

И.П. РЯЗАНЦЕВА

**ОБ УРАВНЕНИЯХ С ВОЗМУЩЕННЫМИ АККРЕТИВНЫМИ
ОТОБРАЖЕНИЯМИ**

1. Пусть X — рефлексивное банахово пространство, X^* — его сопряженное, X и X^* строго выпуклы, $\langle y, x \rangle$ — значение линейного функционала $y \in X^*$ на элементе $x \in X$, $2^X = \{Q/Q \mid Q \text{ — непустое подмножество из } X\}$, $U : X \rightarrow X^*$ — дуальное отображение в X с некоторой масштабной функцией $\mu(t)$ (см. [1], с. 315).

Определение 1 (см., напр., [1], с. 316). Оператор $A : X \rightarrow 2^X$ называется аккретивным, если для любых $x_1 \in D(A)$, $x_2 \in D(A)$ выполняется неравенство

$$\langle U(x_1 - x_2), y_1 - y_2 \rangle \geq 0 \quad \forall y_1 \in Ax_1, \quad \forall y_2 \in Ax_2.$$

Определение 2 (см., напр., [2]). Аккретивный оператор $A : X \rightarrow 2^X$ называется максимальным аккретивным, если его график не является правильной частью графика никакого другого аккретивного оператора, действующего из X в X .

Определение 3. Оператор $A : X \rightarrow 2^X$ называется псевдоаккретивным, если

- а) множество его значений в каждой точке $x \in X$ есть выпуклое и замкнутое в X множество;
- б) из условий $x_n \rightarrow x$, $\overline{\lim} \langle U(x_n - x), y_n \rangle \leq 0$, $y_n \in Ax_n$ следует, что для каждого элемента $z \in X$ найдется элемент $y(z) \in Ax$ такой, что $\underline{\lim} \langle U(x_n - z), y_n \rangle \geq \langle U(x - z), y \rangle$.

Определение 4. Будем говорить, что отображение $A : X \rightarrow 2^X$ является отображением типа (A), если

- 1) множество Ax непусто, ограничено, выпукло и замкнуто при любом $x \in X$;
- 2) из условий $x_n \rightarrow x$, $y_n \rightarrow y$, $y_n \in Ax_n$,

$$\overline{\lim} \langle Ux_n, y_n \rangle \leq \langle Ux, y \rangle \tag{1}$$

следует, что $y \in Ax$.

Определение 5. Если в определении 4 неравенство (1) заменить на

$$\overline{\lim} \langle U(x_n - x), y_n \rangle \leq 0, \tag{2}$$

то оператор A будем называть оператором типа (A').

Если $X = H$ — гильбертово пространство, $\mu(t) \equiv t$, т.е. $U = E$ — тождественный оператор, то класс аккретивных совпадает с классом монотонных отображений (см., напр., [1], с. 22), класс псевдоаккретивных — с классом псевдомонотонных (см. [3], с. 96), класс операторов типа (A) и (A') — с оператором типа (M) ([3], с. 15; [4], с. 184).

Определение 6. Оператор $A : X \rightarrow 2^X$ называется коэрцитивным, если $\forall y \in Ax$ имеем $\langle Ux, y \rangle / \|x\| \rightarrow +\infty$ при $\|x\| \rightarrow \infty$.

2. Теоремы существования решений уравнений с аккретивными операторами можно найти, например, в [1], [5]. Разрешимость уравнений с m -аккретивными отображениями при компактных возмущениях исследовалась многочисленными авторами (см., напр., [6] и библиографию к ней). Целью данной статьи является получение достаточных условий разрешимости аккретивных уравнений с возмущениями, не удовлетворяющими требованию компактности. Предварительно получим некоторые утверждения.

Лемма 1. *Если $A : X \rightarrow 2^X$, $B : X \rightarrow 2^X$ — псевдоаккретивные отображения, то отображение $A + B$ также псевдоаккретивно.*

Для доказательства этого утверждения следует фактически повторить рассуждения ([3], с.97).

Отметим, что классы отображений типа (A) и (A') не являются замкнутыми относительно операции сложения (сравни с [3], с.152).

