ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 8 (471)

УДК 517.968 : 519.6

Ю.Р. АГАЧЕВ

ОПТИМИЗАЦИЯ ПРЯМЫХ И ПРОЕКЦИОННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ СЛАБОСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

К настоящему времени задача оптимизации по порядку точности прямых и проекционных методов [1], [2] решена для ряда классов регулярных и сингулярных интегральных уравнений. В данной работе указанная задача решается для достаточно широкого класса слабосингулярных интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерра второго рода.

Рассмотрим класс $\mathcal{E}$ однозначно разрешимых интегральных уравнений второго рода со слабой особенностью

$$Kx \equiv x(t) + \int_a^{\sigma(t)} \mu(|t-s|)h(t,s)x(s)\,ds = y(t), \quad -\infty < a \le t \le b < \infty, \tag{1}$$

где $\sigma(t) = t$ или $\sigma(t) \equiv b$, а $\mu(\tau)$ — фиксированная функция для всего класса $\mathcal{E}$. Относительно $\mu(\tau)$ будем предполагать, что она имеет *произвольную интегрируемую особенность* лишь в точке $\tau = 0$.

Пусть класс $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1$ задается соотношениями [1]

$$h \in H_{\omega_1}(A_1;[a,b]) \text{ по переменной } t \text{ равномерно относительно } s, \tag{2}$$

$$y \in H_{\omega_2}(A_2;[a,b]), \tag{3}$$

где ω_1, ω_2 — заданные модули непрерывности, а $A_1, A_2, \dots$ — некоторые абсолютные положительные постоянные.

1. *Структурные свойства слабосингулярного интегрального оператора.* Обозначим через $X^* = \{x^*\}$ множество решений уравнений (1) из класса $\mathcal{E}$. Отметим, что в классе X^* все элементы ограничены по норме пространства $C[a,b]$ некоторой постоянной A_3, зависящей, вообще говоря, от характеристик класса $\mathcal{E}$.

Пусть Z есть множество функций

$$z(t) = \int_a^{\sigma(t)} \mu(|t-s|)h(t,s)x(s)ds, \tag{4}$$

когда $h(t,s)$ пробегает класс, определяемый соотношением (2), а $x(s)$ — класс X^*. Введем функцию

$$\omega_3(\delta) = \left\{ \int_0^{\delta} |\mu(\tau)|\,d\tau, \ \ 0 < \delta \le \tau_0; \quad \int_0^{\tau_0} |\mu(\tau)|\,d\tau, \ \ \tau_0 < \delta \le b-a \right\},$$

где τ_0 — ближайшая к нулю точка такая, что $\mu(\tau)$ монотонна и знакопостоянна в промежутке $(0,\tau_0]$. Очевидно, функция $\omega_3(\delta)$, $0 < \delta \le b-a$, является модулем непрерывности.

Лемма 1. *Пусть функция $\mu(\tau)$ монотонна в промежутке $(0,b-a]$. Тогда в классе Z существует функция $z(t)$, обладающая свойством*

$$\omega(z;\delta) \ge A_4\,\widetilde{\omega}(\delta), \quad \widetilde{\omega}(\delta) = \omega_1(\delta) + \omega_3(\delta), \quad 0 < \delta \le b-a, \tag{5}$$

где $\omega(z;\delta)$ — обычный модуль непрерывности функции $z(\cdot) \in C[a,b]$, вычисленный в точке δ.

[1] Здесь через $H_\omega(A;[a,b])$ обозначен обобщенный класс Гёльдера (см., напр., [3], [4]).

Доказательство. Очевидно, без ограничения общности функцию $\mu(\tau)$ можно считать монотонно убывающей и, следовательно, $\mu(0+) = +\infty$.

Пусть сначала $\sigma(t) = t$. Если $\mu(\tau) \geq 0$, $0 < \tau \leq b - a$, то для

$$z_0(t) = \int_a^t \mu(t-s)h_0(t,s)x_0(s)ds,$$

где[1]

$$x_0(s) \equiv A_5, \quad h_0(t,s) \equiv h_0(t) = A_6 + A_7\left[\omega_1(b-a) - \omega_1(b-t)\right], \quad a \leq t \leq b,$$

будем иметь

$$\sup_{a \leq t \leq b-\delta} |z_0(t+\delta) - z_0(t)| \geq \frac{1}{2}\{|z_0(a+\delta) - z_0(a)| + |z_0(b) - z_0(b-\delta)|\} =$$
$$= \frac{A_5}{2}\Big\{\left(A_6 + A_7\left[\omega_1(b-a) - \omega_1(b-a-\delta)\right]\right)\int_0^\delta \mu(\tau)d\tau + \big(A_6 + A_7\left[\omega_1(b-a) - \right.$$
$$\left. - \,\omega_1(\delta)\right]\big)\int_{b-a-\delta}^{b-a} \mu(\tau)d\tau + \omega_1(\delta)\int_0^{b-a}\mu(\tau)d\tau\Big\} \geq A_8\Big\{\int_0^\delta \mu(\tau)\,d\tau + \omega_1(\delta)\Big\}$$

