ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1997 МАТЕМАТИКА № 7 (422)

УДК 517.518

А.К. ЛЕРНЕР

ОБ ОЦЕНКАХ СИЛЬНЫХ МАКСИМАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

1. Введение

В данной работе изучаются оценки сильных максимальных функций Харди-Литтлвуда и Фефферманa-Стейна.

Интервалом в $\mathbb{R}^N$ будем называть множество вида

$$I = \{x : a_i \le x_i \le a_i + h_i,\ i = 1, \dots, N\}\ (h_i > 0);$$

если $h_1 = \dots = h_N$, то интервал I называем кубом.

Пусть $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$. Обозначим $f_I = \frac{1}{|I|}\int_I f(t)dt$. Равенствами

$$M_{\mathrm{st}} f(x) = \sup_{I \ni x} \frac{1}{|I|} \int_I |f(y)| dy \tag{1.1}$$

и

$$f^{\#}_{\mathrm{st}} f(x) = \sup_{I \ni x} \frac{1}{|I|} \int_I |f(y) - f_I| dy \tag{1.2}$$

определяются сильные максимальные функции Харди-Литтлвуда и Фефферманa-Стейна соответственно (верхняя грань берется по всем интервалам $i \subset \mathbb{R}^N$, содержащим точку x). Если в (1.1) и (1.2) брать верхнюю грань только по кубам, содержащим точку x, то получаем обычные максимальные функции $Mf(x)$ и $f^{\#}(x)$ (см. [1], [2]).

В [3] была получена оценка функции $f^{\#}_{\mathrm{st}}$ в терминах частных модулей непрерывности функции $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ при $p > 1$. Формулировке этого результата предпошлем некоторые определения.

Пусть $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ $(1 \le p < \infty)$. Частным модулем непрерывности функции f по переменной x_j $(1 \le j \le N)$ называется функция

$$\omega_p^{(j)}(f;\delta) = \sup_{0 \le h \le \delta} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x) - f(x + he_j)|^p dx \right)^{1/p} \quad (0 \le \delta < \infty),$$

где e_j — вектор, j-я координата которого равна 1, а остальные координаты — нули. Будем называть модулем непрерывности каждую неубывающую, непрерывную, ограниченную и полуаддитивную на $[0,\infty)$ функцию $\omega(\delta)$ с $\omega(0) = 0$.

Если $\omega_1(\delta), \dots, \omega_N(\delta)$ — модули непрерывности, и $1 \le p < \infty$, то через $H_p^{\omega_1,\dots,\omega_N}$ обозначим класс всех функций $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, для каждой из которых

$$\omega_p^{(j)}(f;\delta) \le c\,\omega_j(\delta) \quad (j = 1, \dots, N;\ 0 \le \delta < \infty). \tag{1.3}$$

Наименьшую постоянную c для которой неравенства (1.3) выполняются при всех $j = 1, \dots, N$ и всех $\delta \in [0,\infty)$, будем обозначать через $N(f)$.

Пусть $\{\omega_1(\delta),\dots,\omega_N(\delta)\}$ — система модулей непрерывности. Средним модулем непрерывности для этой системы назовем функцию ([4], [5])

$$\bar\omega(\delta)=\inf_{\delta_1\cdot\ldots\cdot\delta_N=\delta}\max_{1\le j\le N}\omega_j(\delta_j).$$

Функция распределения измеримой на $\mathbb{R}^N$ функции f определяется равенством

$$\mu_f(\lambda)=|\{x\in\mathbb{R}^N:|f(x)|>\lambda\}|\quad(0\le\lambda<\infty).$$

Невозрастающей перестановкой функции f называется функция вида

$$f^*(t)=\inf\{\lambda:\mu_f(\lambda)\le t\}\quad(0\le t<\infty).$$

Будем рассматривать также функцию

$$f^{**}(t)=\frac{1}{t}\int_0^t f^*(\tau)d\tau.$$

Справедливо равенство ([6], с. 89)

$$\sup_{|E|=t}\int_E|f(x)|dx=\int_0^t f^*(\tau)d\tau\quad(0<t<\infty).\tag{1.4}$$

Отсюда следует полуаддитивность оператора $f\to f^{**}$.

Теорема. [3]. *Пусть $\omega_1,\dots,\omega_N$ — модули непрерывности, и $1<p<\infty$. Тогда для любой функции $f\in H_p^{\omega_1,\dots,\omega_N}$*

$$(f_{\mathrm{st}}^{\#})^*(t)\le c(p,N)N(f)\sup_{\delta\ge t}\delta^{-1/p}\bar\omega(\delta)\quad(0<t<\infty).$$

Вопрос об оценке $(f_{\mathrm{st}}^{\#})^*(t)$ в случае $p=1$ оставался открытым. Изучение этого вопроса составляет основную задачу данной статьи. Здесь доказывается, что для любой функции $f\in L^1(\mathbb{R}^N)$ справедлива оценка

$$(M_{\mathrm{st}}f)^*(t)\le c_N\frac{1}{t}\int_0^t\frac{\bar\omega(f;\tau)}{\tau}\log^{N-2}\frac{t}{\tau}d\tau\quad(0<t<\infty),\tag{1.5}$$

$\bar\omega(f;\tau)$ — средний модуль для системы частных модулей непрерывности $\{\omega_1^{(1)}(f;\tau),\dots,\omega_1^{(N)}(f;\tau)\}$. Поскольку $f_{\mathrm{st}}^{\#}(x)\le 2M_{\mathrm{st}}f(x)$, то аналогичная оценка справедлива и для $(f_{\mathrm{st}}^{\#})^*(t)$. В статье устанавливается, что при определенных условиях на частные модули непрерывности эта оценка окончательна в следующем смысле: существует такая функция $f\in H_1^{\omega_1,\dots,\omega_N}$, что для всех $t>0$

$$(f_{\mathrm{st}}^{\#})^*(t)\ge\frac{1}{t}\int_0^t\frac{\bar\omega(\tau)}{\tau}\log^{N-2}\frac{t}{\tau}d\tau.$$

При построении соответствующего контрпримера используется конструкция Х. Бора.