Лемма 2. *Если оператор $A : X \rightarrow 2^X$ есть оператор типа (A), то $A + \alpha E$, $\alpha > 0$, также является оператором типа (A).*

Доказательство. Требование 1) определения 4 очевидно. Пусть $x_n \rightarrow x$, $y_n \rightarrow y$, $y_n \in (A + \alpha E)x_n$, и верно (1). Покажем, что $y \in (A + \alpha E)x$. Действительно, т.к. $y_n = u_n + \alpha x_n$, где $u_n \in Ax_n$, то $y_n \rightarrow u + \alpha x$, $u_n \rightarrow u$ а значит, $y = u + \alpha x$. Далее, из (1) имеем

$$\overline{\lim}\langle Ux_n, u_n \rangle + \alpha \overline{\lim}\langle Ux_n, x_n \rangle \leq \langle Ux, u \rangle + \alpha \langle Ux, x \rangle. \quad (3)$$

Свойства нормы и дуального отображения в банаховом пространстве дают соотношения

$$\langle Ux, x \rangle = \mu(\|x\|)\|x\| \leq \underline{\lim}\mu(\|x_n\|)\|x_n\| \leq \overline{\lim}\mu(\|x_n\|)\|x_n\| = \overline{\lim}\langle Ux_n, x_n \rangle,$$

т.е. $\overline{\lim}\langle Ux_n, x_n \rangle \geq \langle Ux, x \rangle$. Теперь из (3) следует, что $\overline{\lim}\langle Ux_n, u_n \rangle \leq \langle Ux, u \rangle$. Так как A есть оператор типа (A), то последнее неравенство обеспечивает включение: $u \in Ax$, а значит, $y = u + \alpha x \in (A + \alpha E)x$. \square

Лемма 3. *Если $A : X \rightarrow 2^X$ — оператор типа (A') и дуальное отображение U слабо непрерывно, то оператор $A + \alpha E$ при любом $\alpha > 0$ принадлежит классу (A').*

Доказательство. Здесь вместо неравенства (3) из (2) имеем (см. обозначения доказательства леммы 2):

$$\overline{\lim}\langle U(x_n - x), u_n \rangle + \alpha \overline{\lim}\mu(\|x_n - x\|)\|x_n - x\| + \alpha \overline{\lim}\langle U(x_n - x), x \rangle \leq 0.$$

Так как $\overline{\lim}\mu(\|x_n - x\|)\|x_n - x\| \geq 0$, а $\langle U(x_n - x), x \rangle \rightarrow 0$, то $\overline{\lim}\langle U(x_n - x), u_n \rangle \leq 0$. Теперь нетрудно завершить доказательство леммы. \square

Определение 7 ([7], с.81). Говорят, что оператор $A : X \rightarrow 2^X$ обладает (s)-свойством, если из $x_n \rightarrow x \in X$, $\langle U(x_n - x), y_n - y \rangle \rightarrow 0$, $y_n \in Ax_n$, $y \in Ax$ следует, что $x_n \rightarrow x$.

Лемма 4. *Если оператор $A : X \rightarrow 2^X$ является максимальным аккретивным, обладает (s)-свойством, $D(A) = X$, дуальное отображение U в X непрерывно и слабо непрерывно, то A — псевдоаккретивное отображение.*

Доказательство. Поскольку $D(A) = X$, то множество Ax непусто для любого $x \in X$. Замкнутость и выпуклость Ax следуют из максимальной аккретивности оператора A . Пусть $x_n \rightarrow x$, и

$$\overline{\lim}\langle U(x_n - x), y_n \rangle \leq 0, \quad y_n \in Ax_n. \quad (4)$$

Запишем условие аккретивности A : $\langle U(x_n - x), y_n - y \rangle \geq 0$, $y \in Ax$, т.е. $\langle U(x_n - x), y_n \rangle \geq \langle U(x_n - x), y \rangle$. Так как U — слабо непрерывное отображение, то из последнего неравенства находим, что $\underline{\lim}\langle U(x_n - x), y_n \rangle \geq 0$. Учитывая свойство (4) последовательности $\{x_n\}$, получаем: $\lim\langle U(x_n - x), y_n \rangle = 0$, а значит, $\lim\langle U(x_n - x), y_n - y \rangle = 0$. Тогда (s)-свойство оператора

