ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 8 (519)

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 519.216

З.А. ЕНИКЕЕВА

ПРИНЦИП ИНВАРИАНТНОСТИ ДЛЯ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН С ЗАМЕЩЕНИЯМИ И МОДЕЛИ ФИНАНСОВОГО РЫНКА

В работе доказывается сходимость случайных ломаных к винеровскому процессу с измененным временем в пространстве непрерывных ограниченных функций на действительной полупрямой. Случайные ломаные определены суммами независимых случайных величин, причем в этих суммах одни случайные величины случайным образом замещаются другими. Замещения определяются умножением на значения индикаторов, определенных на другом вероятностном пространстве, элементы которого рассматриваются как случайные параметры, и сходимость случайных ломаных доказывается для почти всех (п. в.) значений этого случайного параметра. Результаты данной работы являются обобщениями соответствующих теорем из работ [1] и [2], полученных для сумм одинаково распределенных случайных величин. Здесь рассматривается более общая схема серий разнораспределенных случайных величин, удовлетворяющих условию Линдеберга.

Заметим, что большое количество статей (см., напр., [3]–[5]) посвящено изучению сходимости случайных ломаных, и данная работа принадлежит этому направлению.

Полученные предельные теоремы применяются в некоторых моделях стохастической финансовой математики, в частности, приводится аналог формулы Блэка–Шольца справедливой цены европейского опциона покупателя.

1. Предельные теоремы

Пусть $\{\Omega_1, \mathfrak{A}_1, \mathbf{P}_1\}$ — вероятностное пространство, $\mathbf{E}_1$ — математическое ожидание относительно вероятности $\mathbf{P}_1$ и пусть $A_{ji}(n) \in \mathfrak{A}_1$ — независимые события для любого $n \in \mathbf{N}$. Будем предполагать, что вероятности этих событий не зависят от индекса i и $\mathbf{P}_1(A_{ji}(n)) = a_{jn}$ для любого $i \in \mathbf{N}$. Обозначим через $\mathbb{I}_{ji}(n)(\omega_1)$ индикаторы событий $A_{ji}(n)$, через $[b]$ и $\{b\}$ — целую и дробную части числа b соответственно.

Пусть $t \in \mathbb{R}_+$. Определим последовательность функций следующим образом: $f_n(t) = 1$, если $[k_n t] = 0$ и $f_n(t) = \mathbf{E}_1\, \mathbb{I}_{[k_n t]i}(n)\mathbb{I}_{([k_n t]-1)i}(n) \dots \mathbb{I}_{1i}(n) = a_{[k_n t]n} \dots a_{1n}$, если $[k_n t] > 0$.

Пусть события $A_{ij}(n)$ удовлетворяют условию

(1) существует функция $f(t) \in C_b(\mathbb{R}_+)$ такая, что $f(t) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(t)$ для любого $t \in \mathbb{R}_+$, где $C_b(\mathbb{R}_+)$ — пространство непрерывных ограниченных функций, заданных на $\mathbb{R}_+$.

Пусть $\{\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P}\}$ — еще одно вероятностное пространство. Через $\mathbf{E}$ будем обозначать математическое ожидание относительно вероятности $\mathbf{P}$.

Пусть $k_n \in \mathbf{N}$ такие, что $k_n < k_{n+1}$ для любого $n \in \mathbf{N}$ и $l \in \{1, 2\}$. Пусть $Y_{ni}^{(l)}$, $1 \le i \le k_n$, — последовательности серий независимых в каждой серии случайных величин, определенных на $(\Omega, A, \mathbf{P})$, такие, что для любого $n \in \mathbf{N}$ семейства $\{Y_{ni}^{(1)},\ 1 \le i \le k_n\}$ и $\{Y_{ni}^{(2)},\ 1 \le i \le k_n\}$ независимы. Будем предполагать, что для $l \in \{1, 2\}$ выполнены следующие условия:

(2) $\mathbf{E}\, Y_{ni}^{(l)} = 0$ для любых $n, i \in \mathbf{N}$;

(3) $\sum\limits_{i=1}^{k_n} \mathbf{E}\,(Y_{ni}^{(l)})^2 \to v_l^2$ при $n \to \infty$ для некоторого $v_l^2 \in \mathbb{R}_+$;

(4) $\sum\limits_{i=1}^{k_n} \mathbf{E}\,(Y_{ni}^{(l)})^2 \mathbb{I}_{\{|Y_{ni}^{(l)}|>\tau\}} \to 0$ при $n \to \infty$ для любого $\tau \in \mathbb{R}_+$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \exp\big[-\frac{\varepsilon}{\max\limits_{1\le i\le k_n} \mathbf{E}(Y_{ni}^{(l)})^2}\big] < \infty$ для любого $\varepsilon > 0$.