Доказательство оценки (1.5) основано на неравенстве слабого типа для сильного максимального оператора M_{st}. В терминах функции распределения это неравенство было доказано М. Гусманом ([7], см. также [8], с. 51). Оно имеет вид

$$|\{x\in\mathbb{R}^N:M_{\mathrm{st}}f(x)>\lambda\}|\le c_N\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|f(x)|}{\lambda}\Big(1+\Big(\log^+\frac{|f(x)|}{\lambda}\Big)^{N-1}\Big)dx.\tag{1.6}$$

С помощью стандартных рассуждений нетрудно показать, что неравенство (1.6) равносильно оценке

$$(M_{\mathrm{st}}f)^*(t)\le c_N\frac{1}{t}\int_0^t f^*(\tau)\log^{N-1}\frac{t}{\tau}d\tau.\tag{1.7}$$

Заметим однако, что доказательство (1.6) в работе [7] является довольно сложным. В § 3 получено прямое доказательство оценки (1.7) и показано, что (1.6) легко выводится из (1.7). При этом в § 3 устанавливаются двусторонние оценки для композиции частных максимальных функций $M_N M_{N-1} \dots M_1 f$ (которая мажорирует сильную максимальную функцию $M_{\mathrm{st}} f$). Для $N = 2$ эти оценки другим методом были доказаны А.М. Стоколосом [9]; в частности, они позволяют получить характеризацию класса $L(\log^+ L)^N$ в терминах $M_N M_{N-1} \dots M_1 f$ (отметим, что в терминах $M_{\mathrm{st}} f$ такая характеризация невозможна [10], [11]).

2. Вспомогательные предложения

Лемма 1. [5]. *Для любой системы модулей непрерывности ее средний модуль также является модулем непрерывности.*

Пусть $\omega(\delta)$ — модуль непрерывности. Тогда легко видеть, что

$$\frac{\omega(\tau)}{\tau} \le 2\frac{\omega(\delta)}{\delta} \quad (0 < \delta \le \tau < \infty). \tag{2.1}$$

Покажем, что для среднего модуля непрерывности выполняется более сильное свойство.

Лемма 2. *Пусть $\omega_1, \dots, \omega_N$ — модули непрерывности, $\bar{\omega}$ — средний модуль. Тогда*

$$\frac{\bar{\omega}(\tau)}{\tau^{1/N}} \le 2\frac{\bar{\omega}(\delta)}{\delta^{1/N}} \quad (0 < \delta \le \tau < \infty). \tag{2.2}$$

Доказательство. Используя определение среднего модуля, получим

$$\bar{\omega}(\tau) = \inf_{s_1,\dots,s_{N-1}>0} \max\Big\{\omega_1\Big(s_1 \sqrt[N]{\frac{\tau}{\delta}}\Big), \dots, \omega_{N-1}\Big(s_{N-1} \sqrt[N]{\frac{\tau}{\delta}}\Big),\ \omega_N\Big(\frac{\delta}{s_1 \cdot \ldots \cdot {}_{N-1}} \sqrt[N]{\frac{\tau}{\delta}}\Big)\Big\} \le$$

$$\le 2 \sqrt[N]{\frac{\tau}{\delta}} \inf_{s_1,\dots,s_{N-1}>0} \max\Big\{\omega_1(s_1), \dots, \omega_{N-1}(s_{N-1}),\ \omega_N\Big(\frac{\delta}{s_1 \cdot \ldots \cdot s_{N-1}}\Big)\Big\} = 2 \sqrt[N]{\frac{\tau}{\delta}} \bar{\omega}(\delta). \ \square$$

Обозначим через $L(\log^+ L)^r$ $(r > 0)$ пространство всех измеримых на $\mathbb{R}^N$ функций f, для которых

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|(\log^+ |f(x)|)^r dx < \infty.$$

(здесь $\log^+ t = \max(\log t, 0)$).

Лемма 3. *Пусть $\alpha > 0$, $r > 0$ — вещественные числа. Для любой функции $g \in L(\log^+ L)^r$ справедливо неравенство*

$$\int_0^\alpha g^*(t) \log^r \frac{\alpha}{t} dt \le 2^r \int_{\mathbb{R}^N} |g(x)|(\log^+ |g(x)|)^r dx + c_r \alpha, \tag{2.3}$$

где $c_r = \int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} \log^r \frac{1}{t} dt$.

Доказательство этой леммы содержится в ([12], т. 1, с. 59).

Лемма 4. *Пусть функция $f \in L^1$. Тогда $f \in L(\log^+ L)^r$ в том и только том случае, если для некоторого $\varepsilon_0 > 0$*

$$\int_0^{\varepsilon_0} f^*(t) \log^r \frac{\varepsilon_0}{t} dt < \infty.$$

Доказательство. Необходимость вытекает из леммы 3. Предположим, что

$$\int_0^{\varepsilon_0} f^*(t)\log^r \frac{\varepsilon_0}{t}dt < \infty.$$

Тогда

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|(\log^+|f(x)|)^r dx = \int_0^\infty f^*(t)(\log^+ f^*(t))^r dt \le$$
$$\le \int_0^\infty f^*(t)\Bigl(\log^+ \frac{\|f\|_1}{t}\Bigr)^r dt = \int_0^{\|f\|_1} f^*(t)\log^r \frac{\|f\|_1}{t}dt < \infty. \ \square$$

Обозначим через $L^1 + L^\infty$ пространство всех измеримых на $\mathbb{R}^N$ функций f, представимых в виде суммы $f = g + h$, где $g \in L^1$, $h \in L^\infty$.

Лемма 5. *Для того чтобы $f \in L^1 + L^\infty$, необходимо и достаточно, чтобы $\int\limits_0^{\varepsilon_0} f^*(t)dt < \infty$ для некоторого $\varepsilon_0 > 0$.*

Эта лемма есть следствие известного неравенства ([6], с. 108)

$$\inf_{f=g+h}(\|g\|_1 + t\|h\|_\infty) = \int_0^t f^*(\tau)d\tau \quad (0 < t < \infty).$$

Конструкция множества, рассматриваемого в следующей лемме, принадлежит Х. Бору и имеет многочисленные применения в теории сильного дифференцирования интегралов. Для полноты мы приводим оценку меры этого множества.

Лемма 6. *Пусть числа $\gamma_1,\dots,\gamma_N > 0$, $\mu > 1$ и*

$$E = \bigcup_{\substack{\beta_i \ge \gamma_i,\\ \beta_1\cdot\ldots\cdot\beta_N = \mu\gamma_1\cdot\ldots\cdot\gamma_N}} \{y : 0 \le y_i \le \beta_i,\ i = 1,\dots,N\}.$$

Тогда $|E| > \frac{1}{(N-1)!}\mu\gamma_1\cdot\ldots\cdot\gamma_N \log^{N-1}\mu$.