A обеспечивает сильную сходимость $x_n \rightarrow x$. Поскольку отображение A локально ограничено в любой точке $x \in X$ (см. [5], лемма 1), то $y_n \rightarrow \bar{y} \in X$ (для простоты записи обозначения для последовательности не меняем, далее мы всегда будем пользоваться этим упрощением). Переходя к пределу в неравенстве $\langle U(x_n - z), y_n - w \rangle \geq 0, \forall z \in D(A), \forall w \in Ax$ имеем $\langle U(x - z), \bar{y} - w \rangle \geq 0$. Свойство максимальной аккретивности A гарантирует теперь включение: $\bar{y} \in Ax$. Следовательно, $\lim \langle U(x_n - z), y_n \rangle = \langle U(x - z), \bar{y} \rangle, \bar{y} \in Ax$, что завершает доказательство леммы. \square

Следствие 1. Если оператор U удовлетворяет условиям леммы 4, $A : X \rightarrow 2^X$ — максимальный аккретивный оператор, и $\langle U(x_1 - x_2), y_1 - y_2 \rangle \geq \gamma_{R_0}(\|x_1 - x_2\|)$, где $\|x_i\| \leq R_0, y_i \in Ax_i, i = 1, 2, R_0 > 0, \gamma_{R_0}(t) (t > 0)$ — непрерывная возрастающая функция, $\gamma_{R_0}(0) = 0$, тогда A — псевдоаккретивное отображение.

Следствие 2. В условиях леммы 4 и следствия 1 A есть отображение типа (A') .

Следствие 3. Тождественный оператор в пространстве с непрерывным и слабо непрерывным дуальным отображением является псевдоаккретивным отображением типа (A') .

Пусть $R(Ax - f)$ — выпуклая замкнутая оболочка слабых пределов подпоследовательностей из $\{y_n - f\}$, где $y_n \in Ax_n, x_n \rightarrow x, x_n \in D(A), \bar{A}$ — максимальное аккретивное расширение оператора A .

Лемма 5. Пусть $A : X \rightarrow 2^X$ — аккретивный, а $C : X \rightarrow X$ — ограниченный однозначный псевдоаккретивный операторы, $D(A) = X, U$ — непрерывное отображение. Тогда множества $R(Ax + Cx - f)$ и $\bar{A}x + Cx - f$ совпадают при любых $x \in X$ и $f \in X$.

Доказательство. Пусть $x_n \rightarrow x$, тогда последовательность $\{y_n\} (y_n \in Ax)$ ограничена в силу локальной ограниченности A , т.е. $y_n \rightarrow \bar{y} \in X$. Кроме того, в предположениях леммы можно убедиться в деминепрерывности оператора C (см. [1], с. 23; [4], с. 190). Значит, $Cx_n \rightarrow Cx$ и $\bar{y} + Cx - f \in R(Ax + Cx - f)$. Далее, используя непрерывность U и максимальную аккретивность \bar{A} , убеждаемся в том, что $\bar{y} \in \bar{A}x$, т.е. $\bar{y} + Cx - f \in \bar{A}x + Cx - f$. Теперь нетрудно видеть, что $R(Ax + Cx - f) \subset \bar{A}x + Cx - f$. Обратное включение доказывается практически теми же рассуждениями, что и в лемме 4 из [5]. \square

Лемма 6. Пусть $C : X \rightarrow 2^X$ — локально ограниченный оператор типа (A) или (A') , U — непрерывное отображение, тогда $Cx + \alpha x - g \in R(Cx + \alpha x - g)$ при любых $\alpha > 0, g \in X$ и $x \in X$.

