ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2004 МАТЕМАТИКА № 10 (509)

УДК 514.752

Н.И. ЖУКОВА

СВЯЗНОСТЬ ЭРЕСМАНА ДЛЯ СЛОЕНИЙ С ОСОБЕННОСТЯМИ И ГЛОБАЛЬНАЯ СТАБИЛЬНОСТЬ СЛОЕВ

Введение

Теория связностей в расслоенных пространствах занимает центральное место в дифференциальной геометрии. В отличие от расслоений топологическое пространство слоев слоения может быть "плохим". Например, пространство слоев слоения на торе T^2, слои которого — иррациональные обмотки, имеет тривиальную топологию. В [1] введено понятие связности Эресмана для слоений как естественное обобщение связности Эресмана в расслоении, где в основу определения положено существование переносов горизонтальных кривых вдоль вертикальных кривых с помощью вертикально-горизонтальных гомотопий. Такие гомотопии применялись в глобальной дифференциальной геометрии и ранее (напр., [2]–[4]).

В данной работе для слоения $(M, \mathcal{F})$ с особенностями в смысле Г. Сусмана [5] и П. Стефана [6] определяем связность Эресмана как некоторое обобщенное распределение $\mathfrak{M}$ на многообразии M, позволяющее переносить горизонтальные кривые, т. е. кривые, касательные векторы к которым принадлежат $\mathfrak{M}$, вдоль вертикальных кривых. В отличие от регулярного случая такие переносы являются многозначными отображениями. Поэтому мы определяем группу $*\mathfrak{M}$-голономии $*H_{\mathfrak{M}}(L, a)$ произвольного слоя L слоения $(M, \mathcal{F})$ как группу преобразований некоторого фактор-множества горизонтальных кривых. Слоения с особенностями, обладающие связностью Эресмана, называем *эресмановыми. Обобщенные эресмановы слоения* вводятся, когда роль горизонтальных кривых играют только те интегральные кривые $\mathfrak{M}$, которые не имеют особых точек, отличных от конечных.

В данной работе при выполнении некоторых естественных дополнительных условий доказаны теоремы о глобальной стабильности компактного слоя с конечной фундаментальной группой и с конечной группой голономии для обобщенных эресмановых слоений и для эресмановых слоений с особенностями. Эти теоремы можно рассматривать как аналоги классической теоремы Риба о глобальной стабильности компактного слоя с конечной фундаментальной группой, доказанной им для слоений класса C^r, $r \geq 2$, коразмерности один на компактных многообразиях [13]. Показано, что трансверсально полные римановы слоения и вертикально полные вполне геодезические слоения с особенностями обладают естественными связностями Эресмана.

1. Слоения с особенностями

Все многообразия далее предполагаются гладкими класса C^r, $r \geq 1$, связными, со счетной базой и хаусдорфовыми, если не оговорено противное. Все окрестности предполагаются открытыми, а пути, кривые и отображения — кусочно-гладкими.

Пусть M — гладкое n-мерное многообразие. Функция $\mathcal{T}$, ставящая в соответствие каждой точке $x \in M$ $p(x)$-мерное подпространство $\mathcal{T}_x$ касательного пространства T_xM, называется *обобщенным распределением* на M. Распределение $\mathcal{T}$ называется *гладким*, если для любого вектора $Y \in \mathcal{T}_x$ существует гладкое векторное поле X, заданное в некоторой окрестности U_x точки x и такое, что $X_x = Y$, $X_y \in \mathcal{T}_y$ при любом $y \in U_x$.

Погруженное подмногообразие L многообразия M называется *интегральным многообразием* обобщенного распределения $\mathcal{T}$, если для любого $x \in L$ выполняется равенство $T_xL = \mathcal{T}_x$. Интегральное многообразие L называется *максимальным,* если оно связное и совпадает с каждым связным интегральным многообразием, его содержащим. Если через каждую точку $x \in M$ проходит некоторое интегральное многообразие, то говорят, что обобщенное распределение $\mathcal{T}$ *интегрируемо.*

Совокупность $\mathcal{F} = \{L_\alpha,\ \alpha \in J\}$ максимальных интегральных многообразий L_α обобщенного интегрируемого распределения $\mathcal{T}$ называется *гладким слоением с особенностями.* Элементы разбиения L_α, рассматриваемые как подмногообразия в M, называются *слоями* слоения $\mathcal{F}$.

Пусть $(M, \mathcal{F})$ — гладкое слоение с особенностями. Известно [5]–[7], что в каждой точке $x \in M$ существует карта (U, φ), обладающая свойствами:

(F_1) $\varphi(U) = V \times W$, где V — окрестность нуля в $\mathbb{R}^p$, W — окрестность нуля в $\mathbb{R}^q$, $p = p(x)$ — размерность центрального слоя $L(x)$, проходящего через точку x, а $q = n - p$;

(F_2) $\varphi(x) = (0, 0) \in V \times W$;

(F_3) для любого слоя $L \in \mathcal{F}$ имеет место равенство $\varphi(L \cap U) = V \times l$, где

$$l := \{w \in W \mid \varphi^{-1}(0, w) \in L\}.$$

Карту (U, φ), обладающую свойствами (F_1)–(F_3), будем называть *расслоенной* в точке x, а U — *расслоенной окрестностью.* Будем говорить также, что x — *центр этой карты.* Не нарушая общности, можно считать, что V и U — окрестности, гомеоморфные $\mathbb{R}^p$ и $\mathbb{R}^q$ соответственно. Далее под картой понимаем именно такие расслоенные карты.

Компоненты линейной связности пересечения $U \cap L_\alpha$ будем называть *локальными слоями* слоя L_α в этой карте или в окрестности U.

Подчеркнем, что в расслоенной окрестности U_x точки x размерность $p(y)$ любого слоя $L(y)$, $y \in U_x$, не меньше, чем $p(x)$. Поэтому функция размерности слоев $p(x)$, $x \in M$, является полунепрерывной снизу.

Поскольку $p(x) \le n$, $x \in M$, где $n = \dim M$, то существует максимальная размерность p_0 слоев слоения с особенностями $\mathcal{F}$. Точка x называется *регулярной,* если через нее проходит слой размерности p_0. Точки из M, не являющиеся регулярными, называются *особыми.* Если $\dim L = p_0$, то слой L называется *регулярным,* в противном случае L называется *особым слоем.* Слоения, все слои которых имеют постоянную размерность, называются *регулярными.* Поэтому регулярные слоения образуют подмножество слоений с особенностями.

Обозначим через M^0 объединение всех слоев максимальной размерности p_0. Если $x \in M^0$ и (U, φ) — расслоенная карта в точке x, то для любого $y \in U$ слой $L(y)$ также имеет размерность p_0, следовательно, $U \subset M^0$. Таким образом, объединение регулярных слоев M^0 является открытым подмножеством в M.

2. Связность Эресмана для слоений с особенностями

Далее под $(M, \mathcal{F})$ всегда понимаем слоение с особенностями.

Обобщенное распределение $\mathfrak{M}$ на многообразии M будем называть *трансверсальным* слоению $\mathcal{F}$, если на M существует такая риманова метрика g, что $\mathfrak{M}_x$ совпадает с ортогональным дополнением к касательному пространству $\mathcal{T}_x$ к слою $L(x)$ в евклидовом векторном пространстве (T_xM, g_x), т. е. для любого $x \in M$ имеет место разложение

$$T_xM = \mathcal{T}_x \dot{\oplus} \mathfrak{M}_x,$$

где $\dot{\oplus}$ — символ ортогональной суммы. Подпространства $\mathfrak{M}_x$, $x \in M$, а также векторы из $\mathfrak{M}$ будем называть горизонтальными. Кусочно-гладкая кривая σ называется горизонтальной, если все ее касательные векторы горизонтальны. Распределение $\mathcal{T}$, касательное к слоям слоения $\mathcal{F}$, будем называть вертикальным. Кривая h называется вертикальной, если она лежит в одном слое слоения $\mathcal{F}$.