и, следовательно, $\omega(z_0;\delta) \geq A_8\{\omega_1(\delta) + \omega_3(\delta)\}$. Если же функция $\mu(\tau)$ меняет знак в $(0, b-a)$, то $\mu(\tau) \geq 0$ в промежутке $(0, \tau_0)$. Считая $x_0(s) \equiv A_5$ при $a \leq s \leq a + \tau_0$,

$$h_0(t,s) = \begin{cases} A_6 + A_7\left[\omega_1(t_0 - a) - \omega_1(t_0 - t)\right], & a \leq t \leq t_0 \equiv a + \tau_0; \\ A_6 + A_7\omega_1(t_0 - a), & t_0 \leq t \leq b, \end{cases}$$

для функции $z_0(t)$ при $0 < \delta \leq \tau_0$ получим

$$\omega(z_0;\delta) \geq \frac{1}{2}\{|z_0(a+\delta) - z_0(a)| + |z_0(t_0) - z_0(t_0-\delta)|\} \geq$$
$$\geq \frac{A_5}{2}\left\{\left(A_6\int_0^\delta \mu(\tau)d\tau + A_7\omega_1(\delta)\right)\int_0^{\tau_0}\mu(\tau)d\tau\right\} \geq A_9\{\omega_1(\delta) + \omega_3(\delta)\}. \quad (6)$$

При $\tau_0 < \delta \leq b - a$ имеем

$$\omega(z_0;\delta) \geq \omega(z_0;\tau_0) \geq A_9\{\omega_1(\tau_0) + \omega_3(\tau_0)\}. \quad (7)$$

Но, очевидно, $\omega_1(\delta) = \omega_1(\delta\tau_0/\tau_0) \leq (\delta/\tau_0 + 1)\,\omega_1(\tau_0)$, откуда следует

$$\omega_1(\tau_0) \geq \tau_0\,\omega_1(\delta)/[\tau_0 + (b-a)] = A_{10}\,\omega_1(\delta), \ \tau_0 < \delta \leq b - a.$$

Из последнего неравенства с учетом (6), (7) вытекает неравенство

$$\omega(z_0;\delta) \geq A_{11}\{\omega_1(\delta) + \omega_3(\delta)\}, \quad 0 < \delta \leq b - a.$$

Перейдем теперь к случаю $\sigma(t) \equiv b$. Пусть сначала $\mu(\tau)$ неотрицательна и пусть $z_1(t)$ — функция, определяемая соотношением

$$z_1(t) = \int_a^b \mu(|t-s|)h(t,s)x_1(s)ds, \quad x_1(s) \equiv A_5,$$

где

$$h(t,s) \equiv h(t) = \begin{cases} A_{12}, & a \leq t \leq (a+b)/2; \\ A_{12} + A_{13}\omega_1\big(t - (a+b)/2\big), & (a+b)/2 \leq t \leq b. \end{cases}$$

[1]Постоянные A_6, A_7 выбираются из условия принадлежности функции $h_0(t,s)$ классу $H_{\omega_1}(A_1;[a,b])$.

Тогда, считая $\delta \le (b-a)/2$, имеем

$$\omega(z_1;\delta) \ge \frac{1}{2}\Big\{|z_1(a+\delta)-z_1(a)| + \Big|z_1\Big(\frac{a+b+\delta}{2}\Big) - z_1\Big(\frac{a+b-\delta}{2}\Big)\Big|\Big\} = \frac{A_5}{2}\Big\{A_{12}\Big[\int_0^\delta \mu(\tau)d\tau - \int_{b-a-\delta}^{b-a}\mu(\tau)d\tau\Big] + A_{13}\omega_1(\delta/2)\Big[\int_0^{\frac{b-a-\delta}{2}}\mu(\tau)d\tau + \int_0^{\frac{b-a+\delta}{2}}\mu(\tau)d\tau\Big]\Big\} \ge$$
$$\ge \frac{A_5}{2}\Big\{A_{12}\Big[\int_0^\delta \mu(\tau)d\tau - \int_{b-a-\delta}^{b-a}\mu(\tau)d\tau\Big] + A_{13}\frac{\omega_1(\delta)}{2}\int_0^{b-a}\mu(\tau)d\tau\Big\}.$$

Но для достаточно малых $\delta > 0$, $\delta \le \varepsilon < (b-a)/2$,

$$\int_{b-a-\delta}^{b-a}\mu(\tau)\,d\tau \le \mu(b-a-\delta)\delta \le \mu(b-a-\varepsilon)\delta \le \frac{\mu(b-a-\varepsilon)}{\mu(\delta)}\int_0^\delta \mu(\tau)d\tau \le$$
$$\le \frac{\mu(b-a-\varepsilon)}{\mu(\varepsilon)}\int_0^\delta \mu(\tau)d\tau = A_{14}\int_0^\delta \mu(\tau)d\tau,$$

