ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2004 МАТЕМАТИКА № 12 (511)

УДК 519.873

Н.Ю. САТИМОВ, Г.И. ИБРАГИМОВ

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ ДЛЯ ДИСКРЕТНЫХ ИГР СО МНОГИМИ УЧАСТНИКАМИ

1. Постановка задачи

Изучению дифференциальных игр при интегральных ограничениях посвящено много работ (напр., [1]–[9]). Основополагающие результаты получены в исследованиях [1]–[4]. Особый интерес представляют игры между нарядом преследователей, действующих как один игрок, и одним убегающим. Ранее [5]–[8] были получены достаточные условия для завершения игры с интегральными ограничениями и для ее дискретного аналога. В данной работе рассматривается линейная дискретная игра со многими участниками. Получено достаточное условие для возможности завершения преследования из всех точек пространства. Показано, что в случае одного преследующего игрока это условие является и необходимым.

Пусть дискретная игра описывается рекуррентными уравнениями

$$z_i(k+1) = C_i z_i(k) - u_i(k) + v(k), \quad i = 1, \dots, m, \tag{1}$$

где $z_i, u_i, v \in R^n$, $n \geq 1$, k — номер шага, $k = 1, 2, \dots$, C_i — постоянная $n \times n$-матрица; u_i — управляющий параметр преследования; v — управляющий параметр убегания. Параметр u_i выбирается в виде последовательности $u_i = u_i(\cdot) = (u_i(1), u_i(2), \dots, u_i(k), \dots)$ из замкнутого шара $S_p(\rho_i)$ радиуса ρ_i с центром в начале координат пространства l_p:

$$\|u_i(\cdot)\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |u_i(k)|^p \right)^{1/p} \leq \rho_i,$$

где p, ρ_i, $i = 1, \dots, m$, — заданные положительные числа, а параметр v задан в виде последовательности $v = v(\cdot) = (v(1), v(2), \dots, v(k), \dots)$ из шара $S(\sigma) \subset l_p$. Игра (1) считается завершенной, если $z_i(k) = 0$ для некоторого значения (j, r) пары индексов (i, k).

Определение 1. Будем говорить, что в игре (1) из начального положения $z^0 = \{z_{10}, z_{20}, \dots, z_{m0}\}$ возможно завершение преследования за $N(z^0)$ шагов, если по любой последовательности $v(\cdot) \in S_p(\sigma)$ можно построить такие последовательности $u_1(\cdot) \in S_p(\rho_1)$, $u_2(\cdot) \in S_p(\rho_2), \dots$, $u_m(\cdot) \in S_p(\rho_m)$, что для некоторого значения j индекса i решение $z_j = z_j(\cdot) = \{z_j(1), z_j(2), \dots, z_j(k), \dots\}$ уравнения

$$z_j(k+1) = C_j z_j(k) - u_j(k) + v(k), \quad z_j(1) = z_{j0},$$

удовлетворяет условию $z_j(\overline{k}) = 0$, где $1 \leq \overline{k} \leq N(z^0)$. При этом для нахождения значений $u_1(k), u_2(k), \dots, u_m(k)$ параметров $u_1, u_2, \dots, u_m$ на k-ом шаге, $k \geq 1$, разрешается использовать $z_1(k), z_2(k), \dots, z_m(k), v(1), v(2), \dots, v(k)$.

2. Основные результаты

Теорема 1. *Пусть выполнено одно из следующих двух условий*:

1) *все собственные числа матриц* $C_i, i = 1, \ldots, m$, *по модулю не превосходят единицы и* $p > 1$;
2) *все собственные числа матриц* C_i *по модулю меньше единицы и* $p \geq 1$.

Тогда если $\rho_1^p + \rho_2^p + \ldots + \rho_m^p > \sigma^p$, *то в игре* (1) *из любого начального положения* z^0 *возможно завершение преследования за некоторое конечное число шагов* $N(z^0)$.

Рассмотрим управляемый дискретный процесс, описываемый уравнением

$$z(k+1) = Cz(k) - \overline{w}(k), \tag{2}$$

где $z \in R^n$, $k = 1, 2, \ldots$, C — постоянная действительная $n \times n$-матрица, управляющий параметр $\overline{w}$ выбирается в виде последовательности $\overline{w} = \overline{w}(\cdot) \in S_p(\varepsilon_0) \subset l_p$, $\varepsilon_0 > 0$.

Определение 2. Будем говорить, что в системе (2) из начального положения z_0 возможен перевод фазовой точки z в начало координат за $N(z_0)$ шагов, если можно построить такую последовательность $\overline{w}(\cdot) \in S_p(\varepsilon_0)$, что решение $z = z(\cdot)$ уравнения (2) с начальным условием $z(1) = z_0$ удовлетворяет условию $z(\overline{k}) = 0$, где $1 \leq \overline{k} \leq N(z_0)$.

Лемма. *Пусть выполнено одно из следующих двух условий*:

1) *все собственные числа матрицы* C *по модулю не превосходят единицы и* $p > 1$;
2) *все собственные числа матрицы* C *по модулю меньше единицы и* $p \geq 1$.

Тогда в системе (2) *из любого начального положения* z_0 *возможен перевод фазовой точки* z *в начало координат за некоторое число шагов* $N(z_0)$.

Доказательство леммы. С помощью неособенного действительного преобразования $z = Sx$ систему (2) можно привести к виду

$$x(k+1) = Jx(k) - w(k), \quad w(k) = S^{-1}\overline{w}(k), \tag{3}$$

где $J = \operatorname{diag}\{J_0, J_1, \ldots, J_{l_1}, B_0, B_1, \ldots, B_{l_2}\}$ (см. приложение). Система (3) естественным образом распадается на следующие системы:

$$x_1^i(k+1) = J_i x_1^i(k) - w_1^i(k), \quad i = 0, 1, \ldots, l_1, \tag{4}$$

$$x_2^j(k+1) = B_j x_2^j(k) - w_2^j(k), \quad j = 0, 1, \ldots, l_2, \tag{5}$$

где x_1^i и w_1^i (соответственно x_2^j и w_2^j) — векторы, составленные из координат векторов x и w, соответствующих клетке Жордана J_i (соответственно B_j).

Покажем возможность перевода фазовой точки x_1^i в начало координат.