Вертикально-горизонтальной гомотопией (кратко в. г. г.) называем кусочно-гладкое отображение $H : I_1 \times I_2 \to M$, где $I_1 = I_2 = [0,1]$, обладающее следующим свойством: для любой точки $(s,t) \in I_1 \times I_2$ кривая $H|_{I_1 \times \{t\}}$ горизонтальная, а $H|_{\{s\} \times I_2}$ вертикальная. Пару кривых $(H|_{I_1 \times \{0\}}, H|_{\{0\} \times I_2})$ называем *базой* для в. г. г. Пара путей (σ, h) с общим началом $\sigma(0) = h(0)$, где σ — горизонтальный путь, а h вертикальный, называется *допустимой* для в. г. г. Обобщенное распределение $\mathfrak{M}$, трансверсальное слоению с особенностями $\mathcal{F}$, называем *связностью Эресмана для* $\mathcal{F}$, если для любой допустимой пары путей (σ, h) существует в. г. г. с базой (σ, h).

Регулярные слоения со связностями Эресмана называются в [8] и [9] эресмановыми. Продолжая эту терминологию, называем слоение с особенностями $(M, \mathcal{F})$, допускающее связность Эресмана $\mathfrak{M}$, *эресмановым* и обозначаем через $(M, \mathcal{F}, \mathfrak{M})$.

Пусть H — в. г. г. с базой (σ, h) и $\widetilde{\sigma} := H|_{I_1 \times \{1\}}$. Будем говорить, что кривая $\widetilde{\sigma}$ получена переносом σ вдоль пути h посредством в.г.г. H, и будем обозначать это через $\sigma \xrightarrow{H} > \widetilde{\sigma}$.

Заметим, что связность Эресмана $\mathfrak{M}$ не является, вообще говоря, гладким обобщенным распределением. Однако $\mathfrak{M}$ обладает некоторой "обобщенной гладкостью", которая обеспечивается тем, что $\mathfrak{M}$ является ортогональным дополнением к гладкому обобщенному распределению $\mathcal{T}$, касательному к $\mathcal{F}$, в некоторой римановой метрике g на M.

Введенное здесь понятие связности Эресмана для слоений с особенностями является естественным расширением понятия связности Эресмана для регулярных слоений из [1].

3. Группа $*\mathfrak{M}$-голономии для слоения с особенностями

Мы вводим понятие группы $*\mathfrak{M}$-голономии для любого слоения с особенностями, обладающего связностью Эресмана $\mathfrak{M}$.

Пусть $(M, \mathcal{F}, \mathfrak{M})$ — произвольное эресманово слоение. Подчеркнем, что в отличие от регулярных слоений для слоения $(M, \mathcal{F}, \mathfrak{M})$ нарушается единственность в. г. г. с данной базой (σ, h). Это уже отмечалось при исследовании трансверсально полных римановых слоений с особенностями в [10].

Пусть Ω_a — множество горизонтальных кривых с началом в точке a. Введем в Ω_a отношение эквивалентности ρ следующим образом. Две кривые σ_1 и σ_2 из Ω_a называем ρ-эквивалентными, если существуют некоторая вертикальная петля h_0, гомотопная постоянной петле e_a в слое $L(a)$, и в. г. г. K с базой (σ_1, h_0) такие, что $K|_{I_1 \times \{1\}} = \sigma_2$.

Прямая проверка показывает, что ρ действительно является отношением эквивалентности в Ω_a. Класс ρ-эквивалентности, содержащий путь σ, будем обозначать через $[\sigma]_\rho$, а множество классов эквивалентности — через Ω_a/ρ.

Предложение 1. *Отображение*

$$\Phi_a : \Omega_a/\rho \times \pi_1(L, a) \to \Omega_a/\rho : ([\sigma]_\rho, [h]) \mapsto [\widetilde{\sigma}]_\rho,$$

где $[h] \in \pi_1(L, a)$, H *— некоторая в. г. г. с базой* (σ, h) *и* $\sigma \xrightarrow{H} > \widetilde{\sigma}$, *определяет правое действие фундаментальной группы* $\pi_1(L, a)$ *слоя* $L(a)$ *на фактор-множестве* Ω_a/ρ.

Доказательство. Покажем, что отображение Φ_a определено корректно, т. е. не зависит

1) от выбора петли h из класса $[h] \in \pi_1(L, a)$ и от выбора в. г. г. H с базой (σ, h);

2) от выбора σ из класса $[\sigma]_\rho$.

1. Пусть h и h' — два гомотопных пути в слое L, соединяющие a с b, и σ — любая кривая из Ω_a. Пусть H и H' — любые в. г. г. с базами (σ, h) и (σ, h') соответственно, и $\sigma \xrightarrow{H} > \widetilde{\sigma}$, $\sigma \xrightarrow{H'} > \sigma'$. Покажем, что $[\widetilde{\sigma}]_\rho = [\sigma']_\rho$. Действительно, т. к. пути h и h' гомотопны в L, то петля $\phi_0 := h'^{-1}h$ гомотопна постоянному пути e_b в L. Поэтому полагая

$$K(s,t) := \begin{cases} H(s, 1-2t), & \text{если } (s,t) \in I_1 \times [0, \frac{1}{2}]; \\ H'(s, 2t-1), & \text{если } (s,t) \in I_1 \times [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

видим, что K — в. г. г. с базой $(\widetilde{\sigma}, \phi_0)$, причем $K|_{I_1 \times \{1\}} = \sigma'$, следовательно, $[\widetilde{\sigma}]_\rho = [\sigma']_\rho$.

2. Пусть $\sigma \in \Omega_a$, h — произвольная вертикальная петля в точке a, H — некоторая в.г.г. с базой (σ, h). Возьмем любой путь $\sigma^* \in [\sigma]_\rho$. При этом существует в.г.г. K с базой (σ, h_0), где $[h_0] = [e_a] \in \pi_1(L, a)$, осуществляющая ρ-эквивалентность σ^* и σ, т.е. $K(s, 0) = \sigma^*(s)$, $K(s, 1) = \sigma(s)$, $s \in I_1$, и $K(0, t) = h_0(t)$, $t \in I_2$. Определим отображение $H^* : I_1 \times I_2 \to M$ по формуле

$$H^*(s,t) := \begin{cases} K(s, 2t), & \text{если } (s,t) \in I_1 \times [0, \frac{1}{2}]; \\ H(s, 2t-1), & \text{если } (s,t) \in I_1 \times [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Поскольку $K(s, 1) = H(s, 0) = \sigma(s)$, $s \in I$, то H^* является, как K и H, в.г.г. Базой H^* служит пара путей $(\sigma^*, h_0 h)$. Кроме того, $\sigma^* \xrightarrow{H^*} > \widetilde{\sigma}$. Из определения Φ_a, учитывая, что $[h_0 h] = [h] \in \pi_1(L, a)$, применяя доказанное в п. 1, имеем $\Phi_a([\sigma^*]_\rho, [h]) = [\widetilde{\sigma}]_\rho$. Таким образом, отображение Φ_a определено корректно.

