ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1997 МАТЕМАТИКА № 11 (426)

УДК 517.927

М.В. БУЛАТОВ

МЕТОД ВОЗМУЩЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ

1. Введение

Рассмотрим задачу Коши

$$A(t)x'(t) + B(t)x(t) = g(t), \quad t \in [0, 1], \tag{1}$$

$$x(0) = a, \tag{2}$$

где $A(t)$ и $B(t)$ — $n \times n$-матрицы с вещественно-аналитическими коэффициентами, $g(t)$ — достаточно гладкая известная, $x(t)$ — гладкая искомая вектор-функции.

На входные данные исходной задачи наложены ограничения:

а) $\det A(t) \equiv 0$ (матрица $B(t)$ также может быть вырожденной),

б) система (1) имеет хотя бы одно решение при любой достаточно гладкой $g(t)$,

в) начальное условие (2) задано так, что исходная задача имеет решение.

Эти ограничения поясняет

Пример 1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ d & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1]. \tag{3}$$

Если скаляр $d = 0$, то система (3) имеет множество решений только при $g_2(t) \equiv 0$ (в этом случае $x(t) = \Big(\int\limits_0^t (g_1(\tau) - v(\tau)d\tau + c, v(t)\Big)^*$, где $v(t)$ — произвольная интегрируемая функция, $c \in R$), т.е. ограничение б) не выполнено. Если $d \neq 0$, то получим единственное решение $x(t) = (g_2(t)/d \;\; g_1(t) - g_2'(t)/d)^*$, и тогда в начальном условии (2) должно быть $a = (g_2(0)/d \;\; g_1(0) - g_2'(0)/d)^*$. $(\cdot)^*$ означает транспонирование.

Введем понятия, необходимые для дальнейших рассуждений.

Определение 1. Система (1) имеет семейство решений типа Коши индекса r, если существуют такие гладкие $n \times n$-матрицы $\Phi(t)$, $K_0(t,\tau)$, $K_1(t), K_2(t), \dots, K_r(t)$, причем $\operatorname{rank} \Phi(t) = \mathrm{const}$, $K_r(t) \neq 0$ $\forall t \in [0, 1]$, что линейная комбинация

$$x(t, c) = \Phi(t)_c + \int_0^t K(t,\tau)g(\tau)d\tau + \sum_{i=1}^r K_i(t)g^{(i-1}(t) \quad \forall c \in R^n,$$

является решением (1) и на любом отрезке $[\alpha, \beta] \subseteq [0, 1]$ нет решений, отличных от $x(t, c)$.

Работа поддержана грантом НАТО OUTR.CRG.961082.

Пример 2. Система

$$\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x' + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ g_2(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0,1], \tag{4}$$

имеет единственное решение $x(t,c) = x(t) = (0, g_2)^*$. Тогда $\Phi(t) = K_0(t,\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Если $t \in [\alpha, \beta]$, $\alpha > 0$, $\beta \le 1$, то эта система имеет семейство решений вида $x(t,c) = (-c_1/t\ g_2)^*$. Матрицы $\Phi(t)$, $K_0(t,\tau)$, $K_1(t)$ в этом случае соответственно равны

$$\begin{pmatrix} -1/t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \tau/t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad r = 1.$$

Так как $\Phi(t)$ имеет переменный ранг, то данная система не обладает решением типа Коши.

Пример 3. Система

$$\begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x' + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{pmatrix}, \quad g_1, g_2 \in C^1, \tag{5}$$

имеет единственное решение, которое находится по формуле ([1], с. 85): $x(t) = g(t) - A(t)g'(t)$, т.е. $x(t,c) = x(t) = (g_1 - tg_2',\ g_2)^*$ при любом $t \in (-\infty, \infty)$.

В этом случае $\Phi(t) = K_0(t,\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $K_1(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $K_2(t) = \begin{pmatrix} 0 & -t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, и ее индекс равен двум.