Доказательство. Как и в доказательстве леммы 5, установим лишь включение $R(Cx + \alpha x - g) \subset Cx + \alpha x - g$. Пусть $x_n \rightarrow x$, тогда $y_n \rightarrow \bar{y}, y_n \in Cx_n, y_n + \alpha x_n - g \rightarrow \bar{y} + \alpha x - g \in R(Cx + \alpha x - g)$. Очевидно, что $\lim \langle Ux_n, y_n \rangle = \langle Ux, \bar{y} \rangle, \lim \langle U(x_n - x), y_n \rangle = 0$. Поэтому из определений 3 и 4 имеем: $\bar{y} \in Cx$. Значит, $\bar{y} + \alpha x - g \in Cx + \alpha x - g$, что и обеспечивает справедливость доказываемого утверждения. \square

Далее решения всех уравнений понимаем в смысле следующего определения (см. [8], [5]).

Определение 8. Элемент $x_0 \in X$ называется решением уравнения

$$Ax = f, \quad (5)$$

если $0 \in R(Ax_0 - f)$.

Теорема 1. Пусть X и X^* — равномерно выпуклые банаховы пространства, дуальное отображение $U : X \rightarrow X^*$ слабо непрерывно, $A : X \rightarrow 2^X$ — аккретивный оператор, $D(A) = X, C : X \rightarrow X$ — ограниченное однозначное псевдоаккретивное отображение, существует число $r > 0$ такое, что

$$\langle Ux, y + Cx - f \rangle \geq 0 \quad \forall y \in Ax, \quad \|x\| = r, \quad f \in X. \quad (6)$$

Тогда уравнение

$$Ax + Cx = f \quad (7)$$

имеет в X по крайней мере одно решение.

Доказательство. Пусть $P_n : X \rightarrow X_n$ — оператор проектирования на конечномерное подпространство X_n пространства X (т.е. не теряя общности, считаем X сепарабельным). Для простоты рассуждений предполагаем, что последовательность $\{X_n\}$, $n > 0$, предельно плотна в X . Из леммы 3 работы [5] следует существование решения $x_n \in X_n$ уравнения $P_n(Ax + Cx - f) = 0$, причем $\|x_n\| \leq r$. Значит, найдется элемент $y^n \in \overline{Ax_n}$ такой, что $P_n(y^n + Cx_n - f) = 0$ (см. лемму 5).

Так как C — ограниченный оператор, то $Cx_n \rightarrow \bar{y} \in X$. Ограниченность $\{y^n\}$ доказывается тем же приемом, что и в теореме 1 из [5]. Следовательно, $y^n \rightarrow \bar{y} \in X$. Кроме того, $x_n \rightarrow \bar{x} \in X$. Запишем условие аккретивности оператора A : $\langle U(x_n - u), y^n - v \rangle \geq 0$, $v \in \overline{Au}$, $u \in X$ или

$$\langle U(x_n - u), Cx_n \rangle \leq \langle U(x_n - u), Cx_n + y^n - v \rangle = \langle U(x_n - u) - U(x_n - P_n u), Cx_n + y^n - v \rangle + \langle U(x_n - P_n u), P_n(Cx_n + y^n - f) \rangle + \langle U(x_n - P_n u), f - v \rangle. \quad (8)$$

Поскольку оператор U равномерно непрерывен на любом ограниченном множестве пространства X , то $U(x_n - u) - U(x_n - P_n u) \rightarrow 0$. Теперь, используя лемму 22.4 из [1] и слабую непрерывность U , из (8) при $n \rightarrow \infty$ имеем неравенство

$$\overline{\lim} \langle U(x_n - u), Cx_n \rangle \leq \langle U(\bar{x} - u), f - v \rangle, \quad v \in \overline{Au}. \quad (9)$$

Отсюда при $u = \bar{x}$ получаем $\overline{\lim} \langle U(x_n - \bar{x}), Cx_n \rangle \leq 0$. Тогда псевдоаккретивность C дает неравенство $\underline{\lim} \langle U(x_n - u), Cx_n \rangle \geq \langle U(\bar{x} - u), C\bar{x} \rangle \forall u \in X$. Теперь с учетом (9) запишем цепочку неравенств

$$\langle U(\bar{x} - u), f - v \rangle \geq \overline{\lim} \langle U(x_n - u), Cx_n \rangle \geq \underline{\lim} \langle U(x_n - u), Cx_n \rangle \geq \langle U(\bar{x} - u), C\bar{x} \rangle, \quad (10)$$