Нетрудно проверить, что Φ_a задает правое действие группы $\pi_1(L, a)$ на фактор-множестве Ω_a/ρ. □

Ядро действия Φ_a, равное $\ker \Phi_a = \{[h] \in \pi_1(L, a) \mid \Phi_a([\sigma]_\rho, [h]) = [\sigma]_\rho \ \forall [\sigma]_\rho \in \Omega_a/\rho\}$, является нормальным делителем фундаментальной группы $\pi_1(L, a)$. Следовательно, определена фактор-группа $*H_{\mathfrak{M}}(L, a) := \pi_1(L, a)/\ker \Phi_a$. Назовем группу $*H_{\mathfrak{M}}(L, a)$ *группой* $*\mathfrak{M}$*-голономии для эресманова слоения с особенностями* $(M, \mathcal{F}, \mathfrak{M})$.

Так же, как в [11], $*$ указывает на то, что $*H_{\mathfrak{M}}(L, a)$ — группа голономии, относящаяся к слоению с особенностями и отличающаяся от известных групп голономии. Для регулярных слоений каждый класс эквивалентности $[\sigma]_\rho$ состоит из одной горизонтальной кривой σ, поэтому множество Ω_a/ρ биективно множеству Ω_a. В этом случае группа $*H_{\mathfrak{M}}(L, a)$ совпадает с группой $H_{\mathfrak{M}}(L, a)$, введенной в [1] и названной в [12], [9] группой $\mathfrak{M}$-голономии.

Предложение 2. *Для любых двух точек a и b из слоя L слоения $(M, \mathcal{F}, \mathfrak{M})$ существует изоморфизм $*H_{\mathfrak{M}}(L, a) \to *H_{\mathfrak{M}}(L, b)$, определенный с точностью до внутренних автоморфизмов этих групп.*

Доказательство. В силу линейной связности слоя L существует путь g в L, соединяющий a с b. Обозначим через $[g]$ класс путей, гомотопных g в слое L. Определим отображение $A_{[g]} : *H_{\mathfrak{M}}(L, a) \to *H_{\mathfrak{M}}(L, b)$ равенством $A_{[g]}([h] \ker \Phi_a) := [g^{-1} h g] \ker \Phi_b$, рассматривая указанные классы смежности как элементы соответствующих групп голономии. Из этого определения следует, что $A_{[g]}$ не зависит от выбора пути из класса $[g]$. Если k — другой путь, соединяющий a с b в слое L, то $A_{[k]}^{-1} \circ A_{[g]}$ — внутренний автоморфизм группы $*H_{\mathfrak{M}}(L, a)$, соответствующий элементу $[gk^{-1}]$, а $A_{[k]} \circ A_{[g]}^{-1}$ — внутренний автоморфизм группы $*H_{\mathfrak{M}}(L, b)$, соответствующий элементу $[g^{-1}k]$, откуда вытекает доказываемое утверждение. □

В силу предложения 2 можно говорить о группе $*\mathfrak{M}$-голономии слоя L, понимая под этим алгебраическую группу $*H_{\mathfrak{M}}(L)$, которая не зависит от выбора $a \in L$. Будем говорить, что слой L имеет конечную группу $*\mathfrak{M}$-голономии, если эта группа конечна.

4. Обощенная связность Эресмана для слоения с особенностями и ее голономия

Пусть $(M, \mathcal{F})$ — слоение с особенностями и M^0 — объединение слоев максимальной размерности. Пусть $\mathfrak{M}$ — обобщенное распределение на M, трансверсальное слоению $\mathcal{F}$. Будем использовать терминологию, введенную в п. 2. Обобщенное распределение $\mathfrak{M}$ будем называть *обобщенной связностью Эресмана слоения* $\mathcal{F}$, если для любой допустимой пары путей (σ, h), где $\sigma(0, 1) \subset M^0$, существует в.г.г. с базой (σ, h). Слоения $(M, \mathcal{F})$ с особенностями, допускающие обобщенную связность Эресмана, будем называть *обобщенными эресмановыми слоениями.* Таким образом, расширяем понятие связности Эресмана для слоений с особенностями, ограничиваясь горизонтальными путями σ, не содержащими особых точек, отличных от конечных точек $\sigma(0)$ и $\sigma(1)$.

Пусть $(M, \mathcal{F}, \mathfrak{M})$ — обобщенное эресманово слоение.Тогда распределение $\mathfrak{M}^0 := \mathfrak{M}|_{M^0}$ является связностью Эресмана для регулярного слоения $(M^0, \mathcal{F}^0)$, где $\mathcal{F}^0 := \mathcal{F}|_{M^0}$. Положим $\Omega_a^0 := \{\sigma \in \Omega_a \mid \sigma((0,1]) \subset M^0\}$. Если $\sigma \in \Omega_a^0$, то любой путь σ', ρ-эквивалентный σ, также принадлежит Ω_a^0. Поэтому $\Omega_a^0/\rho \subset \Omega_a/\rho$. Для любой допустимой пары путей (σ, h), где $\sigma \in \Omega_a^0$, существует в. г. г. с базой (σ, h). Положим $\Phi_a^0([\sigma]_\rho, [h]) := [\widetilde{\sigma}]_\rho$, где $[h] \in \pi_1(L, a)$, $\sigma \overset{H}{\longrightarrow} > \widetilde{\sigma}$. Точно так же, как при доказательстве предложения 1, проверяется, что Φ_a^0 определяет правое действие фундаментальной группы $\pi_1(L, a)$ на фактор-множестве Ω_a^0. Будем называть фактор-группу $H_{\mathfrak{M}}(L, a) := \pi_1(L, a)/\ker \Phi_a^0$ *группой $\mathfrak{M}$-голономии слоя L* в точке a обобщенного эресманова слоения $(M, \mathcal{F}, \mathfrak{M})$.

Заметим, что для всякого слоя $L_\alpha \subset M^0$ группа $H_{\mathfrak{M}}(L_\alpha, x)$ совпадает с группой $\mathfrak{M}$-голономии слоя L_α в точке $x \in L_\alpha$ регулярного эресманова слоения $(M^0, \mathcal{F}^0, \mathfrak{M}^0)$.

Предложение 3. *Для любого слоя L эресманова слоения с особенностями $(M, \mathcal{F}, \mathfrak{M})$ существует эпиморфизм групп $\nu : {*H_{\mathfrak{M}}(L, a)} \to H_{\mathfrak{M}}(L, a)$, для которого коммутативна диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
& \pi_1(L,a) \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\
{*H_{\mathfrak{M}}(L,a)} \arrow[rr, "\nu"] & & H_{\mathfrak{M}}(L,a),
\end{tikzcd} \tag{4.1}$$

где α и β — соответствующие фактор-отображения.

Доказательство. Для эресманова слоения с особенностями $(M, \mathcal{F}, \mathfrak{M})$ отображение Φ_a^0 можно рассматривать как сужение действия Φ_a, поскольку $\Omega_a^0/\rho \subset \Omega_a/\rho$. Так как ядра действий Φ_a и Φ_a^0 связаны включением $\ker \Phi_a \subset \ker \Phi_a^0$, то определено отображение

$$\nu : {*H_{\mathfrak{M}}(L, a)} \to H_{\mathfrak{M}}(L, a) : [h] \ker \Phi_a \mapsto [h] \ker \Phi_a^0,$$

где $[h] \in \pi_1(L, a)$. Отсюда, учитывая, что $\alpha([h]) := [h] \ker \Phi_a$, $\beta([h]) := [h] \ker \Phi_a^0$, получаем коммутативную диаграмму (4.1). $\square$

Так как M^0 — открытое (возможно несвязное) подмногообразие в M, то для каждого слоя $L \subset M^0$ определена ростковая группа голономии $\Gamma(L, a)$, $a \in L$, общепринятая в теории слоений [13]. Как известно, определен естественный эпиморфизм групп $\chi : H_{\mathfrak{M}}(L, a) \to \Gamma(L, a)$, удовлетворяющий равенству $\chi \circ \beta = \gamma$, где $\gamma : \pi_1(L, a) \to \Gamma(L, a)$ — проекция, ставящая в соответствие элементу $[h] \in \pi_1(L, a)$ росток голономных диффеоморфизмов вдоль пути h. Следующее утверждение устанавливает взаимосвязь между различными группами голономии регулярного слоения $(M^0, \mathcal{F}^0)$.

