ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2008 МАТЕМАТИКА № 1 (548)

УДК 519.853

Ю.А. ЧЕРНЯЕВ

ОБОБЩЕНИЕ МЕТОДА НЬЮТОНА НА КЛАСС НЕВЫПУКЛЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Данная работа продолжает исследования итерационных процедур нахождения стационарных точек гладких функций на классе невыпуклых множеств, начатые в [1] и [2]. Рассматривается обобщение метода Ньютона, применяемого для решения задач выпуклого программирования, на случай ограничений, представленных в виде теоретико-множественной разности выпуклого множества и объединения нескольких выпуклых множеств. Сформулировано и доказано предложение о сходимости алгоритма.

1. Постановка задачи и алгоритм

Рассматривается задача нахождения точки, удовлетворяющей необходимому условию локального минимума функции $\varphi(x)$ на множестве X в n-мерном евклидовом пространстве E^n, где X является теоретико-множественной разностью некоторых множеств F и $\bigcup\limits_{i=1}^{l} \operatorname{int} G_i$, при этом F и G_i, $i=\overline{1,l}$, выпуклы и замкнуты, множества внутренних точек X и G_i, $i=\overline{1,l}$, непусты, а $\varphi(x)$ является сильно выпуклой на некотором выпуклом множестве Y, содержащем X, и принадлежит классу $C^2(Y)$. Пусть каждое из множеств G_i, $i=\overline{1,l}$, в любой своей граничной точке x имеет единственную опорную гиперплоскость, нормаль которой считается внешней, т. е. для всех $y \in G_i$ орт $n^i(x)$ нормали удовлетворяет условию $\langle n^i(x), y-x\rangle \le 0$. Будем полагать, что при каждом i орт $n^i(x)$ является непрерывной вектор-функцией на границе ∂G_i множества G_i. Последнее означает, что для любой точки $x_* \in \partial G_i$ и произвольной последовательности $\{x_k\}$, лежащей в ∂G_i и сходящейся к x_*, при каждом $\varepsilon > 0$ существует такой номер $k(\varepsilon) \in N$, что для любого $k \ge k(\varepsilon)$ справедливо неравенство $\|n^i(x_k) - n^i(x_*)\| < \varepsilon$.

Ниже будут использоваться следующие обозначения: $s^i(x)$ — проекция точки x на множество G_i, $n^i(x)$ — орт нормали опорной гиперплоскости к G_i в точке $s^i(x)$, $\Gamma^i(x) = \{e \in E^n : \langle n^i(x), e - s^i(x)\rangle \ge 0\}$, $P(x) = F \bigcap \Gamma^1(x) \bigcap \Gamma^2(x) \bigcap \dots \bigcap \Gamma^l(x)$. Проекции $s^i(x)$ определяются однозначно, т. к. G_i, $i=\overline{1,l}$, являются выпуклыми множествами евклидова пространства E^n. Поскольку каждое из G_i, $i=\overline{1,l}$, в любой своей граничной точке x имеет только одну опорную гиперплоскость, то векторы $n^i(x)$, а значит, и полупространства $\Gamma^i(x)$, $i=1,2,\dots,l$, определяются единственным образом для любого $x \in$ X. Если при некотором i точки x и $s^i(x)$ не совпадают, то векторы $n^i(x)$ и $x - s^i(x)$ имеют одно направление, а значит, $\langle n^i(x), x - s^i(x)\rangle > 0$, т. е. $x \in \operatorname{int}\Gamma^i(x)$. Если же x и $s^i(x)$ совпадают, то x лежит на границе $\Gamma^i(x)$. Поскольку $x \in \mathrm{X} \subset F$ и при каждом $i=1,2,\dots,l$ имеет место $x \in \Gamma^i(x)$, то всегда $x \in P(x)$.

Для решения поставленной задачи предлагается следующий алгоритм построения последовательных приближений.

Шаг 0. Положим $k=0$.

Шаг 1. Пусть $x_k \in$ X есть k-е приближение.

Шаг 2. Определяются точки $s^i(x_k), i=\overline{1,l}$.

Шаг 3. Строятся полупространства $\Gamma^i(x_k)$, $i=\overline{1,l}$.