Построим последовательность сумм

$$
\begin{aligned}
S_0^{(n)} &= \sum_{i=1}^{k_n} Y_{ni}^{(1)},\\
S_1^{(n)} &= \sum_{i=1}^{k_n} \mathbb{I}_{1i}(n) Y_{ni}^{(1)} + \sum_{i=1}^{k_n} (1-\mathbb{I}_{1i}(n)) Y_{ni}^{(2)},\\
&\ldots\ldots\ldots\\
S_k^{(n)} &= \sum_{i=1}^{k_n} \mathbb{I}_{1i}(n)\mathbb{I}_{2i}(n)\cdots\mathbb{I}_{ki}(n) Y_{ni}^{(1)} + \sum_{i=1}^{k_n} (1-\mathbb{I}_{1i}(n)\mathbb{I}_{2i}(n)\cdots\mathbb{I}_{ki}(n)) Y_{ni}^{(2)}.
\end{aligned}
\tag{S}
$$

Рассмотрим последовательность случайных процессов

$$
X_n(t) \equiv X_n(t;\omega_1) \triangleq S_{[k_n t]}^{(n)} + \{k_n t\}(S_{[k_n t]+1}^{(n)} - S_{[k_n t]}^{(n)}), \quad n \in \mathbf{N}. \tag{X}
$$

Пусть $W(t)$ и $W'(t)$ — независимые винеровские процессы. Обозначим

$$
W_{fv_1v_2}(t) = W(v_1^2 f(t)) + W'(v_2^2(1-f(t))), \;\; t \in \mathbb{R}_+.
$$

Теорема 1. *Если выполнены условия* (1)–(5) *и* $X_n(\omega_1)$ — *последовательность случайных процессов, определенная формулами* (S) *и* (X), *то* $X_n(\omega_1) \xrightarrow{d} W_{fv_1v_2}$ *при* $n \to \infty$ *в пространстве* $C_b(\mathbb{R}_+)$ *для п. в.* $\omega_1 \in \Omega_1$.

Обозначим

$$
Z_n(x) \equiv Z_n(x;\omega_1)(Y) = \frac{1}{k_n} \sum_{j=0}^{[k_n x]} S_j^{(n)}, \quad x \in [0,T], \quad n \in \mathbf{N}, \quad \omega_1 \in \Omega_1. \tag{Z}
$$

Теорема 2. *Если выполнены условия* (1)–(5) *и* $Z_n(\omega_1)$ — *последовательность случайных процессов, определенная формулой* (Z), *то* $Z_n(\omega_1) \xrightarrow{d} W''$ *при* $n \to \infty$ *в пространстве* $C[0,T]$ *для п. в.* $\omega_1 \in \Omega_1$, *где* W'' — *центрированный гауссовский случайный процесс с функцией ковариации*

$$
B(x_1,x_2) = v_1^2\Big(2\int_0^{x_1} tf(t)dt + x_1\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt\Big) + v_2^2\Big(x_1x_2 + 2\int_0^{x_1} tf(t)dt - (x_1+x_2)\int_0^{x_1} f(t)dt\Big).
$$

2. Приложения к финансовой математике

В работе [1] предложены три модели финансового рынка. В них действия агентов рассматриваются как одинаково распределенные случайные величины. В данной работе будем предполагать, что действия агентов — разнораспределенные случайные величины. Рассмотрим модель рынка с n агентами, где n достаточно велико. Допустим, что торги ценными бумагами, которые в дальнейшем для простоты будем называть акциями, могут осуществляться только в дискретные моменты времени $j \in \{0,1,2,\ldots,M\}$. Предполагаем, что за период времени $\{0,1,2,\ldots,M\}$ агент может только один раз участвовать в торгах (купить или продать акции). Если агент покупает акции, то их цена умножается на некоторое число, большее единицы. Если агент продает акции, то их цена умножается на число, меньшее единицы. Значит, торговая политика i-го агента предполагается биномиальной случайной величиной

$$\xi_i^{(l)} = \begin{cases} U_{li} & \text{с вероятностью } p_{li}, \\ D_{li} & \text{с вероятностью } q_{li}, \quad 1 \le i \le n, \quad l \in \{1,2\}. \end{cases}$$