Доказательство. Не ограничивая общности, будем считать, что $\gamma_1,\dots,\gamma_N = 1$. Обозначим

$$S = \Bigl\{(y_1,\dots,y_{N-1}) : 1 \le y_k \le \mu\Bigl(\prod_{i=1}^{k-1} y_i\Bigr)^{-1},\ k = 1,\dots,N-1\Bigr\}$$

(если $N = 2$, то $S = \{y_1 : 1 \le y_1 \le \mu\}$),

$$A = \Bigl\{y : (y_1,\dots,y_{N-1}) \in S,\ 0 \le y_N \le \mu\Bigl(\prod_{i=1}^{N-1} y_i\Bigr)^{-1}\Bigr\}.$$

Покажем, что $A \subset E$. Пусть $y^0 = (y_1^0,\dots,y_N^0) \in A$. Положим $\beta_i^0 = y_i^0$ $(i = 1,\dots,N-1)$, $\beta_N^0 = \mu\Bigl(\prod\limits_{i=1}^{N-1}\beta_1^0\Bigr)^{-1}$. Тогда $\beta_i^0 = y_1^0 \ge 1$ $(i = 1,\dots,N-1)$. Далее, в силу определения множества A $\beta_1^0\cdot\ldots\cdot\beta_{N-1}^0 = y_1^0\cdot\ldots\cdot y_{N-1}^0 \le \mu$. Отсюда $\beta_N^0 \ge 1$.

Таким образом, $\beta_i^0 \ge 1$ $(i = 1,\dots,N)$, $\beta_1^0\cdot\ldots\cdot\beta_N^0 = \mu$. Значит, $y^0 \in \{y : 0 \le y_i \le \beta_i^0\} \subset E$, что и требовалось. Следовательно,

$$|E| > |A| = \mu\int_S\!\cdots\!\int \frac{dy_1\dots dy_{N-1}}{y_1\dots y_{N-1}} = \mu\int\limits_1^\mu \frac{dy_1}{y_1}\int\limits_1^{\mu/y_1}\frac{dy_2}{y_2}\cdots\int\limits_1^{\mu/(y_1\dots y_{N-2})}\frac{dy_{N-1}}{y_{N-1}} = \frac{1}{(N-1)!}\mu\log^{N-1}\mu. \ \square$$

3. Оценка сильной максимальной функции Харди-Литтлвуда

Пусть $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$. Максимальная функция Харди-Литтлвуда определяется равенством

$$Mf(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy,$$

где верхняя грань берется по всем кубам, содержащим точку x.

Хорошо известны неравенства ([8], с. 56)

$$\frac{c'_N}{\lambda} \int_{\{Mf > \lambda\}} |f| \le |\{Mf > \lambda\}| \le \frac{c_N}{\lambda} \|f\|_1 \quad (\lambda > 0). \tag{3.1}$$

Неравенство в правой части восходит к Харди и Литтлвуду. Левая часть неравенства (3.1) была получена в работах Стейна [13] и Герца [14]. В терминах перестановок двусторонние оценки максимальной функции содержатся в работе Беннетта и Шарпли [15]:

$$c'_N f^{**}(t) \le (Mf)^*(t) \le c_N f^{**}(t) \quad (t > 0). \tag{3.2}$$

Вектор $x = (x_1, \dots, x_N)$ будем записывать в виде $x = (x_j, \hat{x}_j)$, где $\hat{x}_j = (x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_N)$ $(j = 1, \dots, N)$. Рассмотрим частные максимальные функции

$$M_j f(x) = \sup_{I \ni x_j} \frac{1}{|I|} \int_I |f(\xi, \hat{x}_j)| d\xi \quad (j = 1, \dots, N)$$

(верхняя грань — по всем интервалам $I \subset \mathbb{R}^1$, содержащим точку x_j). Измеримость таких функций хорошо известна ([12], т. 2, с. 461). Покажем, что для $M_j f(x)$ справедливо точно такое же неравенство, как и (3.2).

Лемма 7. *Для любой функции $f \in L^1 + L^\infty$ справедливы неравенства*

$$c' f^{**}(t) \le (M_j f)^*(t) \le c f^{**}(t) \quad (0 < t < \infty,\ j = 1, \dots, N). \tag{3.3}$$

Доказательство. Предположим сначала, что $f \in L^1$. Обозначим $A_\lambda = \{x : M_j f(x) > \lambda\}$. Согласно неравенству (3.1) для п. в. $\hat{x}_j \in \mathbb{R}^{N-1}$

$$\frac{c'}{\lambda} \int_{\{x_j : M_j f(x) > \lambda\}} |f(\xi, \hat{x}_j)| d\xi \le |\{x_j : M_j f(x) > \lambda\}| \le \frac{c}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^1} |f(\xi, \hat{x}_j)| d\xi.$$

Интегрируя оба неравенства по $\hat{x}_j \in \mathbb{R}^{N-1}$ и применяя теорему Фубини, получим

$$\frac{c'}{\lambda} \int_{A_\lambda} |f(x)| dx \le |A_\lambda| \le \frac{c}{\lambda} \|f\|_1. \tag{3.4}$$

Из правой части (3.4) следует, что

$$(M_j f)^*(t) \le \frac{c}{t} \|f\|_1 \quad (0 < t < \infty). \tag{3.5}$$

Пусть теперь $f \in L^1 + L^\infty$. Докажем правую часть неравенства (3.3). Будем использовать стандартные рассуждения, восходящие к работе Кальдерона [16].