1. *Система, соответствующая клетке* J_0. Система уравнений

$$x_1^0(k+1) = J_0 x_1^0(k) - w_1^0(k) \tag{6}$$

распадается на скалярные уравнения вида

$$y(k+1) = \lambda y(k) - w(k).$$

Отсюда имеем

$$y(k+1) = \lambda^k y(1) - \left(\lambda^{k-1} w(1) + \cdots + \lambda w(k-1) + w(k)\right). \tag{7}$$

А. Случай, когда $|\lambda| < 1$. Если $y(1) = 0$, то, полагая $w(k) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$, получаем $y(k) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$ Пусть $y(1) \neq 0$. Тогда $\lambda^k y(1) \to 0$ при $k \to \infty$. Номер k^0 и число $\varepsilon^0 > 0$ выберем так, чтобы

$$|\lambda^{k^0} y(1)| - \varepsilon^0 = 0. \tag{8}$$

Полагаем

$$w(k)=\begin{cases}\varepsilon^0\operatorname{sgn}(\lambda^{k^0}y(1)), & k=k^0;\\ 0, & k\neq k^0.\end{cases}$$

Тогда из (7) и (8) вытекает $y(k^0+1)=\lambda^{k^0}y(1)-w(k^0)=0$, и, следовательно, $y(k)=0$, $k\geq k^0+1$.

Б. Случай, когда $\lambda=1$. Согласно (7) имеем

$$y(k+1)=y(1)-(w(1)+\dots+w(k-1)+w(k)).\tag{9}$$

Полагаем

$$w(k)=\begin{cases}\varepsilon^0\operatorname{sgn}(y(1)), & k=1,2,\dots,k^0;\\ 0, & k\geq k^0+1,\end{cases}$$

где номер k^0 и число $\varepsilon^0>0$ выбраны так, чтобы выполнялось равенство $|y(1)|=k^0\varepsilon^0$. Тогда согласно (9)

$$y(k^0+1)=y(1)-k^0\varepsilon^0\operatorname{sgn}(y(1))=0.$$

В. Случай, когда $\lambda=-1$. Согласно (7) имеем

$$y(k+1)=(-1)^k y(1)-((-1)^{k-1}w(1)+\dots-w(k-1)+w(k)).$$

Рассмотрим нечетные номера k, т. е. $k=2m+1$, $m=0,1,\dots$ Тогда

$$y(2m+2)=-y(1)-(w(1)-w(2)+\dots-w(2m)+w(2m+1)).\tag{10}$$

Полагаем $w(2i+1)=-\varepsilon^0\operatorname{sgn}(y(1))$, $i=0,1,\dots,m^0$; $w(2i)=\varepsilon^0\operatorname{sgn}(y(1))$, $i=1,\dots,m^0$, где номер m^0 и число ε^0 выбраны так, чтобы выполнялось равенство $|y(1)|=(2m^0+1)\varepsilon^0$. Тогда из (10) следует

$$y(k^0+1)=y(2m^0+2)=-y(1)+(2m^0+1)\varepsilon^0\operatorname{sgn}(y(1))=0.$$

Вывод. Во всех случаях А, Б, В за счет выбора номера k^0 можно сделать ε^0 меньше любого заданного положительного числа. Кроме того, $y(k^0+1)=0$, и если $|\lambda|<1$, то

$$|w(k)|=\begin{cases}\varepsilon^0, & k=k^0;\\ 0, & k\neq k^0,\end{cases}$$

если же $|\lambda|=1$, то

$$|w(k)|=\begin{cases}\varepsilon^0, & 1\leq k\leq k^0;\\ 0, & k\geq k^0+1,\end{cases}$$

при этом $k^0\varepsilon^0=|y(1)|$.

Теперь последовательно рассмотрим уравнения системы (6). Согласно доказанному выше существуют номера $k_1^0,k_2^0,\dots,k_l^0$, числа $\varepsilon_1^0,\varepsilon_2^0,\dots,\varepsilon_l^0$ и управления $w_1^0(\cdot),\dots,w_l^0(\cdot)$ такие, что для решения j-го уравнения

$$y_j^0(k+1)=\lambda_j^0 y_j^0(k)-w_j^0(k),\quad j=1,\dots,l,$$

системы (6) имеем $y_j^0(k_1^0+\dots+k_j^0+1)=0$. При этом если $|\lambda_j^0|<1$, то управление $w_j^0(\cdot)$, обеспечивающее это равенство, имеет вид

$$|w_j^0(k)|=\begin{cases}\varepsilon_j^0, & k=k_1^0+\dots+k_j^0;\\ 0, & k\neq k_1^0+\ldots+k_j^0,\end{cases}$$

если же $|\lambda_j^0|=1$, то

$$|w_j^0(k)|=\begin{cases}\varepsilon_j^0, & k\in[k_1^0+\dots+k_{j-1}^0+1;k_1^0+\dots+k_j^0];\\ 0, & k\notin[k_1^0+\dots+k_{j-1}^0+1;k_1^0+\dots+k_j^0],\end{cases}$$

и при этом $k_j^0\varepsilon_j^0=|y_j^0(k_1^0+\dots+k_{j-1}^0+1)|$. Пусть $n^0=k_1^0+\dots+k_l^0$. Тогда $y_j^0(k)=0$, $j=1,\dots,l$, при $k\geq n^0+1$. Следовательно, для решения $x_1^0(\cdot)$ имеем $x_1^0(k)=0$ при $k\geq n^0+1$.