причем существует $\varepsilon = \varepsilon_0$ такое, что при $\delta \le \varepsilon_0$ постоянная $A_{14} < 1$ и, следовательно,

$$\omega(z_1;\delta) \ge A_{15}\Big\{\int_0^\delta \mu(\tau)d\tau + \omega_1(\delta)\Big\}, \quad 0 < \delta \le \varepsilon_0.$$

Если же $\varepsilon_0 < \delta \le b-a$, то

$$\omega(z_1;\delta) \ge \omega(z_1;\varepsilon_0) \ge A_{15}\Big\{\int_0^{\varepsilon_0}\mu(\tau)d\tau + \omega_1(\varepsilon_0)\Big\}.$$

Отсюда с учетом неравенств

$$\omega_1(\varepsilon_0) \ge \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0+b-a}\omega_1(\delta), \quad \int_0^{\varepsilon_0}\mu(\tau)d\tau \ge \frac{\varepsilon_0}{b-a}\int_0^\delta \mu(\tau)d\tau, \quad \varepsilon_0 < \delta \le b-a,$$

получаем оценку

$$\omega(z_1;\delta) \ge A_{16}\Big\{\int_0^\delta \mu(\tau)d\tau + \omega_1(\delta)\Big\}, \quad 0 < \delta \le b-a.$$

В общем случае, когда функция $\mu(\tau)$ меняет знак в промежутке $(0, b-a)$, введем функцию

$$z_1(t) = h(t)\int_a^b \mu(|t-s|)h_1(s)x_1(s)ds, \quad x_1(s) \equiv A_5,$$

где

$$h(t) = \begin{cases} A_{12} + A_{13}\omega_1(\tau_0), & a \le t \le b-\tau_0; \\ A_{12} + A_{13}\omega_1(b-t), & b-\tau_0 \le t \le b, \end{cases}$$
$$h_1(s) = 0 \text{ при } a \le s \le b-\tau_0, \quad h_1(s) = -1 \text{ при } b-\tau_0 \le s \le b.$$

При $0 < \delta \le \tau_0$ имеем

$$z_1(b) - z_1(b-\delta) = A_5\Big\{A_{13}\omega_1(\delta)\Big[\int_0^{\tau_0-\delta}\mu(\tau)d\tau + \int_0^{\delta}\mu(\tau)d\tau\Big] +$$

$$+ A_{12}\Big[\int_0^{\delta}\mu(\tau)d\tau - \int_{\tau_0-\delta}^{\tau_0}\mu(\tau)d\tau\Big]\Big\} \ge A_5A_{13}\omega_1(\delta)\int_0^{\tau_0}\mu(\tau)d\tau,$$

$$-z_1(b-\tau_0) + z_1(b-\tau_0-\delta) = A_5\{A_{12} + A_{13}\omega_1(\tau_0)\}\Big\{\int_0^{\delta}\mu(\tau)d\tau -$$

$$-\int_{\tau_0}^{\tau_0+\delta}\mu(\tau)d\tau\Big\} \ge A_5\{A_{12} + A_{13}\omega_1(\tau_0)\}\int_0^{\delta}\mu(\tau)d\tau.$$

Поэтому, как и выше, заключаем, что $\omega(z_1;\delta) \ge A_{17}\{\omega_1(\delta) + \omega_3(\delta)\}$, $0 < \delta \le b-a$. □

Отметим, что в лемме 1 на функцию $\mu(\tau)$ наложено условие монотонности. Однако от этого предположения можно избавиться. А именно, справедлива

Лемма 2. *Если $\mu(\tau)$ имеет особенность лишь в точке $\tau = 0$, то в классе Z существует функция $z(t)$, для которой выполнено неравенство* (5).

Доказательство. Рассмотрим функцию (4) в промежутке $[a, a+\tau_0]$ и через $\widetilde{\omega}(z;\delta)$, $0 < \delta \le \tau_0$, обозначим модуль непрерывности $z \in C[a, a+\tau_0]$. Тогда согласно лемме 1 для промежутка $[a, a+\tau_0]$ при $\sigma(t) = t$ в классе Z существует функция $z(t)$, для которой выполнено неравенство

$$\widetilde{\omega}(z;\delta) \ge A_{18}\widetilde{\omega}(\delta), \quad \widetilde{\omega}(\delta) = \omega_1(\delta) + \omega_3(\delta), \ \ 0 < \delta \le \tau_0. \tag{8}$$