Обозначим $E = \{x \in \mathbb{R}^N : |f(x)| > f^*(t)\}$, $g(x) = (f(x) - f^*(t) \operatorname{sign} f(x)) \chi_E(x)$, $h(x) = f(x) - g(x)$. Тогда $\|g\|_1 \le t(f^{**}(t) - f^*(t))$, $\|h\|_\infty \le f^*(t)$. Далее, $M_j f(x) \le M_j g(x) + M_j h(x) \le M_j g(x) + \|h\|_\infty$. Отсюда и из (3.5) имеем

$$(M_j f)^*(t) \le (M_j g)^*(t) + \|h\|_\infty \le c\Big(\frac{\|g\|_1}{t} + \|h\|_\infty\Big) \le c f^{**}(t).$$

Для доказательства левой части (3.3) положим

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A_{(M_j f)^*(t)}; \\ 0 & \text{в остальных точках}, \end{cases}$$
$$f_2(x) = f(x) - f_1(x).$$

Заметим, что $|A_{(M_j f)^*(t)}| \le t$. Отсюда и из левой части (3.4) получим

$$\|f_1\|_1 \le c|A_{(M_j f)^*(t)}|(M_j f)^*(t) \le ct(M_j f)^*(t).$$

Поскольку $|f(x)| \le M_j f(x)$ п. в., то $\|f_2\|_\infty \le (M_j f)^*(t)$. Следовательно, в силу полуаддитивности $f \to f^{**}$

$$f^{**}(t) \le f_1^{**}(t) + f_2^{**}(t) \le \frac{\|f_1\|_1}{t} + \|f_2\|_\infty \le c(M_j f)^*(t). \ \square$$

Замечание 1. Используя более точные оценки для односторонней максимальной функции ([8], с. 57), получим, что в неравенстве (3.3) можно взять $c' = \frac{1}{2}$, $c = 2$.

Замечание 2. Из неравенств (3.2) и (3.3) вытекает, что перестановки функций $M_j f(x)$ и $Mf(x)$ эквивалентны.

Однако поточечно функции $M_j f(x)$ и $Mf(x)$ могут не оцениваться одна через другую. В качестве примера достаточно взять $f(x) = \chi_{[0,1]^N}(x)$.

Рассмотрим теперь композицию частных максимальных функций $M_N M_{N-1} \dots M_1 f(x)$. Непосредственно из леммы 7 вытекает

Теорема 1. *Для любой функции* $f \in L(\log^+ L)^{N-1}$

$$c'_N \frac{1}{t}\int_0^t f^*(\tau)\log^{N-1}\frac{t}{\tau}d\tau \le (M_N M_{N-1}\dots M_1 f)^*(t) \le \frac{c_N}{t}\int_0^t f^*(\tau)\log^{N-1}\frac{t}{\tau}d\tau. \tag{3.6}$$

Доказательство. Докажем, например, правую часть (3.6) в случае $N = 2$. Последовательно применяя неравенство (3.3), получим

$$(M_2 M_1 f)^*(t) \le c\frac{1}{t}\int_0^t (M_1 f)^*(\xi)d\xi \le c^2\frac{1}{t}\int_0^t \frac{1}{\xi}\int_0^\xi f^*(\tau)d\tau\, d\xi = c^2\frac{1}{t}\int_0^t f^*(\tau)\log\frac{t}{\tau}d\tau.$$

Аналогично теорема доказывается в общем случае. $\square$

Отметим, что при $N = 2$ неравенства (3.6) были доказаны другим способом в [9].

Из неравенства $M_{\mathrm{st}} f(x) \le M_N M_{N-1}\dots M_1 f(x)$ и (3.6) получаем

Следствие 1. Для любой функции $f \in L(\log^+ L)^{N-1}$

$$(M_{\mathrm{st}} f)^*(t) \le c_N \frac{1}{t}\int_0^t f^*(\tau)\log^{N-1}\frac{t}{\tau}d\tau. \tag{3.7}$$

Замечание. Покажем, что из неравенств (2.3) и (3.7) легко следует неравенство слабого типа для сильного максимального оператора M_{st} ([8], с. 51)

$$|\{x : M_{\mathrm{st}} f(x) > \lambda\}| \le c\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|f(x)|}{\lambda}\Big(1 + \Big(\log^+\frac{|f(x)|}{\lambda}\Big)^{N-1}\Big)dx. \tag{3.8}$$

Обозначим $\mu(\lambda)=|\{x : M_{\rm st}f(x)>\lambda\}|$. Подставляя в неравенство (3.7) $\mu(\lambda)$ вместо t, получим

$$\mu(\lambda)\le c_N\frac{1}{\lambda}\int_0^{\mu(\lambda)} f^*(\tau)\log^{N-1}\frac{\mu(\lambda)}{\tau}d\tau.$$

Возьмем некоторую постоянную c из условия $c\,c_N\int\limits_0^1\frac{1}{\sqrt{t}}\log^{N-1}\frac{1}{t}dt<1$. Применим неравенство (2.3), полагая $g(x)=\frac{f(x)}{c\lambda}$, $\alpha=\mu(\lambda)$,

$$\mu(\lambda)\le C_n\,c\int_0^{\mu(\lambda)}\Big(\frac{f}{c\lambda}\Big)^*(\tau)\log^{N-1}\frac{\mu(\lambda)}{\tau}d\tau\le$$
$$\le c_N\,c\,2^{N-1}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|f(x)|}{c\lambda}\Big(\log^+\frac{|f(x)|}{c\lambda}\Big)^{N-1}dx+\Big(c\,c_N\int_0^1\frac{1}{\sqrt{t}}\log^{N-1}\frac{1}{t}dt\Big)\mu(\lambda).$$

Отсюда

$$\mu(\lambda)\le c_N'\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|f(x)|}{\lambda}\Big(\log^+\frac{|f(x)|}{c\lambda}\Big)^{N-1}dx\le c_N''\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|f(x)|}{\lambda}\Big(1+\Big(\log^+\frac{|f(x)|}{\lambda}\Big)^{N-1}\Big)dx,$$

что и требовалось

Можно показать, что в свою очередь и неравенство (3.7) выводится из (3.8), так что эти неравенства равносильны.