Шаг 4. Строится множество $P(x_k)$.

Шаг 5. Пусть $\overline{x}_k$ — решение задачи

$$\varphi_k(x) = \langle \varphi'(x_k), x - x_k \rangle + (1/2)\langle \varphi''(x_k)(x - x_k), x - x_k \rangle \to \min, \quad x \in P(x_k).$$

Шаг 6. Если $\varphi_k(\overline{x}_k) = 0$, то вычисления заканчиваются, иначе осуществляется переход к шагу 7.

Шаг 7. Задается величина $\alpha_k \in (0, 1]$.

Шаг 8. Пусть $x_{k+1} = x_k + \alpha_k(\overline{x}_k - x_k)$.

Шаг 9. Полагается $k := k + 1$ и осуществляется переход к шагу 1.

Множества $P(x_k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, выпуклы и замкнуты, т.к. являются пересечением выпуклого замкнутого множества F с замкнутыми полупространствами $\Gamma^i(x_k)$, $i = \overline{1, l}$, и непусты, т.к. по построению $x_k \in P(x_k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ В силу показанного в ([3], с. 189) сильная выпуклость $\varphi(x)$ на Y равносильна существованию константы $\mu > 0$, для которой при любых $x \in Y$ и $\xi \in E^n$ справедливо неравенство $\langle \varphi''(x)\xi, \xi \rangle \geq \mu \|\xi\|^2$. Там же показано, что $\mu = 2\rho$, где ρ — константа сильной выпуклости $\varphi(x)$ на Y. Поэтому из равенств $\varphi_k''(x) = \varphi''(x_k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, и включений $P(x_k) \subset \mathrm{X} \subset Y$ следует, что при каждом k функция $\varphi_k(x)$ сильно выпукла на $P(x_k)$ с константой ρ. В силу выпуклости и замкнутости $P(x_k)$ это означает, что задача минимизации на шаге 5 при любом k имеет единственное решение.

Условие $\varphi_k(\overline{x}_k) = 0$ может не выполняться ни при каком k, тогда процесс вычислений становится бесконечным. Для некоторых способов выбора чисел α_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, доказывается, что любая предельная точка последовательности $\{x_k\}$ является стационарной, т.е. удовлетворяет необходимому условию локального минимума $\varphi(x)$ на X. Следует отметить, что найденная с помощью алгоритма стационарная точка, вообще говоря, не будет являться точкой глобального минимума $\varphi(x)$ на X.

2. Сходимость алгоритма

В этом разделе приводится лемма о необходимом условии локального минимума выпуклой функции $\varphi(x)$ на множестве X указанного вида, предлагаются два способа выбора чисел α_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, и доказывается предложение о сходимости алгоритма.

Лемма. *Пусть функция $\varphi(x)$ является выпуклой на некотором выпуклом множестве Y, содержащем X, а точка x_* доставляет локальный минимум $\varphi(x)$ на X. Тогда x_* является точкой глобального минимума $\varphi(x)$ на $P(x_*)$.*

Лемма справедлива, поскольку $x_* \in P(x_*) \subset \mathrm{X} \subset Y$, а в силу выпуклости функции $\varphi(x)$ и множества $P(x_*)$ любая точка локального минимума $\varphi(x)$ на $P(x_*)$ будет и точкой глобального минимума.

В [2] приведен пример, показывающий, что произвольная точка x_*, доставляющая глобальный минимум выпуклой функции $\varphi(x)$ на $P(x_*)$, может не являться точкой локального (а тем более, глобального) минимума $\varphi(x)$ на множестве X указанного вида. В силу выпуклости функции $\varphi(x)$ и множества $P(x_*)$ стационарность точки x_* в смысле утверждения леммы равносильна выполнению условия

$$\forall x \in P(x_*) : \langle \varphi'(x_*), x - x_* \rangle \geq 0. \tag{1}$$