Если же $\sigma(t) \equiv b$, то при $h(t,s) \equiv 0$, $s \in [a+\tau_0, b]$, функция (4) имеет вид

$$z(t) = \int_a^{a+\tau_0}\mu(|t-s|)h(t,s)x(s)ds$$

и, следовательно, по лемме 1 в классе Z существует функция $z(t)$, обладающая свойством (8). Для завершения доказательства леммы остается заметить, что $\omega(z;\delta) \ge \widetilde{\omega}(z;\delta)$ при $0 < \delta \le \tau_0$, а при $\tau_0 < \delta \le b-a$ любой модуль непрерывности ω обладает свойством

$$\omega(\delta) \ge \omega(\tau_0) \ge \frac{\tau_0}{b-a+\tau_0}\omega(\delta). \quad \square$$

Из леммы 2 вытекает

Лемма 3. *Класс Z совпадает с классом $H_{\widetilde{\omega}}(A_{19};[a,b])$, где* [1]

$$\widetilde{\omega}(\delta) \asymp \omega_1(\delta) + \omega_3(\delta), \ \ 0 < \delta \le b-a,$$

$$A_{19} \le A_1A_3\sup_{a\le t\le b}\Big\{\int_a^{t-a}|\mu(\tau)|d\tau + \int_a^{b-t}|\mu(\tau)|d\tau\Big\}.$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что каждая функция (4) из класса Z в пространстве $C[a,b]$ обладает свойством (напр., [5], [6])

$$\omega(z;\delta) \le A_{20}\Big\{\int_0^{\delta}|\mu(\tau)|d\tau + \omega_1(\delta)\Big\}, \ \ 0 < \delta \le b-a. \tag{9}$$

[1]Здесь и далее символ $\asymp$ означает слабую эквивалентность.

Если точка τ_0 не совпадает с правым концом промежутка $(0, b-a]$, то существует точка $\tau_1 \in (0, \tau_0)$ такая, что

$$\int_0^{\tau_0} |\mu(\tau)| d\tau = \int_0^{b-a} |\mu(\tau)| d\tau - \int_{\tau_0}^{b-a} |\mu(\tau)| d\tau = \int_0^{b-a} |\mu(\tau)| d\tau -$$
$$- |\mu(\tau_1)|(b-a-\tau_0) \geq \int_0^{b-a} |\mu(\tau)| d\tau - \frac{b-a-\tau_0}{\tau_1} \int_0^{\tau_1} |\mu(\tau)| d\tau \geq$$
$$\geq \int_0^{b-a} |\mu(\tau)| d\tau - \frac{b-a-\tau_0}{\tau_1} \int_0^{\tau_0} |\mu(\tau)| d\tau,$$

откуда следует справедливость двойного неравенства

$$\int_0^{\tau_0} |\mu(\tau)| d\tau \leq \int_0^{\delta} |\mu(\tau)| d\tau \leq A_{21} \int_0^{\tau_0} |\mu(\tau)| d\tau, \quad \tau_0 < \delta \leq b-a.$$

Поэтому неравенство (9) можно продолжить: $\omega(z;\delta) \leq A_{22}\{\omega_1(\delta) + \omega_3(\delta)\}$. Отсюда следует включение $Z \subset H_{\widetilde{\omega}}[a,b]$ с $\widetilde{\omega}(\delta) = A_{22}\{\omega_1(\delta) + \omega_3(\delta)\}$.

С другой стороны, согласно лемме 2 в классе Z существует функция $z(t)$, для которой $\omega(z;\delta) \geq A_{23}\widetilde{\omega}(\delta)$, $0 < \delta \leq b-a$. $\square$

2. *О классе решений* X^*. Доказанная выше лемма 3 позволяет изучить структурные свойства класса X^*. А именно, справедлива

Теорема 1. *Класс* X^* *совпадает с классом* $H_{\omega_*}(A_3; [a,b])$, *где модуль непрерывности* ω_* *задается соотношением*

$$\omega_*(\delta) \asymp \omega_1(\delta) + \omega_2(\delta) + \omega_3(\delta), \quad 0 < \delta \leq b-a.$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что из результатов по слабосингулярным интегральным уравнениям (1) (напр., [5], [6]) следует, что для любой функции $x \in X^*$ имеет место неравенство

$$\omega(x;\delta) \leq A_{24}\left\{\omega_1(\delta) + \omega_2(\delta) + \int_0^{\delta} |\mu(\tau)| d\tau\right\} \leq A_{25}\{\omega_1(\delta) + \omega_2(\delta) + \omega_3(\delta)\} \equiv \overline{\omega}(\delta).$$