т.е. $\langle U(\bar{x} - u), f - C\bar{x} - v \rangle \geq 0$ при всех $u \in X$, $v \in \overline{Au}$. Максимальная аккретивность оператора \overline{A} и последнее неравенство гарантируют включение $f - C\bar{x} \in \overline{A\bar{x}}$. Значит, $f \in \overline{A\bar{x}} + C\bar{x}$, и лемма 5 позволяет сделать вывод о разрешимости уравнения (7). \square

Следствие 4. Утверждение теоремы 1 остается справедливым, если требование (6) заменить коэрцитивностью оператора $\overline{A} + C$.

Следствие 5. Пусть пространства X и X^* , оператор U удовлетворяют условиям теоремы 1, $C : X \rightarrow X$ — ограниченный однозначный псевдоаккретивный коэрцитивный оператор, тогда $R(C) = X$.

Следствие 6. Пусть в условиях следствия 5 требование коэрцитивности C заменено свойством: $\langle Ux, Cx - f \rangle \geq 0$ при $\|x\| \geq r > 0$ для некоторого $f \in X$. Тогда уравнение

$$Cx + \alpha x = g \quad (11)$$

разрешимо при любых $g \in X$ и $\alpha \geq 0$.

Действительно, оператор E максимальный аккретивный и $\langle Ux, Cx + \alpha x \rangle \geq \|x\|[\alpha\|x\| - \|f\|] + \langle Ux, Cx - f \rangle$. Отсюда имеем коэрцитивность отображения $C + \alpha E$, и теорема 1 гарантирует теперь существование решения (11) при любом $g \in X$.

Замечание 1. Утверждения следствий 5 и 6 остаются справедливыми, если оператор C считать ограниченным (возможно, многозначным) типа (A) или (A') (ср. с [4], с. 184). Дадим пояснения к доказательству разрешимости уравнения (11) в данных условиях. Пусть $x_n \in X_n$ ($\|x_n\| \leq r$)

есть решение уравнения $P_n(Cx + \alpha x - g = 0)$, т.е. $P_n(y^n + \alpha x_n - g) = 0$, $y^n \in Cx_n$ (см. лемму 6), $x_n \rightarrow \bar{x}$. Тогда $\langle Ux_n, y^n + \alpha x_n - g \rangle = 0$ или

$$\langle Ux_n, y^n \rangle = \langle Ux_n, g \rangle - \alpha \langle Ux_n, x_n \rangle. \quad (12)$$

Как и в ([4], с. 183), доказывается, что $y^n + \alpha x_n \rightarrow g$, т.е. $y^n \rightarrow g - \alpha \bar{x}$. Слабая полунепрерывность снизу нормы в банаховом пространстве позволяет из (12) получить соотношения

$$\overline{\lim} \langle Ux_n, y^n \rangle = \langle U\bar{x}, g \rangle - \alpha \underline{\lim} \langle Ux_n, x_n \rangle \leq \langle U\bar{x}, g - \alpha \bar{x} \rangle. \quad (13)$$

Пусть C — оператор типа (А), тогда из (13) получаем доказываемое включение: $g - \alpha \bar{x} \in C\bar{x}$. Для отображения C типа (А') это же включение выводится из очевидного неравенства

$$\langle U(x_n - \bar{x}), y^n \rangle \leq \langle U(x_n - P_n \bar{x}), g - \alpha P_n \bar{x} \rangle + \langle U(x_n - \bar{x}) - U(x_n - P_n \bar{x}), y^n \rangle.$$

Замечание 2. Усиленно непрерывный оператор $C : X \rightarrow X$ в пространстве со слабо непрерывным дуальным отображением является, очевидно, псевдоаккретивным. Поэтому теорема 1 дает достаточные условия разрешимости уравнения (5) с оператором A , представимым в виде суммы аккретивного и усиленно непрерывного отображений. Следуя терминологии теории монотонных операторов (см., напр., [1], с. 267), такие операторы можно назвать полуаккретивными.