Поскольку при каждом k точка $\overline{x}_k$ доставляет минимум функции $\varphi_k(x)$ на выпуклом множестве $P(x_k)$, для всех $x \in P(x_k)$ справедливо неравенство $\langle \varphi_k'(\overline{x}_k), x - \overline{x}_k \rangle \geq 0$. Заметим, что $\varphi_k(\overline{x}_k) \leq \varphi_k(x_k) = 0$, а при сильной выпуклости $\varphi_k(x)$ на $P(x_k)$ равенство $\varphi_k(\overline{x}_k) = 0$ возможно только при $\overline{x}_k = x_k$. Так как $\varphi_k'(x) = \varphi'(x_k) + \varphi''(x_k)(x - x_k)$, то равенство $\varphi_k(\overline{x}_k) = 0$ равносильно неравенству $\langle \varphi'(x_k), x - x_k \rangle \geq 0$ для всех $x \in P(x_k)$. Отсюда следует, что если при некотором k имеет место $\varphi_k(\overline{x}_k) = 0$, то в силу выпуклости $\varphi(x)$ и $P(x_k)$ точка x_k доставляет глобальный минимум $\varphi(x)$ на $P(x_k)$, а значит, удовлетворяет необходимому условию локального минимума, сформулированному в лемме.

Предлагаются следующие два способа выбора чисел α_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$ При использовании способа 1 задаются константы ε и λ из интервала $(0,1)$ и величина α_k полагается равной λ^{i_k}, где i_k — первый из номеров $i = 0, 1, 2, \ldots$, для которого выполняется условие

$$\varphi(x_k) - \varphi(x_k + \lambda^i(\overline{x}_k - x_k)) \geq \varepsilon\lambda^i|\varphi_k(\overline{x}_k)|. \qquad (2)$$

В силу выпуклости $P(x_k)$, сильной выпуклости $\varphi(x)$ и результата из ([3], с. 322–323) при существовании константы $M > 0$, для которой при любых $x \in P(x_k)$ и $\xi \in E^n$ справедливо неравенство $\langle\varphi''(x)\xi, \xi\rangle \leq M\|\xi\|^2$, условие (2) будет выполняться после конечного числа проб. Способ 2 состоит в выборе α_k из условия

$$\alpha_k = \arg\min_{0\leq\alpha\leq1} \varphi(x_k + \alpha(\overline{x}_k - x_k)). \qquad (3)$$

Поскольку $[x_k, \overline{x}_k] \subset P(x_k)$, а $\varphi(x)$ сильно выпукла на $P(x_k)$, то минимум достигается при единственном α. Выбор α_k из условия (3) требует решения вспомогательной задачи одномерной минимизации.

Предложение. *Если существует константа $M > 0$, для которой при любом $x \in \mathrm{X}$ и любом $\xi \in E^n$ справедливо неравенство $\langle\varphi''(x)\xi, \xi\rangle \leq M\|\xi\|^2$, последовательность $\{x_k\}$ построена по изложенному алгоритму и числа α_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, выбираются согласно одному из способов 1 и 2, то любая предельная точка x_* последовательности $\{x_k\}$, для которой $\operatorname{int} P(x_*) \neq \emptyset$, удовлетворяет необходимому условию локального минимума, сформулированному в лемме.*

Доказательство. При сильной выпуклости $\varphi(x)$ на Y и включении $\mathrm{X} \subset Y$ множество $M(x_0) = \{x \in \mathrm{X} : \varphi(x) \leq \varphi(x_0)\}$ ограничено, а функция $\varphi(x)$ ограничена снизу на X. Последовательность $\{\varphi(x_k)\}$ при указанных способах выбора чисел α_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, не возрастает, а значит, $\{x_k\}$ лежит в $M(x_0)$ и имеет хотя бы одну предельную точку. Поскольку $\{\varphi(x_k)\}$ ограничена снизу, имеем

$$\lim_{k\to\infty}[\varphi(x_k) - \varphi(x_{k+1})] = 0. \qquad (4)$$

Покажем, что при указанных способах выбора чисел α_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, последовательность $\{x_k\}$ удовлетворяет условию

$$\lim_{k\to\infty} \|x_k - \overline{x}_k\| = 0. \qquad (5)$$

Поскольку $\overline{x}_k$ — точка минимума $\varphi_k(x)$ на $P(x_k)$ и имеют место включения $P(x_k) \subset \mathrm{X} \subset Y$, а $\varphi_k(x)$ сильно выпукла на $P(x_k)$ с константой ρ, то в силу ([3], с. 186) при каждом k будет выполняться условие

$$\rho\|x_k - \overline{x}_k\|^2 \leq \varphi_k(x_k) - \varphi_k(\overline{x}_k) = |\varphi_k(\overline{x}_k)|, \qquad (6)$$