Это означает, что множество X^* содержится в обобщенном классе Гёльдера $H_{\overline{\omega}}(A_3; [a,b])$. С другой стороны, если модули непрерывности связаны между собой соотношением $\omega_2(\delta) \geq A_{26}\{\omega_1(\delta) + \omega_3(\delta)\}$, $0 < \delta \leq b-a$, то решение $x(t)$ уравнения (1) при $h(t,s) \equiv 0$ и $y(t) = A_{27}\omega_2(t-a)$ обладает свойством

$$\omega(x;\delta) = \omega(y;\delta) = A_{27}\omega_2(\delta) \geq A_{28}\overline{\omega}(\delta), \quad 0 < \delta \leq b-a. \tag{10}$$

Если же $\omega_2(\delta)$ — величина более высокого порядка малости (при $\delta \to 0+$), чем $\omega_1(\delta) + \omega_3(\delta)$, то введем положительную при $a \leq t \leq (a+b)/2$ функцию

$$x(t) = y(t) - z(t), \quad z(t) = \int_a^{\sigma(t)} \mu(|t-s|)h(t,s)x(s)ds,$$

где $y \in H_{\omega_2}(A_2; [a,b])$, $h \in H_{\omega_1}(A_1; [a,b])$ по переменной t, $h(t,s) \equiv 0$ при $(a+b)/2 \leq s \leq b$. Поскольку $z \in Z$, то с учетом леммы 2 можно по функции $h(t,s)$ построить $z(t)$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$\omega(x;\delta) \geq \omega(z;\delta) - \omega(y;\delta) \geq A_{29}\{\omega_1(\delta) + \omega_3(\delta)\} \geq A_{30}\overline{\omega}(\delta), \quad 0 < \delta \leq b-a.$$

Из (10) и последнего неравенства вытекает, что в множестве X^* существует функция $x \in H_{\omega_*}$. $\square$

Сузим несколько класс $\mathcal{E}$. А именно, обозначим через $\mathcal{E} = \mathcal{E}_2$ класс уравнений (1), который задается дополнительным условием $h \in H_{\omega_1}(A_1; [a,b])$ по переменной s равномерно относительно t.

Пусть $\overline{X}^*$ есть соответствующее множество решений уравнений (1) из класса $\mathcal{E}_2$. Тогда справедлива

Теорема $1'$. *Класс решений* $\overline{X}^*$ *совпадает с обобщенным классом Гёльдера, определяемым модулем непрерывности* ω_*, *обладающим свойством* $\omega_*(\delta) \asymp \omega_1(\delta) + \omega_2(\delta) + \omega_3(\delta)$, $0 < \delta \leq b - a$.

Отметим, что доказательство этой теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 1, при этом для указанного класса $\mathcal{E}_2$ уравнений (1) в доказательства лемм 1 и 2 необходимо внести некоторые уточнения.

3. *О постановке задачи оптимизации.* В этом пункте приведем постановку задачи оптимизации прямых и проекционных методов [1], [2] (см. также [7]) применительно к нашему случаю.

Пусть X — данное банахово пространство, а $X_n \subset X$ — произвольное конечномерное подпространство размерности $N \in \mathbb{N}$. Через $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X, X)$ будем обозначать пространство линейных (т. е. аддитивных и однородных) операторов, отображающих X в себя. Очевидно, множество функций $h(t,s)$, определенное соотношением (2), задает класс операторов $\mathcal{K} = \{K\} \subset \mathcal{L}(\mathrm{X})$, а соотношение (3) — класс правых частей $\mathcal{Y}^* = \{y\} \subset X$. Поэтому класс $\mathcal{E}$ уравнений (1) будет определяться классами $\mathcal{K}$ и $\mathcal{Y}^*$. Введем класс $\mathcal{E}_n = \{\mathrm{e}_n\}$ однозначно разрешимых операторных уравнений

$$K_n x_n = y_n \quad (x_n, y_n \in \mathrm{X}_n, K_n \in \mathcal{L}(X_n)), \tag{11}$$

порождаемых прямыми методами решения уравнения (1) при произвольно фиксированном подпространстве X_n с $\dim \mathrm{X}_n = N < \infty$.

Решение $x^* \in X$ уравнения (1) из класса $\mathcal{E}$ будем аппроксимировать решениями $x_n^* \in X_n \subset X$ уравнений (11) из класса $\mathcal{E}_n$. При этом за оптимальную оценку погрешности класса $\mathcal{E}_n$ прямых методов (11) на классе $\mathcal{E}$ уравнений (1) примем величину

$$V_N(\mathcal{E}) = \inf_{X_n} \inf_{e_n \in \mathcal{E}_n} \sup_{e \in \mathcal{E}} \|x^* - x_n^*\|_X, \tag{12}$$

где внутренний inf берется по всем уравнениям вида (11) при произвольно фиксированном подпространстве X_n, а внешний inf — по всевозможным подпространствам $X_n \subset X$ размерности N.

