$. Это равносильно тому, что $M^{n-1} \doteq \{x \in O_\varepsilon^n : \varphi_\tau(x) = 0\}$, где $\varphi_\tau(x) = x_k - \varphi_\tau^k(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n)$. Заметим теперь, что $(\partial\varphi_\tau(x)/\partial x) \neq 0$ для всех $x \in O_\varepsilon^n$. $\square$

Замечание 2. На самом деле в условиях леммы 4 гладкость многообразия M_τ^{n-1} будет степени p. Это следует из теоремы о степени гладкости зависимости решений от параметра (напр., [14], гл. 3, § 21, с. 88).

Пусть $\operatorname{rank}(b, Ab, A^2b, \dots, A^{n-1}b) = n-1$. Рассмотрим построенное в доказательстве леммы 4 многообразие $M_\tau^{n-1} \doteq \{x = x(\tau,\xi),\ \xi \in O_\delta^{n-1}\} \subset D_\tau$. Векторы $p_i(x_0) \doteq \left(\frac{\partial x(\tau,\xi)}{\partial \xi_i}\right)_{\xi=\xi_0}$, $i = \overline{1, n-1}$, очевидно, образуют базис касательного пространства к многообразию M_τ^{n-1} в точке $x_0 = x(\tau, \xi_0)$. Введем функцию $s(x) = \det(f_0(x), p_1(x), \dots, p_{n-1}(x))$.

Лемма 5. *Если в любой окрестности O_ε^n найдутся такие точки x_+ и x_-, принадлежащие M_τ^{n-1}, что $s(x_+)s(x_-) < 0$, то система* (6) *устойчиво управляема.*

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Легко видеть, что существует такое $\varepsilon_1 > 0$, что любая точка $x_0 \in O^n_{\varepsilon_1} \cap M^{n-1}_\tau$ под действием допустимого управления $u_{x_0} = u(t, \xi_{x_0})$ может быть переведена в нуль за конечное время, не покидая при этом окрестности O^n_ε. Это следует из теоремы о непрерывной зависимости от параметра (напр., [14], гл. 3, § 20, стр. 86).

Далее поскольку $M^{n-1}_\tau \doteq \{x = x(\tau, \xi),\ \xi \in O^{n-1}_\delta\}$, то, не нарушая общности, можно полагать, что многообразие M^{n-1}_τ делит окрестность $O^n_\theta = O^n_{\varepsilon_1} \cap O^n_\delta$ на две части O^+_θ и O^-_θ, или "верхнюю" и "нижнюю" соответственно. Положим для определенности, что $s(x_+) > 0$. Это означает, что вектор $f_0(x_+)$ направлен трансверсально к многообразию M^{n-1}_τ в точке x_+. Будем считать, что он направлен "вверх" относительно M^{n-1}_τ. Тогда $s(x_-) < 0$ и, следовательно, вектор $f_0(x_-)$ направлен "вниз" относительно M^{n-1}_τ. Следовательно, существует такое $t_0 > 0$, что $x(t, x_+) \in O^+_\theta$, а $x(t, x_-) \in O^-_\theta$ для всех $t \in (0, t_0)$, где $x(t, x_0)$ — решение системы $\dot{x} = -f_0(x)$, удовлетворяющее начальному условию $x(0, x_0) = x_0$.

Легко видеть, что любая точка $x(s)_+ = x(s, x_+)$, $x(s)_- = x(s, x_-)$, $s \in [0, t_0]$, под действием допустимого управления может быть переведена в нуль за конечное время, не покидая при этом окрестности O^n_ε.