Определение 2 ([2]). Система (1) приводима к центральной канонической форме, если существуют вещественно-аналитические, невырожденные для любого $t \in [0,1]$ матрицы $P(t)$, $Q(t)$ такие, что при замене переменной $x(t) = Q(t)y(t)$ и умножении слева на $P(t)$ система (1) примет блочный вид

$$\begin{aligned} PAQy' + (PAQ' + PBQ)y = \begin{pmatrix} E_s & 0 \\ 0 & N(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} J(t) & 0 \\ 0 & E_{n-s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{pmatrix}, \qquad Pg = (g_1, g_2)^*, \end{aligned} \tag{6}$$

где E_s и E_{n-2} — единичные матрицы размером s и $n-2$ соответственно, $J(t)$ — некоторая $s \times s$-матрица, $N(t)$ — $n-s \times n-s$-верхнетреугольная матрица с нулевой диагональю, причем $N^r(t) \equiv 0$, $J(t)$ и $N(t)$ — вещественно-аналитические матрицы, т.к. являются линейными комбинациями вещественно-аналитических матриц.

В работе [3] доказано, что система (1) имеет семейство решений типа Коши индекса r тогда и только тогда, когда она приводима к центральной канонической форме.

Приведем некоторые свойства матрицы $N(t)$.

Свойство 1 [1]. $\prod\limits_{j=1}^{r} N_j(t) \equiv 0$, где в качестве N_j могут выступать любые производные матрицы $N(t)$, в том числе и нулевого порядка.

Свойство 2.

$$(\varepsilon E + N(t))^{-1} = \varepsilon^{-1}E - \varepsilon^{-2}N + \varepsilon^{-3}N^2 + \cdots + (-1)^{r+1}\varepsilon^{-r}N^{r-1}.$$

Доказательство. Учитывая свойство 1, непосредственной проверкой получим

$$(\varepsilon^{-1}E - \varepsilon^{-2}N + \varepsilon^{-3}N^2 + \cdots + (-1)^{r+1}\varepsilon^{-r}N^{r-1}) * (\varepsilon E + N) = E.$$

Из формулы (6) следует, что

$$y_1 = M(J(t))c + \int_0^t M(J(t))M^{-1}(J(\tau))g_1(\tau)d\tau, \tag{7}$$

$M(J(t))$ — матрицант системы $y_1' + J(t)y_1 = 0$ и $c \in R^s$,

$$y_2 = \sum_{i=0}^{r-1}(-1)^i T^i g_2, \tag{8}$$

где T — оператор, действие которого на вектор-функцию определено по правилу $T^0 g_2 = g_2$, $Tg_2 = N(t)(d/dt)g_2$ ($Tg_2 = Ng_2'$, $T^2 g_2 = N^2 g_2'' + NN' g_2', \ldots$), $T^r g_2 \equiv 0$ — по свойству 1. □

Определение 3 ([4]). Пучок $n \times n$-матриц $\lambda A(t) + B(t)$ называется регулярным на отрезке [0,1], если существует такое число λ, что $\det(\lambda A(t) + B(t)) \neq 0 \ \forall t \in [0,1]$.

В силу [1] при постоянных матрицах A и B система (1) имеет семейство решений типа Коши индекса r тогда и только тогда, когда пучок матриц $\lambda A + B$ регулярный. В этом случае индекс системы (1) равен индексу матричного пучка, т.е. минимальному целому неотрицательному числу,при котором справедливо равенство

$$\mathrm{rank}((\lambda A + B)^{-1}A)^{k+1} = \mathrm{rank}((\lambda A + B)^{-1}A)^k.$$

Отметим, что алгоритмы численного решения задачи (1), (2) индекса выше единицы принципиально отличаются от методов решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений, разрешенных относительно производной (напр., [1], [3]).