Определение 1. Пусть существует фиксированный прямой метод (уравнение)

$$K_n^\circ x_n^\circ = y_n^\circ \quad (x_n^\circ, y_n^\circ \in \mathrm{X}_n^\circ \subset X,\ K_n^\circ \in \mathcal{L}(X_n^\circ)) \tag{11°}$$

с $\dim \mathrm{X}_n^\circ = N$, для которого выполняется условие

$$\sup\{\|x^* - x_n^\circ\|_X : e \in \mathcal{E}\} \asymp V_N(\mathcal{E}), \quad x_n^\circ = K_n^{\circ -1} y_n^\circ. \tag{13}$$

Тогда метод (11°) называется оптимальным по порядку среди всевозможных прямых методов вида (11) на классе $\mathcal{E}$ уравнений (1).

Далее, обозначим через $\mathcal{P}_n = \mathcal{P}(X, X_n) \subset \mathcal{L}(X, X_n)$ некоторое множество линейных проекционных ($P_n^2 = P_n$) операторов из X в X_n и наряду с (11) и (11°) рассмотрим уравнения

$$K_n x_n \equiv P_n K x_n = P_n y \quad (x_n \in \mathrm{X}_n,\ P_n \in \mathcal{P}(X, X_n)), \tag{14}$$

$$K_n^\circ x_n^\circ \equiv P_n^\circ K x_n^\circ = P_n^\circ y \quad (x_n^\circ \in \mathrm{X}_n^\circ,\ P_n^\circ \in \mathcal{P}(X, X_n^\circ)). \tag{14°}$$

Отметим, что уравнениями (14), (14°) описываются широко применяемые на практике проекционные методы, которые являются частными случаями прямых методов (11) и (11°) соответственно. Поэтому, если элемент $x_n^\circ = (P_n^\circ K)^{-1} P_n^\circ y$ удовлетворяет условию (13), то проекционный метод (14°) является оптимальным по порядку среди всех прямых методов вида (11). Однако на практике многие проекционные методы такой "конкуренции" не выдерживают. Как показано в ([1], гл. II и IV), таким "неприятным" свойством обладают, например, полиномиальные проекционные методы решения интегральных уравнений в пространстве непрерывных функций. Поэтому имеет смысл специально организовать оптимизацию класса проекционных методов вида (14).

В этом случае за оптимальную оценку погрешности класса $\mathcal{E}_n$ проекционных методов (14) на классе $\mathcal{E}$ уравнений (1) принимается величина

$$U_n(\mathcal{E}) = \inf_{X_n} \inf_{P_n \in \mathcal{P}_n} \sup_{e \in \mathcal{E}} \|x^* - x_n^*\|_X. \tag{15}$$

Определение 2. Если элемент $x_n^\circ = (P_n^\circ K)^{-1} P_n^\circ y$ удовлетворяет условию

$$\sup\{\|x^* - x_n^\circ\|_X : e \in \mathcal{E}\} \asymp U_n(\mathcal{E}), \tag{16}$$

то проекционный метод (14°) называется оптимальным по порядку среди всех проекционных методов вида (14) на классе $\mathcal{E}$ уравнений (1).

Приведем здесь лишь два результата, касающихся оптимальных оценок погрешности (12) и (15) (напр., [1], [2], [7]).

Лемма 4. *Пусть выполнены условия*

а) X^* — *центрально-симметрический компакт в пространстве* X;
б) $\|K\|_{X\to X} \le c_0 < \infty$, $\|K^{-1}\|_{X\to X} \le c_1 < \infty$, *где* c_0 *и* c_1 — *положительные постоянные, общие для всего класса* $\mathcal{E}$;
в) *уравнения* (1) *и* (11°) *таковы, что*

$$\sup_{K\in\mathcal{K}} \|K - K_n^\circ\|_{X_n^\circ \to X} = O(d_n), \quad \sup_{y \in \mathcal{Y}^*} \|y - y_n^\circ\|_X = O(d_n),$$

где $d_n = d_n(X^*, X)$ — *колмогоровский поперечник компакта* X^* *в* X.

Тогда справедливы соотношения

$$V_n(\mathcal{E}) \asymp \sup_{e\in\mathcal{E}} \|x^* - x_n^\circ\|_X \asymp d_n, \tag{17}$$

и прямой метод (11°) *оптимален по порядку в смысле определения* 1.

Лемма 5. *Пусть*

$$K \equiv E + T \in \mathcal{L}(X), \quad K_n = E + P_n T \in \mathcal{L}(X_n),$$
$$K_n^\circ = E + P_n^\circ T \in \mathcal{L}(X_n^\circ), \quad P_n \in \mathcal{P}(X, X_n),\ P_n^\circ \in \mathcal{P}(X, X_n^\circ).$$

Если $\sup\limits_{K\in\mathcal{K}} \|E - K_n^{\circ -1} P_n^\circ T\|_{X\to X} \asymp 1$ *и оператор* P_n° *экстремален по порядку для проекционного поперечника* $\pi_n(X^*, X)$, *то проекционный метод* (14°) *оптимален по порядку в смысле определения* 2.