Следствие 1. Для любого слоя $L \subset M^0$ эресманова слоения с особенностями коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
& \pi_1(L,a) \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[d, "\beta"] \arrow[dr, "\gamma"] & \\
{*H_{\mathfrak{M}}(L,a)} \arrow[r, "\nu"] & H_{\mathfrak{M}}(L,a) \arrow[r, "\chi"] & \Gamma(L,a),
\end{tikzcd}$$

где α, β, γ — соответствующие фактор-отображения, ν, χ — эпиморфизмы группы.

Если для допустимой пары путей (σ, h) существует *единственная* в. г. г. H с базой (σ, h), $\sigma \overset{H}{\longrightarrow} > \widetilde{\sigma}$, $h \overset{H}{\longrightarrow} > \widetilde{h}$, то будем говорить, что кривая $\widetilde{\sigma}$ получена *переносом σ вдоль h*, а путь $\widetilde{h}$ *получен переносом h вдоль σ*, и обозначать это через $\sigma \overset{h}{\longrightarrow} > \widetilde{\sigma}$, $h \overset{\sigma}{\longrightarrow} > \widetilde{h}$, как и в регулярном случае.

5. Свойства обобщенного эресманова слоения

Пусть $(M, \mathcal{F}, \mathfrak{M})$ — обобщенное эресманово слоение. Рассмотрим карту (U, φ) в точке a, $\varphi(U) = V \times W$. При этом $\mathcal{F}_U := \{V \times y,\, y \in W\}$ — тривиальное слоение в U, а $\pi : U \to U/\mathcal{F}_U$ — проекция на пространство слоев. Будем говорить, что распределение $\mathfrak{M}$ обладает свойством *локальной трансверсальной проектируемости,* если в любой точке $a \in M$ существует такая расслоенная карта (U, φ), что для произвольной кривой $\sigma \in \Omega_a^0$, $\sigma((0,1]) \subset U$, в каждой точке y из локального слоя L_a существует кривая $\sigma_y \in \Omega_y^0$, гладко зависящая от y и удовлетворяющая равенству $\pi \circ \sigma_y = \pi \circ \sigma$.

Везде далее в этом пункте предполагается, что обобщенное эресманово слоение $(M, \mathcal{F}, \mathfrak{M})$ удовлетворяет следующим условиям:

- (C_0) объединение M^0 слоев максимальной размерности является связным подмножеством в M;
- (C_1) для любого особого слоя L существует такой горизонтальный путь $\sigma \in \Omega_a$, что $\sigma(s) \in M^0$ при всех $s \in (0,1]$, $\sigma(0) = a \in L$;
- (C_2) распределение $\mathfrak{M}$ обладает свойством локальной трансверсальной проектируемости.

Лемма 1. *Пусть $L = L(a)$ — особый слой и σ — такая горизонтальная кривая, что $\sigma(s) \in M^0$ при всех $s \in [0,1)$, $\sigma(0) = b$ и $\sigma(1) = a$. Тогда для любого вертикального пути h с началом в точке b существует единственная в. г. г. с базой (σ, h).*

Доказательство. Пусть $\sigma \in \Omega_b$ удовлетворяет условию леммы, h — путь в слое $L(b)$, $h(0){=}b$. Так как $\mathcal{F}$ — обобщенное эресманово слоение, то существует некоторая в. г. г. H с базой (σ, h). Предположим, что существует другая в. г. г. K с базой (σ, h). Для любого $\tau \in (0,1)$ имеет место $\sigma|_{[0,\tau]} \in \Omega_b^0$. Поскольку в M^0 существует единственная в. г. г. с базой $(\sigma|_{[0,\tau]}, h)$, то необходимо $H|_{[0,\tau] \times I_2} = K|_{[0,\tau] \times I_2}$, и, следовательно, $H|_{[0,1) \times I_2} = K|_{[0,1) \times I_2}$. В силу непрерывности H и K и хаусдорфовости M отсюда вытекает равенство $H = K$. $\square$

Лемма 2. *Пусть $L = L(a)$ — особый слой. Тогда*

1) *существует такая карта (U, φ) в точке a, что для любой кривой $\sigma \in \Omega_a$ из U и любого пути h в локальном слое L_a, $h(0) = a$, существует в. г. г. H в U с базой (σ, h);*
2) *если g — путь, гомотопный h в L_a, то существует такая в. г. г. K в U с базой (σ, g), что пути $\widetilde{h}$ и $\widetilde{g}$, где $h \overset{H}{\longrightarrow} > \widetilde{h}$, $g \overset{K}{\longrightarrow} > \widetilde{g}$, гомотопны в слое $L_{\sigma(1)}$.*

Доказательство. 1) Пусть карта (U, φ) с центром в a, σ и $\mathcal{F}_U$ удовлетворяют определению трансверсальной проектируемости распределения $\mathfrak{M}$, $\delta := \pi \circ \sigma$, где $\pi : U \to U/\mathcal{F}_U$. Возьмем любой путь h в локальном слое L_a, $h(0) = a$. Тогда согласно (C_2) для любой точки $h(t)$ существует такая кривая $\sigma_{h(t)}$, что $\pi \circ \sigma_{h(t)} = \delta$. Отображение $H(s,t) := \sigma_{h(t)}(s)$, где $s, t \in [0,1]$, является в. г. г. с базой (σ, h). Так как $\sigma_{h(t)}(s)$ гладко зависит от $h(t)$, то путь $\widetilde{h}(t) := \sigma_{h(t)}(1)$ кусочно-гладкий и принадлежит локальному слою $L_{\sigma(1)}$. Согласно лемме 1 существует единственная в. г. г. с базой $(\sigma^{-1}, \widetilde{h})$, следовательно, это есть в. г. г. $H(1-s, t), (s,t) \in I_1 \times I_2$. Отсюда H — кусочно-гладкое отображение.

2) Пусть $\Phi(t, \tau)$, $t, \tau \in [0,1]$, — гомотопия, связывающая пути h и g в локальном слое L_a, где $\Phi(t,0) = h(t)$, $\Phi(t,1) = g(t)$, $\Phi(0,\tau) = a$, $\Phi(1,\tau) = h(1)$. Отображение $\widetilde{\Phi}(t,\tau) := \sigma_{\Phi(t,\tau)}(1)$, $t, \tau \in [0,1]$, является в. г. г., связывающей пути $\widetilde{h}$ и $\widetilde{g}$ в локальном слое $L_{\sigma(1)}$. $\square$

Будем называть *элементом (горизонтальной) голономии вдоль* горизонтальной кривой $\sigma : [0,1] \to M$ обобщенного эресманова слоения $(M, \mathcal{F}, \mathfrak{M})$ семейство диффеоморфизмов $\mu_s : V_0 \to V_s$, $s \in I$, где

(1) V_0 — окрестность точки $\sigma(0)$ в слое $L(\sigma(0))$, а V_s — p-мерное вложенное подмногообразие в слое $L(\sigma(s))$, $s \in (0,1]$, $p = \dim L(\sigma(0))$;

(2) $\mu_s(\sigma(0)) = \sigma(s)$ для всех $s \in I$;

(3) для каждого фиксированного $x \in V_0$ кривая $\mu_s(x)$, $s \in I$, является горизонтальной кривой с параметром s;

(4) $\mu_0 = \mathrm{id}_{V_0}$ — тождественное отображение.