2. *Система, соответствующая клетке J_i, $1 \le i \le l_1$.* Система (4) эквивалентна системе

$$\begin{cases} y_1(k+1) = \lambda y_1(k) + y_2(k) - w_1(k), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_{r-1}(k+1) = \lambda y_{r-1}(k) + y_r(k) - w_{r-1}(k), \\ y_r(k+1) = \lambda y_r(k) - w_r(k), \quad k = M+1, M+2, \dots, \end{cases} \tag{11}$$

где M — некоторое натуральное число. Рассмотрим систему (11), начиная с последнего ее уравнения. Согласно доказанному в п. 1 можно выбрать номер k_r, число ε_r и управление $w_r(\cdot)$ так, чтобы $y_r(M + k_r + 1) = 0$. При этом если $|\lambda| < 1$, то

$$|w_r(k)| = \begin{cases} \varepsilon_r, & k = M + k_r; \\ 0, & k \ne M + k_r, \end{cases}$$

если же $|\lambda| = 1$, то

$$|w_r(k)| = \begin{cases} \varepsilon_r, & k \in [M+1, M+k_r]; \\ 0, & k \notin [M+1, M+k_r], \end{cases}$$

и при этом $k_r\varepsilon_r = |y_r(M+1)|$. Теперь рассмотрим предпоследнее уравнение системы (11)

$$y_{r-1}(k+1) = \lambda y_{r-1}(k) + y_r(k) - w_{r-1}(k). \tag{12}$$

Полагаем $w_{r-1}(k) = 0$, $k = M+1, \dots, M+k_r$. Для уравнения (12) $y_r(k) = 0$ при $k \ge M + k_r + 1$, имеем

$$y_{r-1}(k+1) = \lambda y_{r-1}(k) - w_{r-1}(k), \quad k \ge M + k_r + 1,$$

где начальным значением для переменного $y_{r-1}(k)$ будет $y_{r-1}(M + k_r + 1)$.

Аналогично рассмотреннему выше случаю числа k_{r-1}, ε_{r-1} и управление $w_{r-1}(\cdot)$ выберем так, чтобы $y_{r-1}(M + k_r + k_{r-1} + 1) = 0$. При $k \ge M + k_r + k_{r-1} + 1$ полагаем $w_{r-1}(k) = 0$. Дальше рассуждения проводятся аналогично случаям r, $r-1$.

Таким образом, существуют натуральные числа $k_r, k_{r-1}, \dots, k_1$, положительные числа $\varepsilon_r, \dots, \varepsilon_1$ и управления $w_r(\cdot), \dots, w_1(\cdot)$ такие, что если $|\lambda| < 1$, то

$$|w_r(k)| = \begin{cases} \varepsilon_r, & k = M + k_r; \\ 0, & k \ne M + k_r, \end{cases} \tag{13}$$
$$y_r(k) = 0, k \ge M + k_r + 1,$$

$$|w_{r-1}(k)| = \begin{cases} \varepsilon_{r-1}, & k = M + k_r + k_{r-1}; \\ 0, & k \ne M + k_r + k_{r-1}, \end{cases} \tag{14}$$
$$y_{r-1}(k) = 0, k \ge M + k_r + k_{r-1} + 1,$$

и т. д.,

$$|w_1(k)| = \begin{cases} \varepsilon_1, & k = M + k_r + k_{r-1} + \dots + k_1; \\ 0, & k \ne M + k_r + k_{r-1} + \dots + k_1, \end{cases} \tag{15}$$
$$y_1(k) = 0, k \ge M + k_r + k_{r-1} + \ldots + k_1 + 1.$$

Если же $|\lambda| = 1$, то

$$|w_r(k)| = \begin{cases} \varepsilon_r, & k \in [M+1, M+k_r]; \\ 0, & k \notin [M+1, M+k_r], \end{cases} \tag{16}$$

$$k_r\varepsilon_r = |y_r(M+1)|, \quad y_r(k) = 0, \quad k \geq M + k_r + 1,$$

$$|w_{r-1}(k)| = \begin{cases} \varepsilon_{r-1}, & k \in [M+k_r+1, M+k_r+k_{r-1}]; \\ 0, & k \notin [M+k_r+1, M+k_r+k_{r-1}], \end{cases} \tag{17}$$

$$k_{r-1}\varepsilon_{r-1} = |y_{r-1}(M+k_r+1)|, \quad y_{r-1}(k) = 0, \quad k \geq M + k_r + k_{r-1} + 1,$$

и т. д.,

$$|w_1(k)| = \begin{cases} \varepsilon_1, & k \in [M+k_r+\dots+k_2+1, M+k_r+k_{r-1}+\dots+k_1]; \\ 0, & k \notin [M+k_r+\dots+k_2+1, M+k_r+k_{r-1}+\dots+k_1], \end{cases} \tag{18}$$

$$k_1\varepsilon_1 = |y_1(M+k_r+\dots+k_2+1)|, \quad y_1(k) = 0, \quad k \geq M + k_r + k_{r-1} + \dots + k_1 + 1.$$

При этом за счет выбора номера k_i $(i = r, r-1, \dots, 1)$ можно сделать ε_i меньше любого заданного положительного числа.

Теперь последовательно рассмотрим системы (4) при $i = 1, 2, \dots, l_1$. Согласно доказанному выше для i-й системы существуют числа $k^i_{r_i}, k^i_{r_i-1}, \dots, k^i_1, \varepsilon^i_{r_i}, \dots, \varepsilon^i_1$ и управления $w^i_{r_i}(\cdot), \dots, w^i_1(\cdot)$ такие, что если $|\lambda_i| < 1$, то выполнены соотношения (13)–(15); если же $|\lambda_i| = 1$, то выполнены соотношения (16)–(18) при $M = n^{i-1}$, $k_r = k^i_{r_i}$, $\varepsilon_r = \varepsilon^i_{r_i}$, $w_r = w^i_{r_i}$, где $n^i = n^{i-1} + k^{i-1}_{r_{i-1}} + k^{i-1}_{r_{i-1}-1} + k^{i-1}_1$, $i = 1, 2, \dots, l_1$. Тогда $x^i_1(k) = 0$ при $k \geq n^i + 1$, $i = 1, 2, \dots, l_1$.

Теперь покажем возможность перевода фазовой точки x^i_2 в начало координат.

3. *Система, соответствующая клетке* B_0. Система

$$x^0_2(k+1) = B_0x^0_2(k) - w^0_2(k), \quad k = M+1, M+2, \dots \tag{19}$$

распадается на системы, имеющие в координатной форме вид

$$\begin{aligned} y_{11}(k+1) &= \alpha y_{11}(k) - \beta y_{21}(k) - w_{11}(k), \\ y_{21}(k+1) &= \beta y_{11}(k) + \alpha y_{21}(k) - w_{21}(k), \quad k = M+1, M+2, \dots \end{aligned} \tag{20}$$

При $k = 1, 2, \dots, M$ полагаем $w_{11}(k) = w_{21}(k) = 0$. Из этой системы имеем

$$\begin{gathered} y^2_{11}(k+1) + y^2_{21}(k+1) = (\alpha^2+\beta^2)(y^2_{11}(k) + y^2_{21}(k)) - \\ -2\left[(\alpha y_{11}(k) - \beta y_{21}(k))w_{11}(k) + (\beta y_{11}(k) + \alpha y_{21}(k))w_{21}(k)\right] + w^2_{11}(k) + w^2_{21}(k). \end{gathered} \tag{21}$$

Обозначим $R(k) = \sqrt{y^2_{11}(k) + y^2_{21}(k)}$. Если $R(M+1) = 0$, то, полагая $w_{11}(k) = w_{21}(k) = 0$, $k = M+1, M+2, \dots$, получаем $y_{11}(k) = y_{21}(k) = 0$, $k = M+1, M+2, \dots$

Пусть $R(M+1) \neq 0$.