Остановимся на вопросе об интегральных свойствах максимальных функций. В работе Гусмана и Уэлланда ([17], см. также [8], с. 59) была доказана

Теорема A. *Пусть $f\in L^1(\mathbb{R}^N)$. Тогда*

$$\int_{\{Mf>1\}}Mf(x)dx<\infty\Longleftrightarrow f\in L(1+\log^+L).$$

При доказательстве использовалось неравенство (3.1). С помощью перестановок такая характеристика получается следующим образом. Проинтегрируем неравенство (3.2) по $t\in(0,\varepsilon)$. Получим

$$c_N'\int_0^\varepsilon f^*(t)\log\frac{\varepsilon}{t}dt\le\int_0^\varepsilon(Mf)^*(t)dt\le c_N\int_9^\varepsilon f^*(t)\log\frac{\varepsilon}{t}dt.$$

Отсюда, а также из лемм 4 и 5 следует

Теорема A$'$. *Пусть $f\in L^1(\mathbb{R}^N)$. Тогда*

$$Mf\in L^1+L^\infty\Longleftrightarrow f\in L\log^+L.$$

Далее, если проинтегрировать по $t\in(0,\varepsilon)$ неравенство (3.7) и применить лемму 4, то получим также известное ([8], с. 62)

Утверждение. *Пусть $f\in L^1(\mathbb{R}^N)$. Тогда $f\in L(\log^+L)^N\Longrightarrow M_{\rm st}f\in L^1+L^\infty$.*

Гусман поставил вопрос о справедливости обратной импликации, т. е. о характеризации класса $L(\log^+L)^N$ в терминах $M_{\rm st}f$. Отрицательный ответ на этот вопрос содержится в работах [10] и [11]. Неравенство (3.6) показывает, что характеристика класса $L(\log^+L)^N$ возможна в терминах композиции $M_NM_{N-1}\dots M_1f$. Применяя к неравенству (3.6) те же рассуждения, что и выше, получим

Следствие 2. Пусть $f\in L^1(\mathbb{R}^N)$. Тогда

$$M_NM_{N-1}\dots M_1f\in L^1+L^\infty\Longleftrightarrow f\in L(\log^+L)^N.$$

Получим оценку перестановки сильной максимальной функции в терминах L^1-модулей непрерывности. Для функции $f \in L^1$ через $\bar{\omega}(f;\delta)$ будем обозначать средний модуль непрерывности для системы частных модулей непрерывности.

Лемма 8. *Для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ $(N \geq 2)$*

$$f^{**}(\delta) \leq c_N \frac{\bar{\omega}(f;\delta)}{\delta} \quad (0 < \delta < \infty). \tag{3.9}$$

Доказательство. Воспользуемся неравенством (см. [5])

$$f^{**}(t) - f^*(t) \leq c\frac{\bar{\omega}(f;t)}{t}.$$

Отсюда и из леммы 2 получим ($f^{**}(+\infty) = 0$, т. к. $f \in L^1$)

$$f^{**}(\delta) = \int_\delta^\infty \frac{f^{**}(t) - f^*(t)}{t} dt \leq c\int_\delta^\infty \frac{\bar{\omega}(f;t)}{t^2} dt \leq c'\frac{\bar{\omega}(f;\delta)}{\delta^{1/N}} \int_\delta^\infty \frac{dt}{t^{2-1/N}} \leq c''\frac{\bar{\omega}(f;\delta)}{\delta}. \ \square$$

Теорема 2. *Для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$*

$$(M_{\rm st}f)^*(t) \leq c_N \frac{1}{t}\int_0^t \frac{\bar{\omega}(f;\tau)}{\tau} \log^{N-2}\frac{t}{\tau} d\tau. \tag{3.10}$$

Доказательство. Теорема следует из неравенств (3.7) и (3.9)

$$(M_{\rm st}f)^*(t) \leq c\frac{1}{t}\int_0^t f^*(\tau)\log^{N-1}\frac{t}{\tau}d\tau =$$
$$= c(N-1)\frac{1}{t}\int_0^t f^{**}(\tau)\log^{N-2}\frac{t}{\tau}d\tau \leq c'\frac{1}{t}\int_0^t \frac{\bar{\omega}(f;\tau)}{\tau}\log^{N-2}\frac{t}{\tau}d\tau.$$

4. Оценка сильной максимальной функции Феффермана-Стейна

Из теоремы 2 получаем оценку

$$(f^{\#}_{\rm st})^*(t) \leq c_N \frac{1}{t}\int_0^t \frac{\bar{\omega}(f;\tau)}{\tau}\log^{N-2}\frac{t}{\tau}d\tau$$

для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$.

Покажем, что при достаточно общих условиях на модули эта оценка окончательна (отсюда будет следовать также окончательность (3.10)).

Будем предполагать, что все модули $\omega_i(\delta)$ строго возрастают и имеют один и тот же предел τ_0 при $\delta \to \infty$. В этом случае можно более естественно определить средний модуль.

Пусть $\omega_i^{-1}(\tau)$ $(0 \leq \tau < \tau_0)$ — функция, обратная к $\omega_i(\delta)$ $(i = 1, \ldots, N)$. Тогда функция, обратная к $\prod_{i=1}^n \omega_i^{-1}(\tau)$, совпадает со средним модулем непрерывности $\bar{\omega}(\delta)$ (см. [5]).

Теорема 3. *Пусть модули непрерывности $\omega_1, \ldots, \omega_N$ удовлетворяют условию*

$$\delta\int_\delta^\infty \frac{\omega_i(\tau)}{\tau^2}d\tau = O(\omega_i(\delta)) \quad (i = 1, \ldots, N). \tag{4.1}$$

Тогда существует функция $f \in H_1^{\omega_1,\ldots,\omega_N}$ такая, что для всех $t > 0$

$$(f^{\#}_{\rm st})^*(t) \geq \frac{1}{t}\int_0^t \frac{\bar{\omega}(\tau)}{\tau}\log^{N-2}\frac{t}{\tau}d\tau. \tag{4.2}$$

Доказательство. Обозначим $\alpha_i(\delta)=\omega_i^{-1}(\bar\omega(\delta))$. Тогда

$$\prod_{i=1}^{N}\alpha_i(\delta)=\delta. \tag{4.3}$$

Возьмем $\nu_1\in\mathbb{N}$ так, чтобы $\nu_1\bar\omega(1/\nu_1)\ge 2$, положим

$$\nu_{n+1}=\min\{m\in\mathbb{N}:\bar\omega(1/m)<\frac{1}{2}\bar\omega(1/\nu_n)\}.$$

Тогда

$$2\bar\omega\Big(\frac{1}{\nu_{n+1}}\Big)<\bar\omega\Big(\frac{1}{\nu_n}\Big)\le 2\bar\omega\Big(\frac{\nu_{n+1}}{\nu_{n+1}-1}\,\frac{1}{\nu_{n+1}}\Big)\le 4\bar\omega\Big(\frac{1}{\nu_{n+1}}\Big). \tag{4.4}$$

Отсюда следует

$$\alpha_i\Big(\frac{1}{\nu_{n+1}}\Big)<\frac{1}{2}\alpha_i\Big(\frac{1}{\nu_n}\Big)\quad(i=1,\dots,N). \tag{4.5}$$