при этом $\rho = \mu/2$. Если числа α_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, выбираются согласно способу 1, то в силу выпуклости $P(x_k)$ и ([3], с. 322–323) при каждом k справедливо неравенство

$$\varphi(x_k) - \varphi(x_{k+1}) \geq \varepsilon\varepsilon_0|\varphi_k(\overline{x}_k)|, \qquad (7)$$

где $\varepsilon_0 = \lambda(1-\varepsilon)\mu/M > 0$, а ε, λ, μ и M — константы, упомянутые выше. Из (4) и (7) следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k(\overline{x}_k) = 0$, а тогда в силу (6) имеет место условие (5).

Рассмотрим случай, когда α_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, выбираются согласно способу 2. Пусть ε и λ — произвольные константы из интервала $(0,1)$. При каждом k точка x_{k+1} удовлетворяет условию

$$\varphi(x_{k+1}) = \min_{0\leq\alpha\leq1} \varphi(x_k + \alpha(\overline{x}_k - x_k)),$$

поэтому неравенство (7) при $\varepsilon_0 = \lambda(1-\varepsilon)\mu/M > 0$ остается справедливым. Отсюда в силу (4) и (6) имеет место (5).

Пусть теперь x_* — произвольная предельная точка $\{x_k\}$, для которой $\operatorname{int} P(x_*) \neq \emptyset$, а $\{x_{k_m}\}$ — соответствующая подпоследовательность. Покажем, что x_* удовлетворяет условию (1). Предположим, что имеется точка $\widetilde{x} \in P(x_*)$, для которой

$$\langle \varphi'(x_*), \widetilde{x} - x_* \rangle = \langle \varphi'(x_*) + \varphi''(x_*)(x_* - x_*), \widetilde{x} - x_* \rangle < 0.$$

Тогда существуют такие окрестности $U_\varepsilon(x_*)$ и $U_\delta(\widetilde{x})$, что при любых $x, y \in U_\varepsilon(x_*)$ и любом $z \in U_\delta(\widetilde{x})$ справедливо неравенство

$$\langle \varphi'(x) + \varphi''(x)(y - x), z - y \rangle < 0.$$

Пусть h — некоторая точка из $\operatorname{int} P(x_*)$, тогда $[h; \widetilde{x}) \subset \operatorname{int} P(x_*)$. Возьмем произвольную точку $h_0 \in [h; \widetilde{x}) \bigcap U_\delta(\widetilde{x})$. В силу (5) и сходимости $\{x_{k_m}\}$ к x_* существует такое $m_1 \in N$, что для всех $m \geq m_1$ имеет место

$$\langle \varphi'(x_{k_m}) + \varphi''(x_{k_m})(\overline{x}_{k_m} - x_{k_m}), h_0 - \overline{x}_{k_m} \rangle < 0. \tag{8}$$

Но $h_0 \in \operatorname{int} P(x_*) \subset \operatorname{int} \Gamma^i(x_*)$, т. е. $\langle n^i(x_*), h_0 - s^i(x_*) \rangle > 0$, $i = \overline{1, l}$. Тогда в силу сжимающего свойства оператора проектирования на выпуклое множество G_i и непрерывности $n^i(x)$ на ∂G_i, $i = \overline{1, l}$, существует такое $m_2 \in N$, что для всех $m \geq m_2$ выполняются неравенства $\langle n^i(x_{k_m}), h_0 - s^i(x_{k_m}) \rangle > 0$, $i = \overline{1, l}$, а значит, $h_0 \in \Gamma^i(x_{k_m})$, $i = \overline{1, l}$. Поскольку $h_0 \in P(x_*) \subset \mathrm{X} \subset F$, то отсюда следует, что при $m \geq m_2$ точка h_0 лежит в $P(x_{k_m})$.