А. Случай, когда $\alpha^2 + \beta^2 < 1$. Тогда

$$\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,\right)^k R(M+1) \to 0$$

при $k \to \infty$. Номер e^0 и число δ^0 выберем так, чтобы выполнялось равенство

$$\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,\right)^{e^0} R(M+1) = \delta^0.$$

Полагаем

$$w_{11}(k) = \begin{cases} \alpha y_{11}(M+e^0) - \beta y_{21}(M+e^0), & k = M+e^0; \\ 0, & k \neq M+e^0, \end{cases}$$

$$w_{21}(k) = \begin{cases} \beta y_{11}(M+e^0) + \alpha y_{21}(M+e^0), & k = M+e^0; \\ 0, & k \neq M+e^0. \end{cases}$$

Тогда

$$\sqrt{w_{11}^2(M+e^0)+w_{21}^2(M+e^0)} = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}R(M+e^0) = \left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right)^{e^0} R(M+1) = \delta^0,$$

и согласно (20) имеем

$$y_{11}(M+e^0+1) = y_{21}(M+e^0+1) = 0. \tag{22}$$

Отметим, что за счет выбора номера e^0 можно сделать δ^0 меньше любого заданного положительного числа.

Б. Случай, когда $\alpha^2+\beta^2=1$. Полагаем

$$w_{11}(k) = \begin{cases} a(k)(\alpha y_{11}(k)-\beta y_{21}(k)), & k\in[M+1,M+e^0];\\ 0, & k\notin[M+1,M+e^0], \end{cases}$$

$$w_{21}(k) = \begin{cases} a(k)(\beta y_{11}(k)+\alpha y_{21}(k)), & k\in[M+1,M+e^0];\\ 0, & k\notin[M+1,M+e^0], \end{cases}$$

где $a(k)=\frac{\delta^0}{R(k)}$, $k=M+1,\dots,M+e^0$, номер e^0 и число δ^0 выбраны в соответствии с условием $e^0\delta^0=R(M+1)$. Тогда в силу (20) и (21) получаем

$$R(M+e^0+1) = R(M+e^0)(1-a(M+e^0)) = R(M+e^0)-\delta^0 = R(M+1)-e^0\delta^0 = 0.$$

Следовательно, выполняется (22).

Отметим, что в каждом из случаев А, Б за счет выбора номера e^0 можно сделать δ^0 меньше любого заданного положительного числа. Кроме того, справедливо (22), и если $\alpha^2+\beta^2<1$, то

$$\sqrt{w_{11}^2(k)+w_{21}^2(k)} = \begin{cases} \delta^0, & k=M+e^0;\\ 0, & k\neq M+e^0, \end{cases}$$

если же $\alpha^2+\beta^2=1$, то

$$\sqrt{w_{11}^2(k)+w_{21}^2(k)} = \begin{cases} \delta^0, & k\in[M+1,M+e^0];\\ 0, & k\notin[M+1,M+e^0], \end{cases}$$

при этом $e^0\delta^0=R(M+1)$.

Теперь последовательно и попарно рассмотрим уравнения системы (19). Согласно доказанному выше существуют номера $e_1^0,e_2^0,\dots,e_{s_0}^0$, положительные числа $\delta_1^0,\delta_2^0,\dots,\delta_{s_0}^0$ и управления $w_{11}(\cdot),w_{21}(\cdot),\dots,w_{1,s_0}(\cdot),w_{2,s_0}(\cdot)$ такие, что для решения j-й пары уравнений

$$\begin{aligned} y_{1j}(k+1) &= \alpha_j y_{1j}(k)-\beta_j y_{2j}(k)-w_{1j}(k),\\ y_{2j}(k+1) &= \beta_j y_{1j}(k)+\alpha_j y_{2j}(k)-w_{2j}(k), \quad j=1,2,\dots,s_0, \end{aligned}$$

системы (19) имеем

$$y_{1j}(N^0+e_1^0+\dots+e_j^0+1)=0, \quad y_{2j}(N^0+e_1^0+\dots+e_j^0+1)=0,$$

где $N^0=n^{l_1}$. При этом если $\alpha_j^2+\beta_j^2<1$, то

$$\sqrt{w_{1j}^2(k)+w_{2j}^2(k)} = \begin{cases} \delta_j^0, & k=N^0+e_1^0+\dots+e_j^0;\\ 0, & k\neq N^0+e_1^0+\dots+e_j^0, \end{cases}$$

если же $\alpha_j^2+\beta_j^2=1$, то

$$\sqrt{w_{1j}^2(k)+w_{2j}^2(k)} = \begin{cases} \delta_j^0, & k\in[N^0+e_1^0+\dots+e_{j-1}^0+1, N^0+e_1^0+\dots+e_j^0];\\ 0, & k\notin[N^0+e_1^0+\dots+e_{j-1}^0+1, N^0+e_1^0+\dots+e_j^0], \end{cases}$$

и при этом $e_j^0\delta_j^0=R_j(N^0+e_1^0+\dots+e_j^0+1)$, $j=1,\dots,s_0$.

Пусть $N^1=N^0+e_1^0+\dots+e_{s_0}^0$. Тогда $x_2^0(k)=0$ при $k\geq N^1+1$.