Замечание 3. В условиях теоремы 1 заменим (6) на неравенство $\langle Ux, y + Cx \rangle \geq b\|x\|$ при $\|x\| \geq r$. Тогда при $f \in X$ имеем $\langle Ux, y + Cx - f \rangle \geq b\|x\| - \|f\| \|x\| = \|x\| \|b - \|f\|\|$, т.е. при $f \in B(0, b) = \{x : \|x\| \leq b\}$ справедливо (6). Значит, $B(0, b) \subset R(A + C)$ (ср. с [6]).

Теорема 2. Пусть в условиях теоремы 1 оператор C является однозначным ограниченным отображением типа (А'), и функционал $\varphi_u(x, v) = \langle U(x - u), v \rangle$ слабо непрерывен снизу при любом фиксированном $u \in X$. Тогда уравнение (7) имеет в X по крайней мере одно решение.

Доказательство. Покажем псевдоаккретивность оператора C . Пусть $x_n \rightarrow x$ и верно (2). Из ограниченности C имеем $Cx_n \rightarrow g$. Так как C — оператор типа (А'), то $g = Cx$, т.е. $Cx_n \rightarrow Cx$. Слабая полунепрерывность снизу функционала φ_u дает неравенство $\underline{\lim} \langle U(x_n - z), Cx_n \rangle \geq \langle U(x - z), Cx \rangle$. Доказываемое утверждение следует из теоремы 1. \square

Теорема 3. Пусть в условиях теоремы 1 оператор \bar{A} имеет слабо замкнутый график, а C есть ограниченный, возможно, многозначный оператор типа (А'). Тогда уравнение (7) разрешимо.

Доказательство. Вначале убедимся в тождественности множеств $R(Ax + Cx - f)$ и $\bar{A}x + Cx - f$ для любых x и f из X . Пусть $v^n \rightarrow x$, $u^n \in \bar{A}v^n$, $w^n \in Cv^n$. Последовательности $\{u^n\}$ и $\{w^n\}$ ограничены, поэтому $u^n \rightarrow u$, $w^n \rightarrow w$, $u \in \bar{A}x$. Поскольку $\lim \langle U(v^n - x), w^n \rangle = 0$, то $w \in Cx$. Значит, $u + w - f \in \bar{A}x + Cx - f$. Теперь доказательство завершается, как и в лемме 5.

Пусть $z^n \in Cx_n$, $x_n \in X_n$, $y^n \in \bar{A}x_n$, $P_n(y^n + z^n - f) = 0$. Тогда $x_n \rightarrow \bar{x}$, $y^n \rightarrow \bar{y}$, $z^n \rightarrow \bar{g}$. В наших предположениях $\bar{y} \in \bar{A}\bar{x}$. Так как C — отображение типа (А'), то используя (9), установим включение: $\bar{g} \in C\bar{x}$. Но $f = \bar{g} + \bar{y}$ (см. [4], с. 183), т.е. $f \in \bar{A}\bar{x} + C\bar{x}$ или $0 \in R(\bar{A}\bar{x} + C\bar{x} - f)$.

Замечание 4. В пространствах lp ($p > 1$) дуальное отображение U с масштабной функцией $\mu(t) = t^{p-1}$ удовлетворяет всем требованиям теорем 1–3 (см. [1], с. 330–331). Для сравнения с результатами [6] укажем следующее. Нетрудно проверить, что оператор $-E$ является оператором типа (А) и (А'). Однако, очевидно, он не является компактным. В то же время отображение $A : l^2 \rightarrow l^2 : Ax = \{2 - \|x\|, 0, 0, \dots\}$ (см. [3], с. 152) компактно. Но построив последовательность $\{x_n\}$, $x_n = \{x_1^n, x_2^n, \dots\}$, $x_n^i = 0$ при $i \neq n$ и $x_n^i = 1$ при $i = n$, легко установить, что A не является оператором типа (А) или (А'). Укажем также, что известные утверждения из [3], [4] о разрешимости уравнений с псевдомонотонными операторами и операторами типа (М) следуют из теорем 1–3.