Как известно [1], для любой горизонтальной кривой σ регулярного эресманова слоения существует единственный элемент голономии.

Лемма 3. *Пусть $L = L(a)$ — особый слой и σ — любая кривая из Ω^0_a. Тогда найдется такая расслоенная карта (U, φ) в точке a, что для локального слоя $V_0 := L_a$ существует элемент голономии $\mu_s : V_0 \to V_s$, $s \in I$, вдоль σ.*

Доказательство. Пусть (U, φ) — окрестность в точке a, удовлетворяющая лемме 2. Существует такое число $s_0 \in (0, 1]$, что $\sigma(s) \in U$ при $s \in [0, s_0]$. Согласно лемме 2 в каждой точке $y \in L_a$ определена горизонтальная кривая $\sigma_y(s)$, $s \in [0, s_0]$, являющаяся переносом $\sigma|_{[0,s_0]}$ в точку y вдоль пути h в L_a, соединяющего a с y. Положим $\mu_s(y) := \sigma_y(s)$ при всех $s \in [0, s_0]$. Заметим, что $V_s := \mu_s(L_a)$ — слой слоения $\mathcal{F}_U$, проходящего через точку $\sigma(s)$. Значит, V_s — p-мерное вложенное подмногообразие локального слоя $L_{\sigma(s)}$. При этом μ_s, $s \in [0, s_0]$, — элемент голономии вдоль горизонтальной кривой $\sigma|_{[0,s_0]}$. Пусть $\varphi(U) \supseteq V \times W$ и $p = \dim L$. Тогда в точке $c := \sigma(s_0)$ существует такая расслоенная карта (U_0, φ_0) с центром в $c \in L_\alpha$, что $U_0 \subset U \cap M^0$. Учитывая $\varphi(L_\alpha \cap U) = V \times l$, где $l \subset W$, считаем, не нарушая общности, что существует такое $(p_0 - p)$-мерное вложенное подмногообразие W_1 в W, что $U_0 = \varphi^{-1}(V \times W_1)$ — открытая окрестность точки c в $L_\alpha \cap U$. Так как $\sigma|_{[s_0,1]}$ — горизонтальная кривая регулярного слоения $(M^0, \mathcal{F}^0)$, то для нее существует элемент голономии $\nu_s : \mathcal{V}_{s_0} \to \mathcal{V}_s$, $s \in [s_0, 1]$, относительно слоения $(M^0, \mathcal{F}^0)$. При этом $\mathcal{V}_{s_0}$ — локальный слой слоения $(M^0, \mathcal{F}^0)$ в карте (U_0, φ_0), проходящий через точку $\sigma(s_0)$, а $\mathcal{V}_s$ — окрестность точки $\sigma(s)$ в слое $L(\sigma(s))$. Положим $\mu_s := \nu_s \circ \mu_{s_0} : V_0 \to V_s$ при $s \in [s_0, 1]$, где $V_s := \mu_s(V_0)$ — вложенное p-мерное подмногообразие в $\mathcal{V}_s$. Тогда μ_s, $s \in [s_0, 1]$, — элемент голономии вдоль $\sigma|_{[s_0,1]}$. В результате получаем элемент горизонтальной голономии $\mu_s, s \in I$, вдоль всего пути σ. $\square$

Замечание 1. Подчеркнем, что в отличие от регулярного случая элемент голономии вдоль пути $\sigma \in \Omega^0_a$, если a — особая точка, не единственный, он зависит, в частности, от выбора карты (U, φ).

Лемма 4. *Пусть $L = L(a)$ — особый слой и $\sigma \in \Omega^0_a$. Пусть g и h — гомотопные пути в слое $L(b)$, где $b = \sigma(1)$, $\delta = \sigma^{-1}$. Тогда пути $\widetilde{h}$ и $\widetilde{g}$, где $h \overset{\delta}{\to} > \widetilde{h}$, $g \overset{\delta}{\to} > \widetilde{g}$, гомотопны в особом слое L.*

Доказательство. Пусть $\Phi_\tau(t)$, $t, \tau \in [0, 1]$, — гомотопия, соединяющая пути $g(t)$ и $h(t)$ в слое $L(b) \subset M^0$. Согласно лемме 1 определен перенос $\Phi_\tau \overset{\sigma}{\to} > \widetilde{\Phi}_\tau$. Нетрудно проверить, что $\widetilde{\Phi}_\tau(t)$, $t, \tau \in [0, 1]$, — гомотопия в слое L, соединяющая пути $\widetilde{h}$ и $\widetilde{g}$. $\square$

6. Глобальная стабильность компактного слоя обобщенного эресманова слоения

Теорема 1. *Пусть $(M, \mathcal{F}, \mathfrak{M})$ — обобщенное эресманово слоение, удовлетворяющее условиям (C_0), (C_1) и (C_2). Если существует регулярный компактный слой $L \in \mathcal{F}$ с конечной фундаментальной группой $\pi_1(L, b)$, то каждый слой этого слоения компактен и имеет конечную фундаментальную группу.*

Доказательство. Предположим, что существует компактный слой L максимальной размерности с конечной фундаментальной группой $\pi_1(L, b)$, $b \in L$. Так как L — слой регулярного слоения $(M^0, \mathcal{F}^0)$, допускающего связность Эресмана $\mathfrak{M}_0$, то, как показано в [12] (см. также [9]), все слои слоения $(M^0, \mathcal{F}^0)$ компактны и имеют конечные фундаментальные группы.

Пусть N — произвольный особый слой слоения $(M, \mathcal{F}, \mathfrak{M})$, $a \in N$. Благодаря выполнению условия (C_1) существует такая кривая $\delta \in \Omega^0_a$, что $\delta|_{(0,1]} \subset M^0$. Тогда слой $L = L(b)$, где $b = \delta(1)$, принадлежит M^0, поэтому как указано выше, L — компактный слой с конечной фундаментальной группой. Обозначим δ^{-1} через σ, при этом $\sigma(s) \in M^0$ для всех $s \in [0,1)$ и $\sigma(1) = a$. Будем рассматривать универсальное накрывающее пространство $\overline{L}$ для L как совокупность классов $\{h\}$ гомотопных путей в L с началом в точке b, а универсальное накрывающее пространство $\overline{N}$ для N как множество классов $\{g\}$ гомотопных путей в N с началом в точке a. При этом универсальные накрывающие отображения $f_1 : \overline{L} \to L$ и $f_2 : \overline{N} \to N$ задаются равенствами $f_1(\{h\}) := h(1)$ и $f_2(\{g\}) := g(1)$ соответственно, где $\{h\} \in \overline{L}$, $\{g\} \in \overline{N}$. Пространство $\overline{L}$ компактно как конечнолистное накрытие компактной базы L. Определим отображение $f : \overline{L} \to \overline{N}$ следующим образом. Зафиксируем точки $b_0 \in f_1^{-1}(b)$ и $a_0 \in f_2^{-1}(a)$. Пусть x — любая точка из $\overline{L}$, соединим b_0 с x путем h в $\overline{L}$. Если $\widetilde{h} := f_1 \circ h$, то $(\sigma, \widetilde{h})$ — допустимая пара путей. Согласно лемме 1 существует единственная в. г. г. с базой $(\sigma, \widetilde{h})$. Пусть $\widetilde{h} \xrightarrow{\sigma}> \widetilde{g}$, $\widetilde{g}$ — путь в слое N и $\widetilde{g}(0) = a$. Поэтому определен путь g в $\overline{N}$ с началом в a_0, накрывающий путь $\widetilde{g}$. Положим $f(x) := g(1)$. Если h' — другой путь в $\overline{L}$, соединяющий b_0 с x, то в силу односвязности $\overline{L}$ пути h и h' гомотопны, следовательно, гомотопны пути $\widetilde{h}$ и $\widetilde{h'} := f_1 \circ h'$. Пусть $\widetilde{h'} \xrightarrow{\sigma} > \widetilde{g'}$. Согласно лемме 3 пути $\widetilde{g}$ и $\widetilde{g'}$ гомотопны в слое N, поэтому накрывающие их пути g и g' с началом в a_0 гомотопны в $\overline{N}$. Отсюда вытекает, что $g(1) = g'(1)$ и, следовательно, отображение $f : \overline{L} \to \overline{N}$ определено корректно.