4. *Система, соответствующая клетке B_j, $1 \le j \le l_2$.* При каждом j, $1 \le j \le l_2$, система (5) эквивалентна системе

$$\begin{cases} y_{11}(k+1) = \alpha y_{11}(k) - \beta y_{21}(k) + y_{12}(k) - w_{11}(k), \\ y_{21}(k+1) = \beta y_{11}(k) + \alpha y_{21}(k) + y_{22}(k) - w_{21}(k), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_{1,s-1}(k+1) = \alpha y_{1,s-1}(k) - \beta y_{2,s-1}(k) + y_{1s}(k) - w_{1,s-1}(k), \\ y_{2,s-1}(k+1) = \beta y_{1,s-1}(k) + \alpha y_{2,s-1}(k) + y_{2s}(k) - w_{2,s-1}(k), \\ y_{1s}(k+1) = \alpha y_{1s}(k) - \beta y_{2s}(k) - w_{1s}(k), \\ y_{2s}(k+1) = \beta y_{1s}(k) + \alpha y_{2s}(k) - w_{2s}(k), \end{cases} \tag{23}$$

где $k = M+1, M+2, \dots, M$ — натуральное число. Рассмотрим систему (23), начиная с последней пары ее уравнений. Полагаем $w_{1j}(k) = w_{2j}(k) = 0$, $j = 1, \dots, s$, при $k = 1, 2, \dots, M$. Обозначим $R_s(k) = \sqrt{y_{1s}^2(k) + y_{2s}^2(k)}$. Если $R_s(M+1) = 0$, то, полагая $w_{1s}(k) = w_{2s}(k) = 0$, $k = M+1, M+2, \dots$, получаем $y_{1s}(k) = y_{2s}(k) = 0$, $k = 1, 2, \dots$ Пусть $R_s(M+1) \ne 0$. Согласно доказанному в п. 3 можно выбрать номер e_s, число δ_s и управления $w_{1s}(\cdot), w_{2s}(\cdot)$ так, чтобы $y_{1s}(M+e_s+1) = 0$, $y_{2s}(M+e_s+1) = 0$. При этом если $\alpha^2 + \beta^2 < 1$, то

$$\sqrt{w_{1s}^2(k) + w_{2s}^2(k)} = \begin{cases} \delta_s, & k = M + e_s; \\ 0, & k \ne M + e_s, \end{cases} \tag{24}$$

если же $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, то

$$\sqrt{w_{1s}^2(k) + w_{2s}^2(k)} = \begin{cases} \delta_s, & k \in [M+1, M+e_s]; \\ 0, & k \notin [M+1, M+e_s], \end{cases} \tag{25}$$

и при этом $e_s \delta_s = R_s(M+e_s+1)$. Теперь рассмотрим предпоследнюю пару уравнений системы (23):

$$\begin{aligned} y_{1,s-1}(k+1) &= \alpha y_{1,s-1}(k) - \beta y_{2,s-1}(k) + y_{1s}(k) - w_{1,s-1}(k), \\ y_{2,s-1}(k+1) &= \beta y_{1,s-1}(k) + \alpha y_{2,s-1}(k) + y_{2s}(k) - w_{2,s-1}(k). \end{aligned} \tag{26}$$

Полагаем $w_{1,s-1}(k) = 0$, $w_{2,s-1}(k) = 0$, $k = M+1, \dots, M+e_s$. Рассмотрим уравнения (26) при $k \ge M + e_s + 1$. Тогда с учетом того, что $y_{1s}(k) = 0$, $y_{2s}(k) = 0$, $k \ge M + e_s + 1$, имеем

$$\begin{aligned} y_{1,s-1}(k+1) &= \alpha y_{1,s-1}(k) - \beta y_{2,s-1}(k) - w_{1,s-1}(k), \\ y_{2,s-1}(k+1) &= \beta y_{1,s-1}(k) + \alpha y_{2,s-1}(k) - w_{2,s-1}(k), \end{aligned}$$

где начальными значениями для $y_{1,s-1}(k)$ и $y_{2,s-1}(k)$ будут $y_{1,s-1}(M+e_s+1)$ и $y_{2,s-1}(M+e_s+1)$.

Аналогично рассмотренному выше случаю числа e_{r-1}, δ_{s-1} и управления $w_{1,s-1}(\cdot)$ и $w_{2,s-1}(\cdot)$ выберем так, чтобы $y_{1,s-1}(M+e_s+e_{s-1}+1) = 0$ и $y_{2,s-1}(M+e_s+e_{s-1}+1) = 0$. При $k \ge M + e_s + e_{s-1} + 1$ полагаем $w_{1,s-1}(k) = 0$, $w_{2,s-1}(k) = 0$. Дальше рассуждения проводятся аналогично случаям s, $s-1$.

Таким образом, существуют числа $e_s, e_{s-1}, \dots, e_1$, $\delta_s, \dots, \delta_1$ и управления $w_{1s}(\cdot), w_{2s}(\cdot), \dots, w_{11}(\cdot), w_{21}(\cdot)$ такие, что при $\alpha^2+\beta^2 < 1$ справедливо (24) и $y_{1,s}(M+e_s+1) = 0$, $y_{2,s}(M+e_s+1) = 0$,

$$\sqrt{w_{1,s-1}^2(k) + w_{2,s-1}^2(k)} = \begin{cases} \delta_{s-1}, & k = M + e_s + e_{s-1}; \\ 0, & k \ne M + e_s + e_{s-1}, \end{cases} \tag{27}$$

$$y_{1,s-1}(M+e_s+e_{s-1}+1) = 0, \quad y_{2,s-1}(M+e_s+e_{s-1}+1) = 0$$

и т. д.,

$$\sqrt{w_{11}^2(k)+w_{21}^2(k)}=\begin{cases}\delta_1, & k=M+e_s+e_{s-1}+\dots+e_1;\\ 0, & k\neq M+e_s+e_{s-1}+\dots+e_1,\end{cases} \tag{28}$$

$$y_{11}(M+e_s+\dots+e_1+1)=0,\quad y_{21}(M+e_s+\dots+e_1+1)=0.$$

Если же $\alpha^2+\beta^2=1$, то выполняется (25) и $e_s\delta_s=R_s(M+1)$, $y_{1,s}(M+e_s+1)=0$, $y_{2,s}(M+e_s)=0$,

$$\sqrt{w_{1,s-1}^2(k)+w_{2,s-1}^2(k)}=\begin{cases}\delta_{s-1}, & k\in[M+e_s+1,M+e_s+e_{s-1}];\\ 0, & k\notin[M+e_s+1,M+e_s+e_{s-1}],\end{cases} \tag{29}$$

$$e_{s-1}\delta_{s-1}=R_{s-1}(M+e_s+1),\quad y_{1,s-1}(M+e_s+e_{s-1}+1)=0,\quad y_{2,s-1}(M+e_s+e_{s-1}+1)=0$$