2. Методы возмущения

Впервые метод возмущения, который заключается в переходе от нахождения решения задачи (1)–(2) с постоянными $n \times n$-матрицами A и B к нахождению решения системы обыкновенных дифференциальных равнений с невырожденной матрицей перед производной, был предложен в ([1], с.103). В дальнейшем методы возмущений для задачи (1), (2) и для некоторого класса задач вида

$$A(t)x'(t) + \varphi(x(t), t) = 0, \quad x(0) = a, \quad t \in [0,1], \quad \det A(t) \equiv 0,$$

с достаточно гладкими входными данными были развиты в работах [5], [6].

При реализации таких алгоритмов требовалось вычислять проекторы на ядро матрицы $A(t)$, что является достаточно сложной вычислительной задачей, особенно когда ранг матрицы $A(t)$ переменный (см. (8), блок $N(t)$ может изменять ранг, но решение будет решением типа Коши индекса r).

Более того, вышеперечисленные алгоритмы возмущения предложены для регулярного пучка матриц $\lambda A(t) + B(t)$

Пример 4.

$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x' + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & t \end{pmatrix} x = g \tag{9}$$

имеет решение типа Коши индекса 2. Опуская несложные выкладки, легко убедиться, что данная система имеет единственное решение $x(t,c) = x(t) = (g_2 - t(g_2' - g_1),\ g_2' - g_1)$.

В этом случае $\Phi(t) = K_0(t,\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $K_1(t) = \begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $K_2(t) = \begin{pmatrix} 0 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

К примеру 4 принципиально не применимы вышеописанные алгоритмы в силу того, что матрица $A(t) + \varepsilon C(t)B(t)$ будет всегда вырожденной для любых $t \in (-\infty, \infty)$ и для любой матрицы $C(t)$.

Ниже предложен алгоритм возмущения для задачи (1), (2), который применим и для систем (1) с сингулярным пучком матриц $\lambda A(t) + B(t)$.

Запишем задачу (1), (2) в интегральной форме

$$A(t)x(t) + \int_0^t (B(\tau) - A'(\tau))x(\tau)d\tau = \int_0^t g(\tau)d\tau + A(0)a.$$

Данной системе интегральных уравнений сопоставим возмущенную систему

$$(A(t)x(t) + \varepsilon(B(t) - A'(t)))x_\varepsilon(t) + \int_0^t (B(\tau) - A'(\tau))x_\varepsilon(\tau)d\tau = \int_0^t g(\tau)d\tau + A(0)a, \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

Дифференцируя это равенство, вновь получим систему дифференциальных уравнений

$$(A(t) + \varepsilon(B(t) - A'(t)))x'_\varepsilon(t) + (B(t) + \varepsilon(B'(t) - A''(t)))x_\varepsilon(t) = g(t), \quad t \in [0, 1], \tag{10}$$

для которой поставим задачу Коши с условием

$$x_\varepsilon(0) = a. \tag{11}$$

Перед обоснованием данного метода возмущения приведем некоторые вспомогательные результаты. Матрицант M(D(t)) системы $x' + D(t)x = 0$ представим в виде ряда ([4], с.430)

$$M(D(t)) = E - \int_0^t D(t_1)dt_1 + \int_0^t D(t_2) \int_0^{t_2} D(t_1)dt_1dt_2 + \cdots . \tag{12}$$

(Здесь и далее через M(Y(t)) будем обозначать матрицант системы $x' + Y(t)x(t) = 0$.) Матрицант $M(D(t) + g(t))$ представим в виде ([4], с.431)

$$M(D + G) = M(D)M(M^{-1}(D)GM(D)). \tag{13}$$

Обозначим через T_ε оператор $(\varepsilon E + N(t))d/dt$, где $N(t)$ — верхнетреугольная матрица с нулевой диагональю такая, что $N^r(t) \equiv 0$. По свойству 1 следует, что при $l \geq r$

$$T^l_\varepsilon g = \varepsilon^l g^{(l)} + \varepsilon^{k-1} N_1 g^{(l-1)} + \cdots + \varepsilon^{l+1-r} N_{r-1} g^{(l+1-r)}, \tag{14}$$

где $N_1, i = 1, 2, \ldots, r-1$, также являются верхнетреугольными матрицами с нулевой диагональю, причем $N_i^r(t) \equiv 0$.