Индекс l введен для того, чтобы указать, что в зависимости от внешних обстоятельств политика агента может меняться, т. е. она может быть случайной величиной $\xi_i^{(1)}$ или $\xi_i^{(2)}$.

Введем параметры a_{li} и $v_{li}^2 > 0$, определив их равенствами

$$\begin{gathered} v_{li}^2 = (U_{li} - D_{li})^2 p_{li} q_{li}, \\ a_{li} v_{li}^2 + 1 = U_{li} p_{li} + D_{li} q_{li}, \quad 1 \le i \le n, \quad l \in \{1,2\}. \end{gathered} \tag{1}$$

Пусть для $l \in \{1,2\}$ выполнены условия

(1′) $\sum\limits_{i=1}^{n} v_{li}^2 \to v_l^2$ при $n \to \infty$ для некоторого $v_l^2 \in \mathbb{R}_+$;

(2′) $\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{E}(\ln \xi_i^{(l)} - \mathbf{E} \ln \xi_i^{(l)})^2 \mathbb{I}_{\{|\ln \xi_i^{(l)} - \mathbf{E} \ln \xi_i^{(l)}| > \tau\}} \to 0$ при $n \to \infty$ для любого $\tau \in \mathbb{R}_+$;

(3′) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \exp\big[-\frac{\varepsilon}{\max_{1 \le i \le n} v_{li}^2} \big] < \infty$ для любого $\varepsilon > 0$.

Параметр a_{li} можно рассматривать, как относительный риск, характеризующий разницу между "рыночной" мерой (p_{li}, q_{li}) и "риск-нейтральной" мерой $(\widetilde{p}_{li}, \widetilde{q}_{li})$, где числа $\widetilde{p}_{li}$ и $\widetilde{q}_{li}$ определены равенствами

$$\begin{gathered} U\widetilde{p}_{li} + D\widetilde{q}_{li} = 1, \\ 1 - \widetilde{p}_{li} = \widetilde{q}_{li}, \quad 1 \le i \le n, \quad l = 1,2. \end{gathered}$$

Будем предполагать, что

(4′) $\sum\limits_{i=1}^{n} v_{li}^2 a_{li} \to \mu_l - r_l$ при $n \to \infty$, $\mu_l - r_l \in \mathbb{R}_+$, $r_l > 0$,

где μ_l — ожидаемая средняя прибыль, r_l — банковский процент.

Рассмотрим случай, когда количество агентов на рынке остается неизменным, но агент может поменять свою тактику. Тогда случайная величина $\xi_i^{(1)}$ заменяется на $\xi_i^{(2)}$. Итак, предполагаем, что выполнено следующее условие.

(5′) Действие любого агента не зависит от действий других агентов. Случайная величина ξ_{ik}, описывающая действие i-го агента, в k-й момент времени определяется следующим образом:
   (A) если $\mathbb{I}_{i1}^{(n)}(\omega_1) = 1$, $\mathbb{I}_{i2}^{(n)}(\omega_1) = 1, \dots, \mathbb{I}_{ij}^{(n)}(\omega_1) = 1$, то $\xi_{ik} = \xi_i^{(1)}$, $k \le j$;
   (B) если $\mathbb{I}_{i1}^{(n)}(\omega_1) = 1$, $\mathbb{I}_{i2}^{(n)}(\omega_1) = 1, \dots, \mathbb{I}_{i(j-1)}^{(n)}(\omega_1) = 1$, $\mathbb{I}_{ij}^{(n)}(\omega_1) = 0$, то $\xi_{ik} = \xi_i^{(2)}$, $k \ge j$.

   Семейства случайных величин $\{\xi_i^{(1)}, 1 \le i \le n\}$ и $\{\xi_i^{(2)}, 1 \le i \le n\}$ независимы.