и т.д.,

$$\sqrt{w_{11}^2(k)+w_{21}^2(k)}=\begin{cases}\delta_1, & k\in[M+e_s+e_{s-1}+\dots+e_2+1,M+e_s+e_{s-1}+\dots+e_1];\\ 0, & k\notin[M+e_s+e_{s-1}+\dots+e_2+1,M+e_s+e_{s-1}+\dots+e_1],\end{cases} \tag{30}$$

$$e_1\delta_1=R_1(M+e_s+\dots+e_2+1),\quad y_{11}(M+e_s+\dots+e_1+1)=0,\quad y_{21}(M+e_s+\dots+e_1+1)=0.$$

При этом за счет выбора номера e_i $(i=s,s-1,\dots,1)$ можно сделать δ_i меньше любого заданного положительного числа.

Теперь последовательно рассмотрим системы (5) при $j=1,2,\dots,l_2$. Согласно доказанному выше для j-й системы существуют числа $e_{s_j}^j,e_{s_j-1}^j,\dots,e_1^j$, $\delta_{s_j}^j,\dots,\delta_1^j$ и управления $w_{1,s_j}^j(\cdot),w_{2,s_j}^j(\cdot)$, $\dots,w_{11}^j(\cdot),w_{21}^j(\cdot)$ такие, что если $\alpha_j^2+\beta_j^2<1$, то выполнены соотношения (24), (27), (28), если же $\alpha_j^2+\beta_j^2=1$, то выполнены соотношения (25), (29), (30) при $M=N^j$, $\alpha=\alpha_j$, $\beta=\beta_j$, $e_s=e_{s_j}^j$, $\delta_s=\delta_{s_j}^j$, $w_{1s}=w_{1,s_j}^j$, $w_{2s}=w_{2,s_j}^j$, где $N^{j+1}=N^j+e_{s_j}^j+e_{s_j-1}^j+\dots+e_1^j$, $j=1,2,\dots,l_2$. Таким образом, $x(k)=0$, $k\geq N^{l_2+1}+1$.

5. *Допустимость управления* $\overline{w}(\cdot)$.

А. Пусть все собственные числа матрицы C по модулю меньше 1. Тогда при $p\geq 1$ управление $w(\cdot)$ можно выбрать так, чтобы $\|w(\cdot)\|\leq\varepsilon^0$, где ε^0 — положительное число, которое выбирется ниже. Действительно,

$$\|w(\cdot)\|^p=\sum_{j=1}^{\infty}|w(k)|^p=\sum_{j=1}^{N^{l_2}+1}|w(k)|^p=\sum\left(\varepsilon_j^i\right)^p+\sum\left(\delta_j^i\right)^p,$$

т. к. последние суммы состоят из конечного числа слагаемых. Положительные числа ε_j^i и δ_j^i могут быть выбраны сколь угодно близкими к нулю. При этом число слагаемых не меняется. Считаем, что они выбраны так, чтобы выполнялось неравенство $\|w(\cdot)\|\leq\varepsilon^0$.

Б. Пусть имеется собственное число матрицы C, равное 1. Тогда при $p>1$ управление $w(\cdot)$ можно выбрать так, чтобы $\|w(\cdot)\|\leq\varepsilon^0$. Действительно,

$$\|w(\cdot)\|^p=\sum_{k=1}^{\infty}|w(k)|^p=\sum_{k=1}^{N^{l_2+1}}|w(k)|^p=\sum\left(\varepsilon_j^i\right)^p+\sum k_j^i\left(\varepsilon_j^i\right)^p+\sum\left(\delta_j^i\right)^p+\sum e_j^i\left(\delta_j^i\right)^p.$$

Согласно пп. 2 и 4 числа $k_j^i\varepsilon_j^i$, $e_j^i\delta_j^i$ ограничены. При этом положительные числа ε_j^i и δ_j^i могут быть выбраны сколь угодно близкими к нулю. Из условия $p>1$ и ограниченности чисел $k_j^i\varepsilon_j^i$, $e_j^i\delta_j^i$ следует, что положительные числа ε_j^i и δ_j^i могут быть выбраны так, чтобы выполнялось неравенство $\|w(\cdot)\|\leq\varepsilon^0$.

Поскольку S — неособенная действительная матрица, то $S'S$ — симметрическая положительно определенная матрица. Согласно утверждению 1 (см. приложение) для наибольшего собственного значения λ матрицы $S'S$ верно неравенство

$$x'S'Sx\leq\lambda|x|^2,\quad x\in R^n.$$

Так как $\overline{w}(k) = Sw(k)$, то
$$|\overline{w}(k)|^2 = w'(k)S'Sw(k) \le \lambda |w(k)|^2.$$
Тогда если $\varepsilon^0 < \varepsilon_0/\sqrt{\lambda}$, то
$$\|\overline{w}(\cdot)\| = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |\overline{w}(k)|^p\Big)^{1/p} \le \sqrt{\lambda}\Big(\sum_{k=1}^{\infty} |w(k)|^p\Big)^{1/p} < \sqrt{\lambda}\varepsilon^0 < \varepsilon_0$$
и $z\big(N^{l_2+1}+1\big) = Sx\big(N^{l_2+1}+1\big) = 0$. $\square$