3. Рассмотрим уравнение (5), имеющее непустое множество решений N , с аккретивным оператором A . Пусть пространства X и X^* , отображение U удовлетворяют условиям теоремы 1, A^h и f^δ — приближения A и f соответственно, причем A^h является суммой произвольного аккретивного отображения B^h и ограниченного однозначного псевдоаккретивного отображения C^h , $r(\overline{Ax}, \overline{A^h x}) \leq g(\|x\|)h$, где $r(\overline{Ax}, \overline{A^h x})$ — хаусдорфово расстояние в X между множествами \overline{Ax} и $\overline{A^h x}$, $\overline{A^h} = \overline{B^h} + C$, $h \geq 0$, $g(t)$ ($t \geq 0$) — непрерывная неотрицательная функция, $\|f - f^\delta\| \leq \delta$, $\delta \geq 0$. Предположим также, что $D(A) = D(A^h) = X$, $(\delta + h)/\alpha \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow 0$, т.е. можно принять, что $h/\alpha \leq k$, $k > 0$. Построим возрастающую непрерывную функцию $a(t)$, $a(0) > 0$, $a(t)t - kg(t) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow \infty$, и оператор $E^a : X \rightarrow X$, $E^a x = a(\|x\|)x$.

Лемма 7. *Оператор E^a псевдоаккретивен.*

Доказательство. Пусть $x_n \rightarrow x$ и

$$\overline{\lim} \langle U(x_n - x), E^a x_n \rangle \leq 0. \quad (14)$$

Докажем, что

$$\underline{\lim} \langle U(x_n - z), E^a x_n \rangle \geq \langle U(x - z), E^a x \rangle \quad \forall z \in X. \quad (15)$$

Так как $a(t) > 0$, то из (14) имеем неравенство $\overline{\lim} \langle U(x_n - x), x_n \rangle \leq 0$. Отсюда с учетом слабой полунепрерывности снизу нормы в X и свойства возрастания $a(t)$ устанавливаем справедливость (15). \square

Рассмотрим в X уравнение

$$A^h x + \alpha E^a x = f^\delta, \quad \alpha > 0. \quad (16)$$

В наших предположениях можем записать цепочку соотношений

$$\begin{aligned} \langle Ux, y^h + \alpha E^a x \rangle &= \langle Ux, y - y^0 \rangle + \langle Ux, y^0 \rangle + \langle Ux, y^h - y \rangle + \alpha \langle Ux, E^a x \rangle \geq \\ &\geq \mu(\|x\|)[\alpha a(\|x\|)\|x\| - \|y^0\| - hg(\|x\|)], \quad y^0 \in A(0), \quad y \in \overline{Ax} \quad \forall y^h \in \overline{A^h x}. \end{aligned}$$

Правило построения функции $a(t)$ обуславливает коэрцитивность оператора $\overline{A^h} + \alpha E^a$, а леммы 7, 1 и теорема 1 гарантируют разрешимость уравнения (16), хотя и не однозначную. Пусть x_α^γ — некоторое решение (16), $\gamma = \{\delta, h\}$.

Теорема 4. *В условиях данного пункта последовательность $\{x_\alpha^\gamma\}$ сильно сходится при $\alpha \rightarrow 0$ к решению \bar{x} уравнения (5), однозначно определяемому неравенством*

$$\langle U(\bar{x} - x), \bar{x} \rangle \leq 0 \quad \forall x \in N, \quad \bar{x} \in N. \quad (17)$$

Доказательство. Из (5) и (16) имеем

$$\begin{aligned} \langle U(x_\alpha^\gamma - x), y - y_\alpha^\gamma \rangle + \langle U(x_\alpha^\gamma - x), y_\alpha^\gamma - z_\alpha^\gamma \rangle + \alpha a(\|x_\alpha^\gamma\|)\mu(\|x_\alpha^\gamma - x\|)\|x_\alpha^\gamma - x\| = \\ \langle U(x_\alpha^\gamma - x), f - f^\delta \rangle - \alpha a(\|x_\alpha^\gamma\|)\langle U(x_\alpha^\gamma - x), x \rangle, \quad (18) \end{aligned}$$