Заметим, что найдется такая окрестность $O^n_{\theta_1}$, что множество решений $x = x(t, \xi, x(s)_+)$ системы с обращенным временем $\dot{x} = -f_0(x) - u(t, \xi) f_1(x)$, удовлетворяющих начальному условию $x(0, \xi) = x(s)_+$, целиком покрывает множество $O^n_{\theta_1} \cap O^+_\theta$. А это означает, что любая точка $x_0 \in O^n_{\theta_1} \cap O^+_\theta$ может быть переведена в точку $x(s)_+$ за конечное время, не покидая при этом окрестности O^n_ε. Аналогично показывается, что существует такая окрестность $O^n_{\theta_2}$, что любая точка $x_0 \in O^n_{\theta_2} \cap O^-_\theta$ может быть переведена в точку $x(s)_-$ за конечное время, не покидая при этом окрестности O^n_ε. Пусть $O^n_{\theta_0} = O^n_{\theta_1} \cap O^n_{\theta_2}$. Тогда получаем, что из любой точки $x_0 \in O^n_{\theta_0}$ за конечное время можно достичь точки $x(s)_+$ или $x(s)_-$, а затем, двигаясь по допустимым траекториям системы (6), за конечное же время достичь нуля, не покидая при этом окрестности O^n_ε. Значит, система (6) устойчиво управляема. □

Теорема 1. *Предположим, что* $\operatorname{rank}(b, Ab, A^2 b, \dots, A^{n-1} b) = n - 1$. *Пусть далее* $\gamma_\tau(\xi_1) = x(\tau, \xi_1)$, $\xi_1 \in [-1, 1]$, *где* $x(t, \xi_1)$ *— решение системы*

$$\dot{x} = f_0(x) + \xi_1 f_1(x), \quad x(0, \xi) = 0. \tag{9}$$

Для того чтобы система (6) *была устойчиво управляемой, достаточно, чтобы функция* $s(\xi_1) = s(\gamma_\tau(\xi_1))$ *меняла в нуле знак.*

Доказательство. Так как $\gamma_\tau(\xi_1) \in M^{n-1}_\tau$, то для доказательства достаточно сослаться на лемму 5.

Теорема 2. *Пусть существует функция* $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, *удовлетворяющая условию: всякому* $\tau > 0$ *отвечает такое* $\varepsilon > 0$, *что* $(\partial\varphi(x)/\partial x) \neq 0$ *для всех* $x \in O^n_\varepsilon$ *и* $M \doteq \{x \in O^n_\varepsilon : \varphi(x) = 0\} \subset D_\tau$.

Если существуют $\tau_0 \in (0, \tau)$ *и такие решения* $x_1(t) = x(t, u_1(\cdot))$, $x_2(t) = x(t, u_2(\cdot))$ *системы* (6), *что* $\varphi(x_1(t))\varphi(x_2(t)) < 0$ *для всех* $t \in (0, \tau_0]$, *то система* (6) N*-управляема.*

Доказательство. Обозначим через $x(t, u_i(\cdot), x_0)$ решения системы (6), соответствующие управлению $u_i(t)$, $t \in [0, \tau_0]$, и начальному условию $x(t, u_i(\cdot), x_0) = x_0$, $i = 1, 2$. Отметим, что множество M является $(n-1)$-мерным гладким многообразием, разделяющим окрестность O^n_ε на две части: $O^+_\varepsilon \doteq \{x \in O^n_\varepsilon : \varphi(x) > 0\}$ и $O^-_\varepsilon \doteq \{x \in O^n_\varepsilon : \varphi(x) < 0\}$. Тогда неравенство $\varphi(x_1(t))\varphi(x_2(t)) < 0$ означает, что одно из решений $x_i(t)$, $i = 1, 2$, лежит в O^+_ε, а другое соответственно в O^-_ε для всех $t \in (0, \tau_0]$. Пусть для определенности $x_1(t) \in O^+_\varepsilon$, а $x_2(t) \in O^-_\varepsilon$. Тогда для любого $t_0 \in (0, \tau_0)$ существует такая окрестность O^n_δ, что $x(t_0, u_1(\cdot), x_0) \in O^+_\varepsilon$, а $x(t_0, u_2(\cdot), x_0) \in O^-_\varepsilon$ для всех $x_0 \in O^n_\delta$. Таким образом, $\varphi(x(0, u_1(\cdot), x_0) < 0$, $\varphi(x(t_0, u_1(\cdot), x_0) > 0$ для каждого $x_0 \in O^n_\delta \cap O^-_\varepsilon$. И, поскольку функция $\varphi(x(t, u_1(\cdot), x_0)$ непрерывна, существует такое время $t_{x_0} \in (0, t_0)$, что $\varphi(x(t_{x_0}, u_1(\cdot), x_0) = 0$, т. е. $x(t_{x_0}, u_1(\cdot), x_0) \in M \subset D_\tau$. Аналогично, для каждой точки $x_0 \in O^n_\delta \cap O^+_\varepsilon$ существует такое $t_{x_0} \in (0, t_0)$, что $x(t_{x_0}, u_2(\cdot), x_0) \in M \subset D_\tau$. Следовательно, из любой точки $x_0 \in O^n_\delta$ за время $t \leqslant t_0$ можно попасть на многообразие $M \subset D_\tau$ и затем за время τ в начало координат, не покидая при этом множества $D_{\tau+t_0}$. И поскольку τ и t_0 выбраны произвольно, а $D_{\tau+t_0}$ — компакт, то система N-управляема. □