4. *Оптимизация прямых методов решения уравнений* (1). Приведенная выше лемма 4 позволяет сформулировать общий результат по оптимальным по порядку прямым методам решения класса $\mathcal{E}$ уравнений (1).

Приближенное решение x_n° уравнения (1) будем определять как точное решение уравнения

$$K_n^\circ x_n^\circ \equiv x_n^\circ + P_n^\circ T x_n^\circ = P_n^\circ y \quad (x_n^\circ \in \mathrm{X}_n^\circ,\ \ P_n^\circ \in \mathcal{L}(X, X_n^\circ)), \tag{18}$$

где оператор T задается соотношением

$$(Tx)(t) \equiv (T\mu h x)(t) = \int_a^{\sigma(t)} \mu(|t-s|) h(t,s) x(s) ds.$$

Теорема 2. *Пусть* $X = C[a,b]$. *Тогда оптимальная оценка погрешности* (12) *на классе* $\mathcal{E}$ *уравнений* (1) *характеризуется порядковым соотношением*

$$V_N(\mathcal{E}) \asymp \omega_1\left(\frac{b-a}{N}\right) + \omega_2\left(\frac{b-a}{N}\right) + \int_0^{\frac{b-a}{N}} |\mu(\tau)|d\tau. \tag{19}$$

Если X_n° — *экстремальное подпространство для поперечника* $d_N = d_N(X^*, X)$, *а операторы* $P_n^\circ \in \mathcal{L}(X, X_n^\circ)$ *сильно сходятся к единичному оператору в пространстве* X, *то прямой метод* (18) *оптимален по порядку в смысле определения* 1.

Действительно, согласно теореме 1 $X^* = H_{\omega_*}(A_3; [a,b])$ и поэтому из леммы 4 и результатов по поперечникам компактов (напр., [3], [4]) следует, что $V_N(\mathcal{E}) \asymp d_N \asymp \omega_*((b-a)/N)$. Для завершения доказательства соотношения (19) остается лишь заметить, что $\omega_3(\delta) \asymp \int_0^\delta |\mu(\tau)|d\tau$.

С другой стороны, уравнения (18) однозначно разрешимы при всех натуральных n, начиная с некоторого. Это следует из результатов по общей теории приближенных методов анализа (напр., [1], [2]) и результатов по прямым методам решения интегральных уравнений (1) (напр., [5], [6]). При этом для погрешности приближенных решений имеем

$$\|x - x_n^\circ\|_X = O\left\{\omega(y; (b-a)/N) + \omega_t(h; (b-a)/N) + \int_0^{(b-a)/N} |\mu(\tau)|d\tau\right\}.$$

Отсюда

$$\sup_{e\in\mathcal{E}} \|x - x_n^\circ\|_X \asymp \omega_*((b-a)/N) \asymp V_N(\mathcal{E}),$$

и, следовательно, прямой метод (18) оптимален в смысле определения 1. $\square$

Отметим, что (18) представляет собой уравнение проекционного метода, если операторы $P_n^\circ \in \mathcal{P}(X, X_n^\circ)$. Поэтому из теоремы 2 с учетом соотношения $U_N(\mathcal{E}) \asymp V_N(\mathcal{E})$ вытекает

Следствие. Пусть в условиях теоремы 2 операторы $P_n^\circ \in \mathcal{P}(X, X_n)$. Тогда проекционный метод (18) оптимален по порядку в смысле любого из определений 1 и 2.

Замечание. Обозначим через $L_\infty(a,b)$ пространство существенно ограниченных в промежутке (a,b) функций. Тогда результаты теоремы 2 и ее следствия сохранятся, если принять $X = L_\infty(a,b)$.

Теорема 2 позволяет строить конкретные оптимальные прямые (и проекционные) методы.

Введем в промежутке $[a,b]$ сетку узлов

$$\Delta_N : a = t_1 < t_2 < \cdots < t_N = b,$$

удовлетворяющую условию “почти равномерности”

$$\max_{2\le k\le N}(t_k - t_{k-1}) / \min_{2\le k\le N}(t_k - t_{k-1}) \le A_{31}.$$

Пусть $X_n^\circ \subset X$ есть подпространство сплайнов нулевой или первой степени с узлами из сетки Δ_N.