где $y \in \overline{Ax}$, $x \in N$, $y_\alpha^\gamma \in \overline{Ax_\alpha^\gamma}$, $z_\alpha^\gamma \in \overline{A^h x_\alpha^\gamma}$, $z_\alpha^\gamma + \alpha a(\|x_\alpha^\gamma\|)\|x_\alpha^\gamma\| = f^\delta$. На основе равенства (18) нетрудно доказать (см. [9], [5]), что существует подпоследовательность из $\{x_\alpha^\gamma\}$, сильно сходящаяся при $\alpha \rightarrow 0$ к некоторому решению \bar{x} уравнения (5). Далее, из (18) при любом $x \in N$ имеем

$$\langle U(x_\alpha^\gamma - x), E^a x_\alpha^\gamma \rangle \leq [\delta/\alpha + h/\alpha g(\|x_\alpha^\gamma\|)]\mu(\|x_\alpha^\gamma - x\|),$$

откуда после перехода к пределу при $\alpha \rightarrow 0$ получим (17). Покажем, что элемент $\bar{x} \in N$, удовлетворяющий (17), единственный. Действительно, пусть

$$\begin{aligned} \langle U(\bar{x}_1 - x), \bar{x}_1 \rangle &\leq 0 \quad \forall x \in N, \quad \bar{x}_1 \in N; \\ \langle U(\bar{x}_2 - x), \bar{x}_2 \rangle &\leq 0 \quad \forall x \in N, \quad \bar{x}_2 \in N. \end{aligned}$$

Полагая в первом неравенстве $x = \bar{x}_2$, а во втором $x = \bar{x}_1$ и складывая полученные неравенства, имеем $\mu(\|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\|)\|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\| \leq 0$, т.е. $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$. Доказательство теоремы закончено.

Теорема 4 обобщает результаты о сходимости операторного метода регуляризации из работ [9], [5].

Используя леммы 2, 3, следствия 5, 6, замечания 1, 2 и теоремы 2, 3, утверждение теоремы 4 можно получить и при иных условиях на возмущенный оператор A^h .

Литература

1. Вайнберг М.М. *Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений*. – М.: Наука, 1972. – 416 с.
2. Kenmochi Nobuyuki. *Accretive mappings in Banach spaces* // Hiroshima Math. J. – 1972. – V. 2. – № 1. – P.163–177.
3. Pascali D., Sburulan S. *Nonlinear mappings of monotone type*. – Bucuresti: Ed. Acad., 1978. – 341 p.
4. Лионс Ж.-Л. *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*. – М.: Мир, 1972. – 588 с.
5. Рязанцева И.П. *О нелинейных операторных уравнениях с аккретивными отображениями* // Изв. вузов. Математика. – 1985. – № 1. – С. 42–46.
6. Morales С.Н. *Remarks on compact perturbations of m -accretive operators* // Nonlinear Anal., Theory, Meth. and Appl. – 1991. – V. 16. – № 9. – P. 771–780.
7. Гаевский Х., Греггер К., Захариас К. *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения*. – М.: Мир, 1978. – 336 с.
8. Абрамов А.А., Гайпова А.Н. *О существовании решений некоторых уравнений, содержащих разрывные монотонные преобразования* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1972. – Т. 12. – № 2. – С.525–528.
9. Альбер Я.И. *О решении методом регуляризации операторных уравнений 1 рода с аккретивными операторами в банаховом пространстве* // Дифференц. уравнения. – 1975. – Т. 11. – № 12. – С.2242–2248.
10. Рязанцева И.П. *Выбор параметра регуляризации для нелинейных уравнений с монотонным приближенно заданным оператором* // Изв. вузов. Математика. – 1982. – № 9. – С.49–53.

Нижегородский государственный
технический университет

Поступила
21.11.1994