На $\overline{L}$ и $\overline{N}$ индуцируются гладкие структуры, относительно которых f_1 и f_2 — локальные диффеоморфизмы. Сохраним введенные выше обозначения. Пусть $\sigma \xrightarrow{\widetilde{h}} > \widetilde{\sigma}$, тогда $\widetilde{\sigma} \in \Omega^0_{x_1}$, где $x_1 = f_1(x)$, $x \in \overline{L}$. Согласно лемме 3 существует элемент голономии μ_s, $s \in I$, вдоль горизонтальной кривой $\widetilde{\delta} := \widetilde{\sigma}^{-1}$, причем $\mu_1 : V_0 \to V_1$ — диффеоморфизм некоторой окрестности V_0 точки $y_1 := \widetilde{g}(1) = f_2(y)$, где $y = g(1)$, в слое N, а V_1 — вложенное подмногообразие в окрестности U_1 точки x_1 в L. Считаем, что U_1 и V_0 — правильно накрытые окрестности для накрытий f_1 и f_2 соответственно. Пусть U_1' и V_0' — такие окрестности в точках x и y, что $f_1|_{U_1'} : U_1' \to U_1$, $f_2|_{V_0'} : V_0' \to V_0$ — диффеоморфизмы. Композиция $(f_1|_{U_1'})^{-1} \circ \mu_1 \circ f_2|_{V_0'}$ является диффеоморфизмом V_0' на некоторое вложенное подмногообразие $\widetilde{V}$ в U_1', обратным к $f|_{\widetilde{V}}$. Отсюда вытекает, что $f : \overline{L} \to \overline{N}$ — регулярное дифференцируемое и, следовательно, открытое отображение. Благодаря компактности $\overline{L}$ и связности $\overline{N}$ отображение f сюръективно. Следовательно, $\overline{N}$ и слой N также компактны. Поэтому накрытие $f_2 : \overline{N} \to N$ конечнолистно, а фундаментальная группа $\pi_1(L, b)$ конечна. □

Следствие 2. Если эресманово слоение с особенностями $(M, \mathcal{F}, \mathfrak{M})$, удовлетворяющее условиям (C_0)–(C_2), имеет регулярный компактный слой с конечной фундаментальной группой, то все его слои компактны и имеют конечные фундаментальные группы.

Замечание 2. Теорема 1 является аналогом классической теоремы Риба о глобальной стабильности [13]. Если гладкое класса C^r, $r \geq 2$, слоение $\mathcal{F}$ коразмерности один на компактном многообразии M имеет компактный слой с конечной фундаментальной группой, то согласно теореме 1 любой слой этого слоения компактен, а его фундаментальная группа конечна.

7. Теоремы о глобальной стабильности слоев эресманова слоения с особенностями

Везде в этом пункте $(M, \mathcal{F}, \mathfrak{M})$ — эресманово слоение с особенностями, удовлетворяющее условиям (C_0)–(C_2).

Голономные накрытия. Пусть L — произвольный слой эресманова слоения и $*H_{\mathfrak{M}}(L, a)$ — его группа $*\mathfrak{M}$-голономии. В пункте 3 определили действие Φ_a фундаментальной группы $\pi_1(L, a)$ на фактор-множестве Ω_a/ρ. По нормальному делителю $\rho_* := \ker \Phi_a$ фундаментальной группы $\pi_1(L, a)$ построим регулярное накрывающее отображение $f_0 : L_0 \to L$. При этом имеет место равенство $f_{0*}(\pi_1(L_0, x_0)) = \rho_*$, где $f_0(x_0) = a$, а $f_{0*} : \pi_1(L_0, x_0) \to \pi_1(L, a)$ — индуцированный гомоморфизм фундаментальных групп. Группа накрывающих преобразований этого накрытия изоморфна группе $*H_{\mathfrak{M}}(L,a)$. Будем называть $f_0 : L_0 \to L$ *$*\mathfrak{M}$-голономным накрытием* для слоя L эресманова слоения с особенностями $(M, \mathcal{F}, \mathfrak{M})$.

Теорема 2. *Эресманово слоение с особенностями $(M, \mathcal{F}, \mathfrak{M})$ обладает следующими свойствами:*

1) *для каждого регулярного слоя L и любого особого слоя N существует сюръективное регулярное отображение $r : L_0 \to N_0$, где L_0 и N_0 — $*\mathfrak{M}$-голономные накрытия для L и N соответственно;*
2) *существует такое многообразие L_0, что для любого регулярного слоя L_α определено $*\mathfrak{M}$-голономное накрытие $f_\alpha : L_0 \to L_\alpha$.*