Доказательство теоремы. Пусть числа $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ выбраны так, чтобы выполнялись условия
$$\sigma^p = \sigma_1^p + \sigma_2^p + \dots + \sigma_m^p, \quad 0 \le \sigma_i < \rho_i, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$
Построим стратегии преследующих. Согласно лемме существует управление $w_1(\cdot)$, $\|w_1(\cdot)\| \le \rho_1 - \sigma_1$, такое, что для решения уравнения
$$z_1(k+1) = C_1 z_1(k) - w_1(k)$$
имеем $z_1(k) = 0$ при $k \ge N_1 + 1$, где N_1 — некоторое число. Полагаем
$$u_1(k) = \begin{cases} w_1(k) + v(k), & 1 \le k \le M_1; \\ 0, & k \ge M_1 + 1, \end{cases}$$
$$u_j(k) = 0, \quad 1 \le k \le M_1, \quad j \in \{1, \dots, m\} \setminus \{1\},$$
где M_1 — номер, для которого
$$\sum_{k=1}^{M_1} |u_1(k)|^p \le \rho_1^p, \qquad \sum_{k=1}^{M_1+1} |u_1(k)|^p > \rho_1^p.$$
Такой номер может не существовать. Обозначим $K_1 = \min\{M_1, N_1\}$. Теперь перейдем к рассмотрению уравнения
$$z_2(k+1) = C_2 z_2(k) - w_2(k), \quad k = K_1 + 1, K_1 + 2, \dots$$
Начальное состояние $z_2(K_1+1)$ для $z_2(k)$ находится из уравнений
$$z_2(k+1) = C_2 z_2(k) + v(k), \quad k = 1, 2, \dots, K_1.$$
Пусть определены номера $K_1, K_2, \dots, K_i$, $1 \le i \le m-1$. Номер K_{i+1} определим следующим образом. Рассмотрим уравнение
$$z_{i+1}(k+1) = C_{i+1} z_{i+1}(k) + v(k), \quad k = 1, 2, \dots, K_i.$$
Отсюда найдем $z_{i+1}(K_i+1)$. Взяв эту точку за начальное положение, рассмотрим уравнение
$$z_{i+1}(k+1) = C_{i+1} z_{i+1}(k) - w_{i+1}(k), \quad k = K_i + 1, K_i + 2, \dots \tag{31}$$
Согласно лемме существует управление $w_{i+1}(\cdot)$, $\|w_{i+1}(\cdot)\| \le \rho_{i+1} - \sigma_{i+1}$, такое, что для решения уравнения (31) имеем $z_{i+1}(k) = 0$ при $k \ge N_{i+1} + 1$, где N_{i+1} — некоторое число. Полагаем
$$u_{i+1}(k) = \begin{cases} w_{i+1}(k) + v(k), & K_i + 1 \le k \le M_{i+1}; \\ 0, & k \ge M_{i+1} + 1, \end{cases}$$
$$u_j(k) = 0, \quad K_i + 1 \le k \le M_{i+1}, \quad j \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i+1\},$$
где M_{i+1} — номер, для которого
$$\sum_{k=K_i+1}^{M_{i+1}} |u_{i+1}(k)|^p \le \rho_{i+1}^p, \qquad \sum_{k=K_i+1}^{M_{i+1}+1} |u_{i+1}(k)|^p > \rho_{i+1}^p.$$

Обозначим $K_{i+1} = \min\{M_{i+1}, N_{i+1}\}$,

$$v_{i+1}(k) = \begin{cases} v(k), & k \in [K_i + 1, K_{i+1}]; \\ 0, & k \notin [K_i + 1, K_{i+1}], \quad i = 0, 1, 2, \ldots, m-1 \ \ (K_0 = 0). \end{cases}$$

Если

$$\sum_{k=K_r+1}^{M_{r+1}} |v_{r+1}(k)|^p \le \sigma_{r+1}^p,$$

то для управления $u_{r+1}(\cdot)$ имеем

$$\|u_{r+1}(\cdot)\| = \|w_{r+1}(\cdot) + v_{r+1}(\cdot)\| \le \|w_{r+1}(\cdot)\| + \|v_{r+1}(\cdot)\| \le \rho_{r+1} - \sigma_{r+1} + \sigma_{r+1} = \rho_{r+1},$$

т. е. управление $u_{r+1}(\cdot)$ допустимо и (согласно построению $w_{r+1}(\cdot)$) для решения уравнения (31) при $i = r$ имеем $z_{r+1}(N_{r+1}) = 0$, т. е. можно завершить игру. В этом случае $N_{r+1} \le M_{r+1}$. Поэтому достаточно показать, что при некотором $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ выполняется неравенство $N_i \le M_i$. В противном случае $K_i = M_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$, и

$$\sum_{k=M_{i-1}+1}^{M_i} |v_i(k)|^p > \sigma_i^p, \quad i = 1, \ldots, m \ \ (M_0 = 0).$$

Тогда

$$\|v(\cdot)\| \ge \sum_{k=1}^{K_m} |v(k)|^p = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=K_{i-1}+1}^{K_i} |v_i(k)|^p \right) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=M_{i-1}+1}^{M_i} |v_i(k)|^p \right) > \sum_{i=1}^{m} \sigma_i^p = \sigma^p,$$

что невозможно. $\square$

Пусть ρ — некоторое положительное число.

Теорема 2. *Если матрица C имеет собственное число μ по модулю больше единицы и $p \ge 1$, то в системе (2) при $\|\overline{w}(\cdot)\| \le \rho$ из некоторых начальных положений $z(1)$ невозможен перевод фазовой точки z в начало координат.*

Доказательство. С помощью действительного неособенного преобразования $z = Sx$ систему (2) приведем к виду (3). Достаточно показать невозможность перевода в системе (3) фазовой точки z в начало координат из некоторых начальных положений $z(1)$ при $\|w(\cdot)\| \le \rho_0$, где ρ_0 — произвольное фиксированное положительное число. Рассмотрим два случая.

А. Пусть μ — вещественное число, тогда система (3) содержит уравнение вида

$$y(k+1) = \mu y(k) - \omega(k),$$

где y и ω — координаты векторов x и w соответственно. Для доказательства теоремы достаточно показать, что можно выбрать начальное положение $y(1)$ так, чтобы $y(k) \ne 0$, $k = 1, 2, \ldots$ Если $p > 1$, то имеем

$$|y(k+1)| \ge |\mu^k y(1)| - |\mu^{k-1}\omega(1) + \cdots + \mu\omega(k-1) + \omega(k)| \ge$$

$$\ge |\mu^k y(1)| - \left(|\mu|^{q(k-1)} + \cdots + |\mu|^q + 1\right)^{1/q} \left(|\omega(1)|^p + \cdots + |\omega(k-1)|^p + |\omega(k)|^p\right)^{1/p} \ge$$

$$\ge |\mu^k y(1)| - \rho_0 \left(|\mu|^{qk} - 1\right)^{1/q} \left(|\mu|^q - 1\right)^{-1/q},$$

где $q = p/(p-1)$. Теперь ясно, что если

$$|y(1)| > \rho_0 \left(|\mu|^q - 1\right)^{-1/q},$$

то для всех k имеем $y(k+1) > 0$.