Выше было показано, что при каждом k для всех $x \in P(x_k)$ справедливо неравенство $\langle \varphi_k'(\overline{x}_k), x - \overline{x}_k \rangle \geq 0$, откуда следует, что при любом $m \geq m_2$ имеет место

$$\langle \varphi_{k_m}'(\overline{x}_{k_m}), h_0 - \overline{x}_{k_m} \rangle = \langle \varphi'(x_{k_m}) + \varphi''(x_{k_m})(\overline{x}_{k_m} - x_{k_m}), h_0 - \overline{x}_{k_m} \rangle \geq 0. \tag{9}$$

Получено, что при $m \geq \max\{m_1, m_2\}$ условия (8) и (9) будут выполняться одновременно, что невозможно. В силу произвольности рассмотренной предельной точки последовательности $\{x_k\}$ полученное противоречие показывает, что любая предельная точка x_*, для которой $\operatorname{int} P(x_*) \neq \emptyset$, удовлетворяет условию (1), которое в силу выпуклости $\varphi(x)$ равносильно необходимому условию локального минимума, сформулированному в лемме.

В [2] рассмотрен вопрос о возможности задания множества X с помощью функциональных ограничений в виде $\mathrm{X} = \{x \in E^n \mid f_i(x) \leq 0,\ i = 1, 2, \ldots, p\}$, где $f_i(x) \in C^1(E^n)$, $i = \overline{1, p}$, и показано, что любая точка $x_* \in \mathrm{X}$, удовлетворяющая условию (1) или условию $\operatorname{int} P(x_*) = \emptyset$, стационарна в смысле Лагранжа. Отсюда следует, что если множество X рассматриваемого вида задано с помощью ограничений типа неравенств и выполнены требования приведенного предложения, то любая предельная точка последовательности $\{x_k\}$ является стационарной в смысле Лагранжа.

3. Вычислительные аспекты

В работе предложен алгоритм, обобщающий метод Ньютона, применяемый для решения задач выпуклого программирования, на один класс невыпуклых допустимых множеств. Идея обобщения состоит в том, что задача минимизации вспомогательной квадратичной функции $\varphi_k(x)$ на каждой итерации решается не для самого невыпуклого множества, а для его выпуклого подмножества. Эти подмножества являются теоретико-множественным пересечением выпуклого множества F и нескольких полупространств $\Gamma^i(x_k)$. Задача минимизации квадратичной функции на множестве такого типа решается, как правило, непросто. Кроме этого, построению каждого из полупространств предшествует решение задачи проектирования точки на одно из выпуклых множеств G_i, которая тоже не всегда проста. Поэтому для практического применения предлагаемого метода, вообще говоря, требуется разработка вычислительных алгоритмов для различных невыпуклых множеств рассматриваемого вида.

При оптимизации на множествах относительно простой структуры разработанный метод может, однако, работать эффективно. Если, например, допустимое множество задано в виде теоретико-множественной разности выпуклого многогранного множества, представленного линейными неравенствами, и объединения нескольких шаров, то вспомогательные задачи на каждой итерации сводятся к задачам проектирования на шаровые множества, решаемым элементарно, и к задаче квадратичного программирования, которая всегда может быть решена существующими методами. Если же решение вспомогательных задач на итерациях требует привлечения трудоемких итерационных процедур, то эффективность метода существенно снижается. Поскольку метод Ньютона использует квадратичную часть разложения функции $\varphi(x)$ в ряд Тейлора, от него следует ожидать более быстрой сходимости по сравнению с методами, рассмотренными в [1] и [2].

Литература

1. Черняев Ю.А. *Сходимость метода проекции градиента для одного класса невыпуклых задач математического программирования* // Изв. вузов. Математика. – 2005. – № 12. – С. 76–79.
2. Черняев Ю.А. *Обобщение метода условного градиента на один класс невыпуклых экстремальных задач* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 2006. – Т. 46. – № 4. – С. 576–582.
3. Васильев Ф.П. *Численные методы решения экстремальных задач.* – М.: Наука, 1980. – 520 с.

Казанский государственный технический университет

Поступила 08.12.2006