Доказательство. 1) Пусть слой L удовлетворяет условиям теоремы и $r_1 : L_0 \to L$ — его $*\mathfrak{M}$-голономное накрытие. Возьмем любой другой слой N слоения $\mathcal{F}$, пусть $r_2 : N_0 \to N$ — $*\mathfrak{M}$-голономное накрытие для N. Как известно, любые два слоя регулярного эресманова слоения на связном многообразии можно соединить горизонтальной кривой, поэтому благодаря выполнению условий (C_0) и (C_1) существует такая кривая $\sigma \in \Omega_a^0$, что $\sigma(0) = a \in N$, $\sigma(1) = b \in L$. Пусть $\delta := \sigma^{-1}$. Определим отображение $r : L_0 \to N_0$ следующим образом. Зафиксируем некоторые точки $x_0 \in r_1^{-1}(b) \subset L_0$, $y_0 \in r_2^{-1}(a) \subset N_0$ и положим $r(x_0) := y_0$. Соединим точку x_0 с произвольной точкой x путем h в L_0. Пусть $\widetilde{h} := r_1 \circ h$ и $\widetilde{h} \overset{\delta}{\longrightarrow}> \widetilde{g}$. Тогда $\widetilde{g}$ — путь в слое N с началом в точке a. Существует единственный путь g в N_0 с началом в y_0, накрывающий путь $\widetilde{g}$. Положим $r(x) := g(1)$. Возьмем другой путь h' в L_0, соединяющий x_0 с x. Пусть $\widetilde{h'} := r_1 \circ h'$ и $\widetilde{h'} \overset{\delta}{\longrightarrow} > \widetilde{g'}$. Поскольку $[\delta]_\rho = \delta$ и $[\widetilde{h}\,\widetilde{h}'^{-1}] = r_{1*}([hh'^{-1}]) \in \ker \Phi_b$, то, если $\delta \overset{\widetilde{h}}{\longrightarrow} > \widetilde{\delta}$, $\delta \overset{\widetilde{h'}}{\longrightarrow} > \delta'$, имеем $\widetilde{\delta} = \delta'$. Отсюда вытекает $\widetilde{g}(1) = \widetilde{g'}(1)$, т. е. путь $\widetilde{g}\,\widetilde{g}'^{-1}$ замкнут в точке a. Согласно лемме 4 перенос вдоль δ пути, гомотопного петле $\widetilde{h}\,\widetilde{h}'^{-1}$, является путем, гомотопным петле $\widetilde{g}\,\widetilde{g}'^{-1}$. Покажем, что элемент $[\widetilde{g}\,\widetilde{g}'^{-1}] \in \pi_1(N,a)$ принадлежит $\ker \Phi_a$. Предположим противное, пусть существует такая кривая $\varepsilon \in \Omega_a$, что $\Phi_a([\widetilde{g}\,\widetilde{g}'^{-1}], [\varepsilon]_\rho) = [\widetilde{\varepsilon}]_\rho$, где $[\widetilde{\varepsilon}]_\rho \neq [\varepsilon]_\rho$. Тогда $\Phi_b([\widetilde{h}\,\widetilde{h}'^{-1}], [\sigma\varepsilon]_\rho) = [\sigma\widetilde{\varepsilon}]_\rho$, где $[\sigma\varepsilon]_\rho \neq [\sigma\widetilde{\varepsilon}]_\rho$, что противоречит $*\mathfrak{M}$-голономности накрытия r_1. Следовательно, $[\widetilde{g}\,\widetilde{g}'^{-1}] \in \ker \Phi_a = r_{2*}\pi_1(N_0, y_0)$. Поэтому пути g и g', где g' имеет начало в y_0 и накрывает $\widetilde{g'}$, имеют общие концы, т. е. $g(1) = g'(1)$, и отображение $r : L_0 \to N_0$ определено корректно.

Пусть z — произвольная точка из N_0 и g_0 — путь в N_0, соединяющий y_0 с z, $\widetilde{g}_0 := r_2 \circ g_0$. Так как $(M, \mathcal{F}, \mathfrak{M})$ — эресманово слоение с особенностями, то существует некоторая в. г. г. K с базой $(\sigma, \widetilde{g}_0)$. Пусть $\widetilde{g}_0 \overset{K}{\longrightarrow} > \widetilde{h_0}$. Поскольку $\widetilde{h}_0(0) = b$, то существует путь h_0 в L_0 с началом в b_0, накрывающий $\widetilde{h}_0$. По определению $r(h_0(1)) = g_0(1) = z$. Таким образом, отображение $r : L_0 \to N_0$ сюръективно.

Регулярность отображения r доказывается так же, как регулярность отображения $f : \overline{L} \to \overline{N}$ в теореме 1.

2) Если $\dim N = \dim L = p_0$, то $N \subset M^0$ и из доказанного вытекает, что $r : L_0 \to N_0$ — накрывающее отображение. Так как все рассуждения первой части доказательства верны для любых регулярных слоев N и L, то определено отображение $r^{-1} : N_0 \to L_0$, которое также является накрывающим. Таким образом, $r : L_0 \to N_0$ — диффеоморфизм, поэтому многообразия N_0 и L_0 можно отождествить. $\square$

Теорема 3. *Пусть $(M, \mathcal{F}, \mathfrak{M})$ — эресманово слоение с особенностями, удовлетворяющее условиям (C_0)–(C_2). Если существует компактный слой L максимальной размерности с конечной группой голономии $*H_{\mathfrak{M}}(L, x_0)$, то все слои этого слоения компактны и имеют конечные группы $*\mathfrak{M}$-голономии.*

Доказательство. Если существует компактный слой L с конечной группой $*\mathfrak{M}$-голономии, то его $*\mathfrak{M}$-голономное накрытие $r_1 : L_0 \to L$ является конечнолистным, а потому пространство

L_0 является компактным. Пусть N — произвольный слой этого слоения и $r_2 : N_0 \to N$ — $*\mathfrak{M}$-голономное накрывающее отображение. Согласно теореме 2 существует гладкое сюръективное отображение $r : L_0 \to N_0$. Поэтому компактность L_0 влечет компактность N_0 и N. Следовательно, $r_2 : N_0 \to N$ — конечнолистное накрытие. Отсюда вытекает, что группа $*H_{\mathfrak{M}}(N, a), a \in N$, изоморфная группе накрывающих преобразований этого накрытия, также конечна. $\square$

Следствие 3 ([14]). Пусть $(M, \mathcal{F})$ — регулярное слоение со связностью Эресмана $\mathfrak{M}$. Если существует компактный слой L с конечной группой голономии $H_{\mathfrak{M}}(L, x_0)$, то каждый слой этого слоения компактен и имеет конечную группу $\mathfrak{M}$-голономии.

Замечание 3. 1. В [12], [9] было показано, что утверждение следствия 3 вытекает из свойств графика $G_{\mathfrak{M}}(\mathcal{F})$ регулярного слоения $\mathcal{F}$ со связностью Эресмана $\mathfrak{M}$.

2. Для регулярных трансверсально полных римановых слоений в [15] доказана глобальная стабильность собственнного слоя L с конечной (ростковой) группой голономии $\Gamma(L, x_0)$.

Замечание 4. Теоремы, аналогичные теоремам 3 и 4, имеют место и для обобщенных эресмановых слоений и их групп $\mathfrak{M}$-голономии.

8. Примеры эресмановых слоений с особенностями

1. *Римановы слоения.* Пусть $(M, \mathcal{F})$ — слоение с особенностями. Оно называется *римановым,* если на M существует такая риманова метрика g, относительно которой любая геодезическая γ, ортогональная слою слоения $\mathcal{F}$ в одной точке, ортогональна слоям этого слоения в любой своей точке. Будем называть такие геодезические γ ортогональными (слоению $\mathcal{F}$). Если $(M, \mathcal{F})$ — регулярное слоение, то, как доказано в [16], указанное свойство является характеристическим для риманова слоения.

Риманово слоение с особенностями $(M, \mathcal{F})$ называется *трансверсально полным,* если натуральный параметр на каждой максимальной горизонтальной геодезической изменяется на всей числовой прямой. Обозначим через $\mathfrak{M}$ обобщенное распределение на M, ортогональное слоению $\mathcal{F}$. В [10] доказано, что для любой допустимой пары путей (γ, h), где γ — кусочно-гладкая ортогональная геодезическая, существует в. г. г. H с базой (γ, h). Таким образом, имеет место

Предложение 4. *Пусть $(M, \mathcal{F})$ — трансверсально полное риманово слоение с особенностями. Тогда обобщенное ортогональное распределение $\mathfrak{M}$ является связностью Эресмана для этого слоения, причем роль горизонтальных кривых играют кусочно-гладкие ортогональные геодезические.*

Заметим, что орбиты гладкого изометрического действия связной группы Ли G на полном римановом многообразии (M, g) образуют риманово слоение $(M, \mathcal{F})$ с особенностями. Обобщенное ортогональное распределение $\mathfrak{M}$ служит связностью Эресмана для $(M, \mathcal{F})$, причем выполняются условия (C_0)–(C_2).