Действительно, в противном случае было бы

$$\bar\omega\Big(\frac{1}{\nu_{n+1}}\Big)=\omega_i\Big(\alpha_i\Big(\frac{1}{\nu_{n+1}}\Big)\Big)\ge\omega_i\Big(\frac{1}{2}\alpha_i\Big(\frac{1}{\nu_n}\Big)\Big)\ge\frac{1}{2}\omega_i\Big(\alpha_i\Big(\frac{1}{\nu_n}\Big)\Big)=\frac{1}{2}\bar\omega\Big(\frac{1}{\nu_n}\Big),$$

а это противоречит (4.4). Обозначим $H_n=\nu_n\bar\omega\left(\frac{1}{\nu_n}\right)$, $r_n^{(i)}=\alpha_i\left(\frac{1}{\nu_n}\right)$ $(i=1,\dots,N)$. Из (4.3) и (4.5) следует, что $\nu_{n+1}>2^N\nu_n$. Отсюда и из (4.4) получим $\frac{H_{n+1}}{H_n}>\frac{2^N}{4}\ge 1$. Значит, $\{H_n\}$ строго возрастает (и $H_1\ge 2$). Возьмем теперь возрастающую последовательность $\{a_n\}$ так, чтобы интервалы $R_n=\{x: a_n\le x_i\le a_n+r_n^{(i)}H_n,\ i=1,\dots,N\}$ попарно не пересекались. Обозначим $P_n=\{x: a_n\le x_i\le a_n+r_n^{(i)},\ i=1,\dots,N\}$. Очевидно $P_i\cap P_j=\varnothing$, когда $i\ne j$. Из (4.3) следует, что $|P_n|=1/\nu_n$.

Положим[1] $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}H_n\chi_{P_n}(x)$. Покажем, что $f(x)\in H_1^{\omega_1,\dots,\omega_N}$. Оценим, например, $\omega_1^{(1)}(f;\delta)$. Обозначим $\Delta_h^{(1)}f(x)=f(x+he_1)-f(x)$. Имеем

$$\|\Delta_h^{(1)}f\|_1\le\sum_{n=1}^{\infty}\|\Delta_h^{(1)}f_n\|_1,$$

где $f_n(x)=H_n\chi_{P_n}(x)$. Легко видеть, что

$$\|\Delta_h^{(1)}f_n\|_1=2\bar\omega\Big(\frac{1}{\nu_n}\Big)\min\Big(\frac{h}{r_n^{(1)}},1\Big).$$

Пусть

$$\alpha_1\Big(\frac{1}{\nu_{s+1}}\Big)\le h<\alpha_1\Big(\frac{1}{\nu_s}\Big),\quad s\ge 2. \tag{4.6}$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|\Delta_h f_n\|_1\le 2h\sum_{n=1}^{s-1}\frac{1}{r_n^{(1)}}\bar\omega\Big(\frac{1}{\nu_n}\Big)+2\sum_{n=s}^{\infty}\bar\omega\Big(\frac{1}{\nu_n}\Big). \tag{4.7}$$

[1] Отметим, что функции такого вида были построены в работе [5] (см. также [4]).

Учитывая (4.5) и (2.1), а затем (4.1) и (4.6), получим

$$h\sum_{n=1}^{s-1}\frac{1}{r_n^{(1)}}\bar\omega\Big(\frac{1}{\nu_n}\Big)=h\sum_{n=1}^{s-1}\frac{1}{\alpha_1(1/\nu_n)}\omega_1\Big(\alpha_1\Big(\frac{1}{\nu_n}\Big)\Big)\le$$
$$\le 2h\sum_{n=1}^{s-1}\frac{\omega_1(\alpha_1(1/\nu_n))}{\alpha_1^2(1/\nu_n)}\Big(\alpha_1\Big(\frac{1}{\nu_n}\Big)-\alpha_1\Big(\frac{1}{\nu_{n+1}}\Big)\Big)\le$$
$$\le 4h\sum_{n=1}^{s-1}\frac{\omega_1(\alpha_1(1/\nu_{n+1}))}{\alpha_1(1/\nu_{n+1})\alpha_1(1/\nu_n)}\Big(\alpha_1\Big(\frac{1}{\nu_n}\Big)-\alpha_1\Big(\frac{1}{\nu_{n+1}}\Big)\Big)\le$$
$$\le 4h\sum_{n=1}^{s-1}\int\limits_{\alpha_1(1/\nu_{n+1})}^{\alpha_1(1/\nu_n)}\frac{\omega_1(t)}{t^2}dt\le 4h\int\limits_{\alpha_1(1/\nu_s)}^{\infty}\frac{\omega_1(t)}{t^2}dt\le ch\frac{\omega_1(\alpha_1(1/\nu_s))}{\alpha_1(1/\nu_s)}\le$$
$$\le c\omega_1\Big(\alpha_1\Big(\frac{1}{\nu_s}\Big)\Big)\le 4c\omega_1\Big(\alpha_1\Big(\frac{1}{\nu_{s+1}}\Big)\Big)\le 4c\omega_1(h).$$

Для оценки второго слагаемого в (4.7) используем (4.4) и (4.6). Имеем

$$\sum_{n=s}^{\infty}\bar\omega(1/\nu_n)\le 2\bar\omega(1/\nu_s)\le 8\bar\omega(1/\nu_{s+1})=8\omega_1\big(\alpha_1(1/\nu_{s+1})\big)\le 8\omega_1(h).$$

Следовательно, $\|\Delta_h^{(1)}f\|_1\le c\omega_1(h)$ $(h\le h_0)$, что и требовалось.

Пусть $1/\nu_{n+1}\le\tau<1/\nu_n$ $(n\ge 1)$. Тогда в силу (1.4)

$$f^{**}(\tau)=\frac{1}{\tau}\sup_{|E|=\tau}\int_E f(x)dx\ge\frac{1}{\tau}H_{n+1}|P_{n+1}|=\frac{1}{\tau}\bar\omega(1/\nu_{n+1})\ge\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\tau}\bar\omega(1/\nu_n)\ge\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\tau}\bar\omega(\tau).\qquad(4.8)$$

Поскольку $\int\limits_0^\tau f^*(t)dt$ возрастает, а $\bar\omega(\tau)$ ограничена, то из (4.8) следует, что для всех $\tau>0$

$$f^{**}(\tau)\ge c\frac{\bar\omega(\tau)}{\tau},\qquad(4.9)$$

где $c>0$ зависит только от модулей $\omega_1,\dots,\omega_N$.