Рассмотрим две задачи:

$$Nx' + x = g, \quad t \in [0, 1], \quad x(0) = a, \tag{15}$$

и

$$(\varepsilon E + \tilde{N})x'_\varepsilon + x_\varepsilon = \tilde{g}, \quad t \in [0, 1], \quad x_\varepsilon = a, \tag{16}$$

где $\tilde{N}$ также является верхнетреугольной матрицей с нулевой диагональю, $\tilde{N}^r \equiv 0$ и $\|\tilde{N} - N\|_{C^{2r-2}} \leq \delta$, $\|\tilde{g} - g\|_{C^{2r-2}} \leq \delta$, $\delta \leq L\varepsilon$, $0 < \varepsilon \ll 1$, $L < \infty$.

Здесь и всюду в дальнейшем изложении зависимость от t для краткости будем опускать.

Лемма. *Пусть элементы матрицы $N(t)$ и вектор-функции $g(t)$ у системы* (15) *достаточно гладкие. Тогда, начиная с некоторого ε $(0 < \varepsilon < \varepsilon_0 \ll 1)$, справедлива оценка*

$$\|x - x_\varepsilon\| = O(\varepsilon), \quad t \in [\varepsilon_0, 1],$$

где x и x_ε являются решениями задач (15) *и* (16) *соответственно.*

Доказательство. Введя обозначения

$$\delta x = x_\varepsilon - x, \quad \delta N = \tilde{N} - N, \quad \delta g = \tilde{g} - g,$$

запишем

$$(\varepsilon E + \tilde{N})\delta x' + \delta x = \delta N' x - \varepsilon x + \delta g, \quad t \in [0,1], \quad \delta x(0) = 0.$$

Выписывая $x(t)$ через оператор T (см. формулу (8)) и учитывая достаточную гладкость δN и δg, данную систему перепишем в виде

$$(\varepsilon E + \tilde{N})\delta x' + \delta x = \varepsilon q, \quad t \in [0,1], \tag{17}$$

$$\delta x(0) = 0, \tag{18}$$

где q – достаточно гладкая вектор-функция. По свойству 2 следует, что $(\varepsilon E + \tilde{N})^{-1} = \varepsilon^{-1}E - \varepsilon^{-1}\tilde{N} + \varepsilon^{-3}\tilde{N}^2 + \cdots + (-1)^{r+1}\varepsilon^{-r}\tilde{N}^{r-1}$. С учетом обозначения $H(t,\varepsilon) = (\varepsilon E + \tilde{N})^{-1}$, $N(t,\varepsilon) = -\varepsilon^{-2}\tilde{N} + \varepsilon^{-3}\tilde{N}^2 + \cdots + (-1)^{r+1}\varepsilon^{-r}\tilde{N}^{r-1}$ систему (17) перепишем в форме

$$\delta x' + H(t,\varepsilon)\delta x = \varepsilon H(t,\varepsilon)q(t), \quad t \in [0,1]. \tag{19}$$

Решение задачи (19), (18) имеет вид

$$\delta x = M(H(t,\varepsilon))\delta x(0) + \varepsilon \int_0^t M(H(t,\varepsilon))M^{-1}(H(\tau,\varepsilon))H(\tau,\varepsilon)q(\tau)d\tau. \tag{20}$$

Используя свойства матрицанта (12), (13) и то, что $M(\varepsilon^{-1}E) = \exp(-t/\varepsilon)E$, $H(t,\varepsilon) = \varepsilon^{-1}E + N(t,\varepsilon)$, опуская выкладки, получим

$$\|M(H(t,\varepsilon))\| \le M_0 \exp(-t/\varepsilon)\varepsilon^{2-2r}, \quad M_0 < \infty. \tag{21}$$