Построим случайный процесс, определяющий цену акций в момент времени $t \in [0,T]$

$$S_n(t) = S_0 \bigg(\prod_{i=1}^{n} \prod_{j=0}^{[nt]} \xi_{ij} \bigg)^{1/n},$$

где S_0 — цена акции в начальный момент времени.

Теорема 3. *Если выполнены условия* (1) *и* (1′)–(5′), *то* $S_n(\omega_1) \xrightarrow{d} S$ *при* $n \to \infty$ *в пространстве* $L^\infty[0,T]$ *для п. в.* $\omega_1 \in \Omega_1$, *где*

$$S(t) = S_0 \exp\bigg\{ \sum_{l=1}^{2} (-1)^{l+1} \Big(\mu_l - r_l - \frac{v_l^2}{2} \Big) \int_0^t f(x)dx + W''(t) + \Big(\mu_2 - r_2 - \frac{v_2^2}{2} \Big) t \bigg\},$$

$t \in [0,T]$ *и* W'' *— гауссовский случайный процесс с функцией ковариации* $B(t_1,t_2)$, $t_1,t_2 \in [0,T]$.

Обозначим через $\widetilde{S}(t)$ случайный процесс, построенный точно так же, как и $S_n(t)$, но в котором случайные величины ξ_{ij} обладают свойством $\mathbf{E}\,\xi_{ij} = 1$, $1 \le i \le n$, $0 \le j \le M$.

Теорема 4. *Если выполнены условия* (1) *и* (1′)–(5′), *то* $\widetilde{S}_n(\omega_1) \xrightarrow{d} \widetilde{S}$ *при* $n \to \infty$ *в пространстве* $L^\infty[0,T]$ *для п. в.* $\omega_1 \in \Omega_1$, *где*

$$\widetilde{S}(t) = S_0 \exp\left\{\frac{v_2^2 - v_1^2}{2}\int_0^t f(x)dx + W''(t) - \frac{v_2^2}{2}t\right\}, \quad t \in [0,T].$$

Напомним, что справедливая цена C_T европейского опциона покупателя с датой исполнения T и ценой покупки K определяется формулой Блэка–Шольца

$$C_T = \mathbf{E}\{e^{-rT}(\widetilde{S}(T) - K)_+\},$$

где случайный процесс $\widetilde{S}(t)$, $t \in [0,T]$, является предельным по распределению для последовательности $\widetilde{S}_n$ при $n \to \infty$.

Теорема 5 (формула Блэка–Шольца). *Предположим, что выполнены условия* (1) *и* (1′)–(5′). *Обозначим*

$$w^2(t) = \mathbf{E}(W'(t))^2 = B(t,t), \quad t \in [0,T].$$

Тогда справедливая цена европейского опциона равна

$$C_T = S_0 \exp\left\{\frac{w^2(T)}{2} - rT + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2}\int_0^T f(x)dx - \frac{v_2^2 T}{2}\right\}\Phi(\rho + w(T)) - K\exp\{-rT\}\Phi(\rho),$$

где

$$\rho = \left(\ln S_0 - \ln K - \frac{v_1^2 - v_1^2}{2}\int_0^T f(x)dx - \frac{v_2^2 T}{2}\right)\Big/ w(T).$$

При доказательстве теорем 3–5 существенно используется теорема 2.

Литература

1. Chuprunov A.N., Rusakov O.V. *Convergence for step line processes under summation of random indicators and models of market pricing* // Lobachevskii J. of Math. – Kazan, 2003.
2. Fazekas I., Chuprunov A.N. *Convergence of random step line to Ornstein–Uhlenbeck type processes* // Technical Report of Debrecen University. – 1996. – № 24.
3. Прохоров Ю.В. *Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей* // Теория вероятностей и ее применение. – 1956. – Т. 1. – № 2. – С. 176–238.
4. Круглов В.М. *Слабая сходимость случайных ломаных к винеровскому процессу* // Теория вероятностей и ее применение. – 1985. – Т. 30. – № 2. – С. 208–218.
5. Круглов В.М. *К принципу инвариантности* // Теория вероятностей и ее применение. – 1997. – Т. 42. – № 2. – С. 239–261.

Казанский государственный университет

Поступила
14.10.2004