Оценим теперь $m(\lambda)=|\{x:f_{\rm st}^{\#}(x)>\lambda\}|$. Рассмотрим сначала случай, когда $\lambda\ge H_1/4$. Пусть $H_k/4\le\lambda\le H_{k+1}/4$ и $j>k$, $k\ge 1$. Обозначим $I_\lambda(\beta_j^{(1)},\dots,\beta_j^{(N)})=\{x:a_j\le x_j\le a_j+\beta_j^{(i)},\ i=1,\dots,N\}$, где $\beta_j^{(i)}\ge\Gamma_j^{(i)}$, $\beta_j^{(1)}\cdot\ldots\cdot\beta_j^{(N)}=\frac{H_j}{2\lambda}|P_j|$. Заметим, что $2\lambda\ge H_1/2\ge 1$. Значит, $\Gamma_j^{(i)}\le\beta_j^{(i)}\le H_j|P_j|\Big(2\lambda\prod\limits_{i\ne j}\beta_j^{(i)}\Big)^{-1}\le\Gamma_j^{(i)}H_j$. Отсюда

$$P_j\subset I_\lambda(\beta_j^{(1)},\dots,\beta_j^{(N)})\subset R_j.\qquad(4.10)$$

Введем множества

$$I_{\lambda,j}=\bigcup_{\substack{\beta_j^{(i)}\ge\Gamma_j^{(i)},\\ \beta_j^{(1)}\cdot\ldots\cdot\beta_j^{(N)}=\frac{H_j}{2\lambda}|P_j|}}I_\lambda(\beta_j^{(1)},\dots,\beta_j^{(N)}).$$

Из дизъюнктности R_j и (4.10) следует дизъюнктность $I_{\lambda,j}$ $(j>k)$. Согласно лемме 6

$$|I_{\lambda,j}|>\frac{1}{(N-1)!}\frac{H_j}{2\lambda}|P_j|\log^{N-1}\frac{H_j}{2\lambda}.\qquad(4.11)$$

Обозначим $J_\lambda=\bigcup\limits_{j=k+1}^{\infty}I_\lambda,j$. Покажем, что

$$J_\lambda\subset\{x:f_{\rm st}^{\#}(x)>\lambda\}.\qquad(4.12)$$

Пусть $x \in J_\lambda$. Возьмем интервал $I \equiv I_\lambda(\beta_j^{(1)}, \dots, \beta_j^{(N)}) \subset I_{\lambda,j}$, содержащий x. Тогда $|I| = \frac{H_j}{2\lambda}|P_j|$ и в силу (4.10) $f(y) = 0$ для $y \in I \setminus P_j$. Имеем

$$f^{\#}_{\mathrm{st}}(x) \geq \frac{1}{2|I|^2}\int_I\int_I |f(u) - f(v)|du\,dv = \frac{1}{|I|^2}\int_{I\setminus P_j} |f(u) - f(v)|du\,dv =$$

$$= \frac{|I| - |P_j|}{|I|^2}\int_{P_j} f(u)du = \frac{|I| - |P_j|}{|I|^2}H_j|P_j| = \frac{4\lambda^2 H_j|P_j|(\frac{H_j}{2\lambda}|P_j| - |P_j|)}{H_j^2|P_j|^2} =$$

$$= \frac{2\lambda H_j - 4\lambda^2}{H_j} = \lambda\Big(2 - \frac{4\lambda}{H_j}\Big) > \lambda.$$

Таким образом, включение (4.12) доказано. Предположим теперь, что ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} H_j|P_j|\log^{N-1} H_j$ сходится.

Согласно (4.11) и (4.12) для всех $\lambda \geq H_1/4$

$$m(\lambda) \geq |J_\lambda| = \sum_{j=k+1}^{\infty} |I_{\lambda,j}| \geq \frac{1}{(N-1)!}\sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{H_j}{2\lambda}|P_j|\log^{N-1}\frac{H_j}{2\lambda} =$$

$$= \frac{2}{(N-1)!}\int_{\{f>4\lambda\}} \frac{f(x)}{4\lambda}\log^{N-1}\frac{f(x)}{2\lambda}dx \geq \frac{2}{(N-1)!}\int_{\{f>2\lambda\}} \frac{f(x)}{4\lambda}\log^{N-1}\frac{f(x)}{4\lambda}dx. \tag{4.13}$$

Пусть $\lambda < H_1/4$. Обозначим

$$I_\lambda = \bigcup_{\substack{\beta^{(i)} \geq \Gamma_1^{(i)},\\ \beta^{(1)}\cdot\ldots\cdot\beta^{(N)} = \frac{H_1}{2\lambda}|P_1|}} \{x : a_1 + \Gamma_1^{(i)} - \beta^{(i)} \leq x_i \leq a_1 + \Gamma_1^{(i)},\ i = 1, \dots, N\}.$$

Легко видеть, что I_λ не пересекается с P_n при $n \geq 2$. Так же, как и выше, $|I_\lambda| > \frac{1}{(N-1)!}\cdot$ $\cdot\frac{H_1}{2\lambda}|P_1|\log^{N-1}\frac{H_1}{2\lambda}$ и для всех $x \in I_\lambda$ $\quad f^{\#}_{\mathrm{st}}(x) > \lambda(2 - \frac{4\lambda}{H_1}) > \lambda$. Значит,

$$m(\lambda) > \frac{1}{(N-1)!}\cdot\frac{H_1}{2\lambda}|P_1|\log^{N-1}\frac{H_1}{2\lambda}. \tag{4.14}$$

Заметим, что для всех $\lambda < H_1/4$

$$\int_{\{f>4\lambda\}} \frac{f(x)}{4\lambda}\log^{N-1}\frac{f(x)}{4\lambda} = \frac{1}{4\lambda}\sum_{n=1}^{\infty} H_n|P_n|\log^{N-1}\frac{H_n}{4\lambda} \leq$$

$$\leq c\Big(\frac{1}{\lambda}\sum_{n=1}^{\infty} H_n|P_n|\log^{N-1} H_n + \frac{1}{\lambda}\log^{N-1}\frac{1}{\lambda}\sum_{n=1}^{\infty} H_n|P_n|\Big) \leq$$

$$\leq c'\frac{1}{\lambda}\log^{N-1}\frac{1}{\lambda} \leq c''\frac{H_1}{2\lambda}|P_1|\log^{N-1}\frac{H_1}{2\lambda}.$$