Повторением основных моментов доказательства леммы 5 и теоремы 2 обосновывается

Теорема 3. *Пусть функция* $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ *удовлетворяет условиям:* а) *существует такое* $\varepsilon > 0$, *что* $(\partial\varphi(x)/\partial x) \neq 0$ *для всех* $x \in O^n_\varepsilon$; б) *существует такое* $\tau > 0$, *что* $M \doteq \{x \in O^n_\varepsilon : \varphi(x) = 0\} \subset D_\tau$.

Если существуют такие моменты времени $t_i \in (0, \tau)$ *и решения системы* (6) $x_i(t) = x(t, u_i(\cdot))$, $t \in [0, \tau_0]$, $i = 1, 2$, *что* $\varphi(x_1(t_1))\varphi(x(t_2)) < 0$, *то система* (6) *локально управляема.*

Литература

1. Петров Н.Н. *Локальная управляемость автономных систем* // Дифференц. уравнения. – 1968. – Т. 4. – № 7. – С. 1218–1232.
2. Петров Н.Н. *Об управляемости автономных систем* // Дифференц. уравнения. – 1968. – Т. 4. – № 4. – С. 606–617.
3. Петров Н.Н. *Решение одной задачи теории управляемости* // Дифференц. уравнения. – 1969. – Т. 5. – № 5. – С. 962–963.
4. Емельянов С.В., Коровин С.К., Мамедов И.Г., Никитин С.В. *Критерии управляемости нелинейных систем при фазовых ограничениях* // ДАН СССР. – 1986. – Т. 290. – № 1. – С. 18–22.
5. Землякова Л.С. *Управляемость нелинейных систем дифференциальных уравнений* // Дифференц. уравнения: качеств. теория. – Рязань, 1995. – С. 64–71.
6. Копейкина Т.Б. *К необходимым условиям управляемости нелинейных систем в критическом случае* // Препринт. Ин-т матем. АН БССР. – Минск, 1985. – № 27. – 44 с.
7. Копейкина Т.Б. *О локальной управляемости нелинейных систем в критическом случае* // Весцi АН БССР. Сер. фiз.-матэм. наук. – 1987. – № 1. – С. 8–15.
8. Митрохин Ю.С., Степанов А.Н. *Критические случаи управляемости систем нелинейных дифференциальных уравнений оптимального регулирования* // Дифференц. уравнения: качеств. теория. – Рязань, 1985. – С. 61–70.
9. Мастерков Ю.В. *Об устойчивой локальной нуль-управляемости систем с квадратичной нелинейностью на плоскости* // Изв. отд. матем. и информ. – Ижевск, 1993. – № 2. – С. 3–24.
10. Никольский М.С. *Об условиях второго порядка в задаче о нуль управляемости* // Дифференц. уравнения. – 1968. – Т. 4 – № 7. – С. 137.
11. Ли Э.М., Маркус Л. *Основы теории оптимального управления.* – М.: Наука, 1972. – 576 с.
12. Габасов Р., Кириллова Ф.М. *Качественная теория оптимальных процессов.* – М.: Наука, 1971. – 507 с.
13. Зорич В.А. *Математический анализ.* Часть 1. Учеб. пособие. – М.: Наука, 1981. – 543 с.
14. Петровский И.Г. *Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений.* – М.: Изд-во МГУ, 1984. – 295 с.

Удмуртский государственный университет

Поступила 03.03.1998