Подставляя во второе слагаемое в формуле (20) значение

$$H(\tau,\varepsilon) = M'(H(\tau,\varepsilon))M^{-1}(H(\tau,\varepsilon)),$$

которое следует из тождества

$$M'(H(\tau,\varepsilon)) + H(\tau,\varepsilon)M(H(t,\varepsilon)) = 0,$$

и учитывая тот факт, что

$$(M^{-1}(H(t,\varepsilon)))' = -M^{-1}(H(t,\varepsilon))M'(H(t,\varepsilon))M^{-1}(H(t,\varepsilon)),$$

получим

$$\varepsilon \int_0^t M(H(t,\varepsilon))M^{-1}(H(\tau,\varepsilon))H(\tau,\varepsilon)q(\tau)d\tau = \varepsilon \int_0^t M(H(t,\varepsilon))(M^{-1}(H(\tau,\varepsilon)))'q(\tau)d\tau.$$

Интегрируя данное тождество по частям,учитывая оценку (21), имеем

$$\begin{gathered}\left\|\varepsilon M(H(t,\varepsilon))M^{-1}(H(\tau,\varepsilon))q(\tau)\Big|_{r=0}^{\tau=t} + \varepsilon \int_0^t M(H(t,\varepsilon))M^{-1}(H(\tau,\varepsilon))q'(\tau)d\tau\right\| \le \\ \varepsilon\|q\| + M_1 \exp(-t/\varepsilon)\varepsilon^{3-2r} + \\ \left\|\varepsilon \int_0^t M(H(t,\varepsilon))(M^{-1}(H(\tau,\varepsilon))H(\tau,\varepsilon))(H^{-1}(\tau,\varepsilon))q'(\tau)d\tau\right\|, \quad M_1 < \infty. \end{gathered} \tag{22}$$

Вновь интегрируя второе слагаемое в (22) $2r-2$ раза по частям, учитывая формулу (14), и тот факт, что $H^{-1}(\tau,\varepsilon) = \varepsilon E + \tilde{N}(\tau)$, опуская громоздкие выкладки, получим

$$\|\delta x\| \le \exp(-t/\varepsilon)\sum_{i=0}^{2r-2} M_i \varepsilon^{2-2r+i} + L_0\varepsilon, \quad L_0, M_1 < \infty, \quad i = 0,1,\ldots,2r-2.$$

Пользуясь тем, что функция $\exp(-t/\varepsilon)$ стремится к нулю при $\varepsilon \to +0$ быстрее любой степени ε на любом $[\varepsilon_0, 1]$, окончательно получим $\|\delta x\| = O(\varepsilon)$, $t \in [\varepsilon_0, 1]$. □

Теорема. *Пусть для задачи* (1), (2) *выполнены условия* 1) *исходная система* (1) *приводима к каноническому виду* (6), *причем* $P(t) = P$ — *постоянная матрица;* 2) $g(t) \in C^{3r-3}$.

Тогда, начиная с некоторого ε $(0 < \varepsilon < \varepsilon_0 \ll 1)$, *справедлива оценка*

$$\|x - x_\varepsilon\| = O(\varepsilon), \quad t \in [\varepsilon_0, 1],$$

где x_ε *является решением задачи* (10), (11).

Доказательство. Систему (10) умножим на матрицу P и произведем замену переменной $x_\varepsilon(t) = Q(t)y_\varepsilon$, где P и Q — те же матрицы, что и в формуле (6). Получим

$$P(A + \varepsilon(B - A'))Qy'_\varepsilon + (P(A + \varepsilon(B - A'))Q' + P(B + \varepsilon(B' - A''))Q)y_\varepsilon = Pg.$$

Используя условие 1) теоремы и формулу (6), запишем матрицы

$$P(A + \varepsilon(B - A'))Q = PAQ + \varepsilon(PBQ + PAQ') - \varepsilon P(AQ)'$$
$$P(A + \varepsilon(B - A'))Q' + P(B + \varepsilon(B' - A''))Q = (PAQ' + PBQ) + \varepsilon(P(AQ')' + P(BQ)') - \varepsilon P(AQ)''$$