2. *Собственные действия групп Ли.* Напомним, что гладкое действие $l : G \times M \to M$ группы Ли G на многообразии M называется *собственным,* если индуцированное отображение

$$\Phi := (l, \mathrm{id}_M) : G \times M \to M \times M : (g, x) \mapsto (gx, x)$$

является собственным, т. е. для любого компактного подмножества $B \subset M \times M$ его прообраз $\Phi^{-1}(B)$ компактен в $G \times M$. Пусть на многообразии M задано собственное действие группы Ли G. Как известно [17], на M существует риманова метрика, относительно которой G является группой изометрий. Таким образом, из предложения 4 вытекает

Предложение 5. *Слоение с особенностями, образованное орбитами гладкого собственного действия связной группы Ли на компактном многообразии M, допускает связность Эресмана $\mathfrak{M}$, причем выполняются условия (C_0)–(C_2).*

3. *Вполне геодезические слоения.* Слоение с особенностями $(M,\mathcal{F})$ будем называть *вполне геодезическим,* если на M задана риманова метрика g, относительно которой каждый слой слоения является вполне геодезическим подмногообразием риманова многообразия (M,g). Будем говорить, что вполне геодезическое слоение $(M,\mathcal{F},g)$ *вертикально полное,* если натуральный параметр на каждой максимальной вертикальной геодезической изменяется на всей числовой прямой. Подчеркнем, что полнота (M,g) и, в частности, компактность M влекут вертикальную полноту. Пусть $\mathfrak{M}$ — обобщенное распределение на M, ортогональное слоению $\mathcal{F}$. Из равноправности всех точек локального слоя по отношению к $\mathcal{F}$ и $\mathfrak{M}$ вытекает выполнение условия (C_2) для вполне геодезического слоения.

Предложение 6. *Вертикально полное вполне геодезическое слоение* $(M,\mathcal{F},g)$ *допускает в качестве связности Эресмана ортогональное распределение* $\mathfrak{M}$ *к* $\mathcal{F}$.

Доказательство. Локальное существование в. г. г. с заданной базой вытекает из свойства (C_2). Если (σ,h) — допустимая пара путей, то, покрывая $\sigma(I_1)$ конечной цепочкой карт (U_i,φ_i), $i=1,\dots,m$, удовлетворяющих условию (C_2), видим, что найдется такое число $\varepsilon>0$, что для допустимой пары путей $(\sigma,h|_{[0,\varepsilon]})$, лежащей в $\bigcup\limits_{i=1}^{m}U_i$, существует в. г. г. Теперь предположим, что $h=\gamma$ — геодезическая линия в слое. Применяя известные методы (напр., [18]), проверяем, что в силу вертикальной полноты слоения $(M,\mathcal{F},g)$ для такой пары путей (σ,γ) существует в. г. г. Общий случай сводится к указанному известным способом [18]. $\square$

4. *Пример.* Пусть $\Psi:=\langle\psi\rangle$ — группа диффеоморфизмов плоскости с одной образующей ψ, и ψ — гомотетия с коэффициентом $\lambda>0$, $\lambda\neq 1$, и центром в нуле. Определим диагональное действие группы $\mathbb{Z}$ на произведении $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^1$ по формуле

$$\Phi:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^1\times\mathbb{Z}\to\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^1,\quad \Phi((z,t),n):=(\psi^n(z),t-n),$$

где $(z,t)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^1$, $n\in\mathbb{Z}$. Пусть $L_r:=\{z=(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2=r\}$, тогда $F_1:=\{L_r\times\mathbb{R}^1,\ r\geq 0\}$ — слоение в $\mathbb{R}^3$ с одним особым слоем $L_0\times\mathbb{R}^1=0\times\mathbb{R}^1$. Пусть $\pi:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^2\times_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}^1=M$ — проекция на фактор-многообразие M и $\mathcal{F}:=\{\mathcal{L}_r:=\pi(L_r\times\mathbb{R}^1),\ r\geq 0\}$ — индуцированное слоение на M. Представим себе M как внутренность полнотория, при этом особый слой $\mathcal{L}_0$ диффеоморфен окружности S^1, а регулярные слои диффеоморфны цилиндрам. В локально-евклидовой метрике, индуцированной из $\mathbb{R}^3$ с помощью накрывающего отображения π, обобщенное распределение $\mathfrak{M}$, ортогональное к $\mathcal{F}$, служит связностью Эресмана для этого слоения, причем выполнены условия (C_0)–(C_2). Пусть a — точка особого слоя и $\sigma\in\Omega_a$. Тогда фактор-множество Ω_a/ρ можно отождествить с лучом $\mathbb{R}^1_+$, а действие группы $*\mathfrak{M}$-голономии $*H_{\mathfrak{M}}(\mathcal{L}_0,a)$ — с действием группы гомотетий Ψ на $\mathbb{R}^1_+$, следовательно, $*H_{\mathfrak{M}}(\mathcal{L}_0,a)\cong\mathbb{Z}$.

Литература

1. Blumenthal R.A., Hebda J.J. *Ehresmann connections for foliations* // Indiana Univ. Math. J. – 1984. – V. 33. – № 4. – P. 597–611.
2. Kashiwabara S. *The decomposition of a differentiable manifolds and its applications* // Tohoku Math. J. – 1959. – V. 11. – № 1. – P. 43–53.
3. Hermann R. *On the differential geometry of foliations* // Ann. of Math. – 1960. – V. 72. – № 3. – P. 445–457.
4. Шапиро Я.Л., Жукова Н.И. *О глобальной структуре приводимых римановых многообразий* // Изв. вузов. Математика. – 1980. – № 10. – С. 60-62.
5. Sussmann H.J. *Orbits of families of vector fields and integrability of distributions* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1973. – V. 180. – P. 171-188.
6. Stefan P. *Accessible sets, orbits and foliations with singularities* // Proc. London Math. Soc. – 1974. – V. 29. – № 4. – P. 699–713.
7. Dazord P. *Holonomie des feuilletages singuliers* // C. R. Acad. Sci. Paris. – 1984. – V. 298. – № 2. – P. 2–30.

8. Koike N. *Ehresmann connections for a foliation on a manifold with boundary* // SUT J. Math. – 1994. – V. 30. – P. 147–158.
9. Жукова Н.И. *Свойства графиков эресмановых слоений* // Вестн. Нижегородск. ун-та. Сер. матем. – 2004. – Вып. 1. – С. 73–87.
10. Жукова Н.И. *Критерий стабильности слоев римановых слоений с особенностями* // Изв. вузов. Математика. – 1992. – № 4. – С. 88–91.
11. Piatkowski A. *The $*$-holonomy group of Stefan suspension of a diffeomorphism* // Ann. Pol. Math. – 1993. – V. 58. – № 2. – P. 123–129.
12. Жукова Н.И. *График слоения со связностью Эресмана и стабильность слоев* // Изв. вузов. Математика. – 1994. – № 2. – С. 78–81.
13. Тамура И. *Топология слоений.* – М.: Мир, 1979. – 317 с.
14. Blumenthal R., Hebda J. *Complementary distributions which preserve the leaf geometry and applications to totally geodesic foliations* // Quart. J. Math. Oxford. – 1984. – V. 35. – № 140. – P. 383–392.
15. Zukova N. *On the stability of leaves of Riemannian foliations* // Ann. of Global Analysis and Geometry. – 1987. – V. 5. – P. 261–271.
16. Reinhart B.L. *Foliated manifolds with bundle-like metrics* // Ann. of Math. – 1959. – V. 69. – № 1. – P. 119–132.
17. Michor P.W. *Transformation groups.* Lecture Notes of a course in Vienna. – 1997. – 94 p.
18. Жукова Н.И. *Слоения, согласованные с системами путей* // Изв. вузов. Математика. – 1989. – № 7. – С. 5–13.

Нижегородский государственный университет

Поступила 21.04.2004