Если же $p = 1$, то из неравенства

$$|\omega(1)| + |\omega(2)| + \cdots + |\omega(k)| + \cdots \le \|w(\cdot)\| \le \rho_0$$

получаем $|\omega(k)| \le \rho_0$, $k = 1, 2, \dots$ Тогда

$$|y(k+1)| \ge |\mu^k y(1)| - \left(|\mu^{k-1}\|\omega(1)| + \dots + |\mu\|\omega(k-1)| + |\omega(k)|\right) \ge$$
$$\ge |\mu^k y(1)| - \rho_0 \left(|\mu^{k-1}| + \dots + |\mu| + 1\right) = |\mu|^k \left(|y(1)| - \rho_0 \left(1 - |\mu|^{-k}\right) / (|\mu| - 1)\right).$$

Если

$$|y(1)| > \rho_0 \left(1 - |\mu|^{-k}\right) / (|\mu| - 1),$$

то ясно, что выполняется неравенство $|y(k+1)| > 0$ для всех k.

Б. Пусть $\mu = \alpha + \beta i$, $\beta \ne 0$, тогда система (3) содержит систему

$$y_1(k+1) = \alpha y_1(k) - \beta y_2(k) - \omega_1(k),$$
$$y_2(k+1) = \beta y_1(k) + \alpha y_2(k) - \omega_2(k).$$

Обозначив

$$y(k) = \sqrt{y_1^2(k) + y_2^2(k)}, \quad \omega(k) = \sqrt{\omega_1^2(k) + \omega_2^2(k)},$$

получаем

$$y(k+1) = \left[\left(\alpha y_1(k) - \beta y_2(k) - \omega_1(k)\right)^2 + \left(\beta y_1(k) + \alpha y_2(k) - \omega_2(k)\right)^2\right]^{1/2} \ge$$
$$\ge \left[\left(\alpha y_1(k) - \beta y_2(k)\right)^2 + \left(\beta y_1(k) + \alpha y_2(k)\right)^2\right]^{1/2} - \left(\omega_1^2(k) + \omega_2^2(k)\right)^{1/2} \ge |\mu| y(k) - \omega(k).$$

Дальше рассуждения проводятся аналогично случаю А. $\square$

Следствие. Если все матрицы C_i, $i = 1, \dots, m$, имеют собственные числа μ по модулю больше единицы и $p \ge 1$, то в системе (1) из некоторых начальных положений z^0 невозможно завершение преследования.

Приложение

Здесь приведем некоторые известные факты в нужной форме.

Жорданова форма матрицы. Известно, что матрица C подобна некоторой матрице J, если существует неособенная действительная матрица S такая, что $C = SJS^{-1}$, где $J = \mathrm{diag}\{J_0, J_1, \dots, J_k, B_0, B_1, \dots, B_l\}$, $J_0, J_1, \dots, J_k$ соответствуют действительным собственным числам матрицы C, а $B_0, B_1, \dots, B_l$ — собственным числам, имеющим ненулевую мнимую часть:

$$J_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_r \end{pmatrix}, \qquad J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i \end{pmatrix},$$

$i = 1, \dots, l$, $B_0 = \mathrm{diag}\{T_1, T_2, \dots, T_s\}$,

$$B_j = \begin{pmatrix} T_j & E_2 & O_2 & \dots & O_2 \\ O_2 & T_j & E_2 & \dots & O_2 \\ . & . & . & . & . \\ O_2 & O_2 & O_2 & \dots & T_j \end{pmatrix}, \qquad T_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & -\beta_j \\ \beta_j & \alpha_j \end{pmatrix}$$

$j = 1, \dots, l_1$, E_2 — единичная 2×2-матрица, O_2 — нулевая 2×2-матрица, α_j и β_j — вещественные и мнимые части собственных чисел матрицы C.

Утверждение ([10], с. 252). *Если A — вещественная симметрическая матрица, а $\lambda^-(A)$ и $\lambda^+(A)$ — ее минимальное и максимальное собственные числа соответственно, то для всех $x \in R^n$ имеют место неравенства*

$$\lambda^-(A)|x|^2 \le x'Ax \le \lambda^+(A)|x|^2.$$

Литература

1. Пшеничный Б.Н., Онопчук Ю.Н. *Линейные дифференциальные игры с интегральными ограничениями* // Изв. АН СССР. Сер. техн. кибернетика. – 1968. – № 1. – С. 13–22.
2. Никольский М.С. *Прямой метод в линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями* // Управляемые системы. – Новосибирск, 1969. – Вып. 2. – С. 49–59.
3. Ушаков В.Н. *Экстремальные стратегии в дифференциальных играх с интегральными ограничениями* // ПММ. – 1972. – Т. 36. – № 1. – С. 15–23.
4. Мезенцев А.В. *Достаточное условие убегания для линейных игр с интегральными ограничениями* // ДАН СССР. – 1974. – Т. 218. – № 5. – С. 1021–1023.
5. Сатимов Н.Ю., Рихсиев Б.Б. *Методы решения задачи уклонения от встречи в математической теории управления.* – Ташкент: Фан, 2000. – 176 с.
6. Сатимов Н.Ю., Фазылов А.З., Хамдамов А.А. *О задачах преследования и уклонения в дифференциальных и дискретных играх многих лиц с интегральными ограничениями* // Дифференц. уравнения. – 1984. – Т. 20. – № 8. – С. 1388–1396.
7. Сатимов Н.Ю., Рихсиев Б.Б., Хамдамов А.А. *О задаче преследования для линейных дифференциальных и дискретных игр многих лиц с интегральными ограничениями* // Матем. сб. – 1982. – Т. 118. – № 4. – С. 456–469.
8. Рихсиев Б.Б. *Об одной линейной задаче преследования многих лиц с интегральными ограничениями на управления игроков.* – В кн.: Неклассические задачи математической физики. – Ташкент: Фан, 1985. – С. 184–202.
9. Ибрагимов Г.И. *К задаче группового преследования с интегральными ограничениями на управления игроков* // Матем. заметки. – 2001. – Т. 70. – № 2. – С. 201–212.
10. Треногин В.А. *Функциональный анализ.* – М.: Наука, 1980. – 496 с.

Национальный университет
Республики Узбекистан

Поступила
11.03.2003