в блочном виде

$$\begin{pmatrix} E_s & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & E_{n-s} \end{pmatrix} - \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & N' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_s + \varepsilon J & 0 \\ 0 & \varepsilon E_{n-s} + N - \varepsilon N' \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & E_{n-s} \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} J' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & N'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J + \varepsilon J' & 0 \\ 0 & E_{n-s} - \varepsilon N'' \end{pmatrix}.$$

Итак, относительно y_ε получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{pmatrix} E_s + \varepsilon J & 0 \\ 0 & \varepsilon E_{n-s} + N - \varepsilon N' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y'_{1\varepsilon} \\ y'_{2\varepsilon} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J + \varepsilon J' & 0 \\ 0 & E_{n-s} - \varepsilon N'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1\varepsilon} \\ y_{2\varepsilon} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix},$$

где $(g_1, g_2)^* = Pg$. Относительно $y_{2\varepsilon}$ имеем $(\varepsilon E_{n-s} + N - \varepsilon N')y'_{2\varepsilon} + (E_{n-s} - \varepsilon N'')y_{2\varepsilon} = g_2$. Учитывая, что (по свойству 2)

$$(E_{n-s} - \varepsilon N'')^{-1} = E_{n-s} + \varepsilon N'' - \varepsilon^2(N'')^2 + \cdots + (-1)^{r-1}\varepsilon^{r-1}(N'')^{r-1},$$

получим $(\varepsilon E_{n-s} + \tilde{N})y'_{2\varepsilon} + y_{2\varepsilon} = \tilde{g}_2$, где $\tilde{N}$ и $\tilde{g}_2$ удовлетворяют условиям леммы.

Итак, $\|y_{2\varepsilon} - y_2\| = O(\varepsilon)$, $t \in [\varepsilon_0, 1]$.

Так как $y'_1 + Jy_1 = g_1$ и $y_{1\varepsilon}(0) = y_1(0)$, то $\|y_{1\varepsilon} - y_1\| \le \|y_{1\varepsilon}(0) - y_1(0)\| + L\varepsilon$, $t \in [0, 1]$, $L < \infty$, т.е. $\|y_{1\varepsilon} - y_1\| = O(\varepsilon)$, $t \in [0, 1]$. Вспоминая, что $x = Qy$, $x_\varepsilon = Qy_\varepsilon$, окончательно получим $\|x_\varepsilon - x\| \le \|Q\| \, \|y_\varepsilon - y\| = O(\varepsilon)$, $t \in [\varepsilon_0, 1]$. □

В заключение укажем некоторые случаи, когда для системы (1) выполняется условие 1) теоремы:

а) матрица $(\lambda A(t) + B(t))^{-1} A(t)$ обладает свойством Ω ([1], с.90),

б) индекс системы (1) равен 2, и исходные матрицы имеют блочный вид

$$A(t) = \begin{pmatrix} A_1(t) & A_2(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B(t) = \begin{pmatrix} B_1(t) & B_2(t) \\ B_3(t) & B_4(t) \end{pmatrix},$$

а матрица $A_2 - A_1 B_3^{-1} B_4$ является постоянной.

Литература

1. Бояринцев Ю.Е. *Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.* – Новосибирск: Наука, 1980. – 222 с.
2. Campbel S.L., Petzold L.R. *Canonical forms and solvable singular systems of differential equations* // SIAM J. Alg. and Discrete Methods. – 1983. – №. 4. – P. 517–521.
3. Чистяков В.Ф. *Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром.* – Новосибирск: Наука, 1996. – 278 с.
4. Гантмахер Ф.Р. *Теория матриц.* – 3-е изд. – М.: Наука, 1967. – 575 с.
5. Hanke M. *Regularizations of differential-algebraic equations revisited* // Preprint № 92-19. – Berlin, 1992.
6. Marz R. *On tractability with index* 2 // Preprint № 109. – Berlin, 1986.

Иркутский Вычислительный центр
Сибирского отделения
Российской Академии наук

Поступила
25.04.1995