Поэтому из (4.14) получим

$$m(\lambda) > \frac{1}{(N-1)!}\cdot\frac{H_1}{2\lambda}|P_1|\log^{N-1}\frac{H_1}{2\lambda} \geq c\int_{\{f>4\lambda\}} \frac{f(x)}{4\lambda}\log^{N-1}\frac{f(x)}{4\lambda}dx, \tag{4.15}$$

где $c > 0$ зависит только от модулей $\omega_1, \dots, \omega_N$. Объединяя оценки (4.13) и (4.15), имеем для всех $\lambda > 0$

$$m(\lambda) \geq c\int_{\{f>4\lambda\}} \frac{f(x)}{4\lambda}\log^{N-1}\frac{f(x)}{4\lambda}dx.$$

Отсюда и из леммы 3 следует, что

$$\int_0^{m(\lambda)} \frac{f^*(\tau)}{4\lambda}\log^{N-1}\frac{m(\lambda)}{\tau}d\tau \leq 2^{N-1}\int_{\{f>4\lambda\}} \frac{f(x)}{4\lambda}\log^{N-1}\frac{f(x)}{4\lambda}dx + c_N m(\lambda) \leq cm(\lambda).$$

Следовательно, для всех $\lambda > 0$

$$c\frac{1}{m(\lambda)}\int_0^{m(\lambda)} f^*(\tau)\log^{N-1}\frac{m(\lambda)}{\tau}d\tau \le \lambda. \tag{4.16}$$

Заметим, что функция $\varphi(\xi) = \frac{1}{\xi}\int\limits_0^{\xi} f^*(\tau)\log^{N-1}\frac{\xi}{\tau}d\tau$ не возрастает. Пусть $t > 0$. Если $m(\lambda) \le t$, то из (4.16) получим

$$\lambda \ge \frac{1}{m(\lambda)}\int_0^{m(\lambda)} f^*(\tau)\log^{N-1}\frac{m(\lambda)}{\tau}d\tau \ge c\frac{1}{t}\int_0^{t} f^*(\tau)\log^{N-1}\frac{t}{\tau}d\tau.$$

Отсюда и из (4.9) имеем

$$(f^{\#}_{\mathrm{st}})^*(t) = \inf\{\lambda : m(\lambda) \le t\} \ge c\frac{1}{t}\int_0^t f^*(\tau)\log^{N-1}\frac{t}{\tau}d\tau =$$
$$= c(N-1)\frac{1}{t}\int_0^t f^{**}(\tau)\log^{N-2}\frac{t}{\tau}d\tau \ge c\frac{1}{t}\int_0^t \frac{\bar\omega(\tau)}{\tau}\log^{N-2}\frac{t}{\tau}d\tau.$$

Значит, функция $f(x)/c$ удовлетворяет условиям теоремы. □

Замечание 3. Если ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} H_j|P_j|\log^{N-1} H_j$ расходится, то в силу (4.13) имеем $(f^{\#}_{\mathrm{st}})^*(t) \equiv +\infty$, так что неравенство (4.2) тривиально выполняется. Можно доказать, что сходимость ряда $\sum\limits_{j=1}^{\infty} H_j|P_j|\log^{N-1} H_j$ эквивалентна тому, что $\int\limits_0^1 \frac{\bar\omega(\tau)}{\tau}\log^{N-2}\frac{1}{\tau}d\tau < \infty$ ([5], доказательство теоремы 5).

Автор глубоко благодарен В.И. Коляде, под руководством которого выполнена данная работа, а также А.М. Стоколосу за обсуждение работы и полезные консультации.

Литература

1. Hardy G.H., Littlewood J.E. *A maximal theorem with function-theoretic applications* // Acta Math. – 1930. – V. 54. – P. 81–116.
2. Fefferman C., Stein E.M. *H^p spaces of several variables* // Acta Math. – 1972. – V. 129. – P. 137–193.
3. Коляда В.И. *Оценки средних колебаний по многомерным интервалам в терминах интегральной гладкости* // Math. Nachr. – 1987. – Bd. 133. – S. 43–61.
4. Коляда В.И. *О вложении некоторых классов функций многих переменных* // Сиб. матем. журн. – 1973. – Т.14. – № 4. – С. 766–790.
5. Коляда В.И. *О вложении в классы $\varphi(L)$* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1975. – Т. 39; – № 2. – С. 418–437.
6. Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М. *Интерполяция линейных операторов*. – М.: Наука, 1978.
7. de Guzman M. *An inequality for the Hardy-Littlewood maximal operator with respect to a product a differentiation bases* // Studia math. – 1974. – T. 49. – S. 185–194.
8. Гусман М. *Дифференцирование интегралов в $\mathbb{R}^n$*. – М.: Мир, 1978.
9. Стоколос А.М. *Теория дифференцирования интегралов над евклидовыми пространствами базисами из интервалов*: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Одесса, 1984.
10. Гоголадзе Л.Д. *О максимальной функции Харди-Литтлвуда* // Сообщ. АН Груз. ССР. – 1983. – Т. III. – № 2. – С. 257–259.

11. Bagby R.J. *A note on the strong maximal functions* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1983. – V. 88. – № 4. - P. 648–650.
12. Зигмунд А. *Тригонометрические ряды.* Т. 1, 2. – М.: Мир, 1965.
13. Stein E.M. *Note on the class* $L \log L$ // Studia math. – 1969. – T. 31. – S. 305–310.
14. Herz C. *The Hardy-Littlewood maximal theorem* // Symp. on Harmonic Analysis, Univ. of Warwick, 1968.
15. Bennett C., Sharpley R. *Weak-type inequalities for* H^p *and BMO* // Proc. Symp. Pure Math. – 1979. – V. 35. – № 1. – P. 201–229.
16. Calderon A.P. *Spaces between* L^1 *and* L^∞ *and the theorem of Marcinkiewicz* // Studia math. – 1966. – T. 26. – S. 273–299.
17. de Guzman M., Welland G.V. *On the differentiation of integrals* // Rev. Union mat. Argent. y Asoc. fis. Argent. – 1971. – V. 25. – P. 253–276.

Одесский государственный университет

Поступила
28.02.1995