Приближенное решение $x_n^\circ \in X_n^\circ$ будем искать как точное решение уравнения

$$K_n^\circ x_n^\circ \equiv x_n^\circ + T_n x_n^\circ = P_n^\circ y \quad (x_n^\circ \in \mathrm{X}_n^\circ, \quad P_n^\circ \in \mathcal{L}(X, X_n^\circ)), \tag{20}$$

где оператор T_n задается одной из формул

$$T_n x_n = P_n^\circ T x_n, \tag{21}$$

$$T_n x_n = P_n^\circ T \widetilde{P}_n^\circ \mu h x_n, \tag{22}$$

$$T_n x_n = P_n^\circ T \mu \overline{P}_n^\circ h x_n, \tag{23}$$

$P_n^\circ \in \mathcal{L}(X, X_n^\circ)$ является оператором метода коллокации или подобластей, а $\widetilde{P}_n^\circ$ и $\overline{P}_n^\circ$ — операторы соответственно метода сплайн-подобластей и сплайн-коллокации нулевой степени (напр., [5], [8]).

Теорема 3. *Пусть* $X = L_\infty(a,b), \mathcal{E} = \mathcal{E}_1$. *Тогда метод* (20), (21) *является оптимальным по порядку на классе* $\mathcal{E}$ *уравнений* (1) *среди всевозможных прямых методов.*

Если же $\mathcal{E} = \mathcal{E}_2$, *то методы* (20), (22) *и* (20), (23) *также оптимальны в смысле определения* 1.

Доказательство. Прежде всего отметим, что операторы P_n°, $\widetilde{P}_n^\circ$ и $\overline{P}_n^\circ$ сходятся сильно к оператору вложения пространства непрерывных функций в $L_\infty(a,b)$. Поскольку образом оператора T является множество Z, то нетрудно показать, что операторы K_n° сходятся сильно к оператору K на подпространстве X_n°. Отсюда следует, что уравнение (20) при всех n, начиная с некоторого, будет однозначно разрешимым, причем

$$\|K - K_n^\circ\|_{X \to X_n^\circ} = O\Big\{\omega_1(1/N) + \omega_2(1/N) + \int_0^{1/N} |\mu(\tau)| d\tau\Big\} \asymp \omega_*(1/N) \asymp d_N(X^*, X) \equiv d_N.$$

Учитывая экстремальность подпространства X_n° для колмогоровского поперечника d_N, из леммы 4 получим утверждения теоремы. $\square$

Замечание 1. Теорема 3 содержит в себе утверждение об оптимальности по порядку сплайн-методов коллокации, подобластей и одной схемы метода механических квадратур (напр., [5], [9]), построенных по узлам сетки Δ_N.

Замечание 2. На классе $\mathcal{E}_1$ методы (20), (22) и (20), (23) в принципе не могут быть оптимальными по порядку. Более того, на этом множестве уравнение (20) для соответствующих методов может оказаться даже неразрешимым.

5. *Оптимизация полиномиальных проекционных методов решения уравнений* (1). Как уже было отмечено выше, полиномиальные проекционные методы, вообще говоря, не выдерживают "конкуренции" среди всех прямых методов. В связи с этим займемся исследованием задачи оптимизации полиномиальных проекционных методов.

Пусть $X_n^\circ = \mathbb{H}_{N-1}$ — подпространство алгебраических многочленов степени не выше $N-1$. Приближенное решение x_n° уравнения (1) будем искать как точное решение уравнения

$$K_n^\circ x_n^\circ \equiv x_n^\circ + P_n^\circ T x_n^\circ = P_n^\circ y \quad (x_n^\circ \in \mathrm{X}_n^\circ, \;\; P_n^\circ \in \mathcal{P}(X, X_n^\circ)). \qquad (24)$$

Теорема 4. *Пусть* $X = C[a,b]$. *Тогда оптимальная оценка погрешности* (15) *на классе* $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1$ *уравнений* (1) *характеризуется порядковым соотношением*

$$U_N(\mathcal{E}) \asymp \ln N \Big\{\omega_1\Big(\frac{b-a}{N}\Big) + \omega_2\Big(\frac{b-a}{N}\Big) + \int_0^{\frac{b-a}{N}} |\mu(\tau)| d\tau\Big\}. \qquad (25)$$

Если операторы $P_n^\circ \in \mathcal{P}(X, X_n^\circ)$ *экстремальны по порядку для проекционного поперечника* $\pi_N(X^*, X)$, *то проекционный метод* (24) *оптимален по порядку в смысле определения* 2; *в частности, полиномиальные методы коллокации и подобластей по узлам Чебышева первого и второго родов, а также полиномиальный метод подобластей по экстремальным точкам многочлена Чебышева первого рода оптимальны по порядку на классе* $\mathcal{E}$ *среди всевозможных полиномиальных проекционных методов* (14) *с проекционным оператором* P_n.

Доказательство. Прежде всего заметим, что уравнение (24) однозначно разрешимо при всех n, хотя бы достаточно больших. Отсюда следует, что операторы K_n° ограничены на всем классе $\mathcal{E}$ по норме в совокупности. Поскольку оператор T переводит непрерывные функции в функции из класса Z, имеем

$$\|E - K_n^{\circ -1} P_n^\circ T\|_{X \to X} \le 1 + \|K_n^{\circ -1}\| \, \|P_n^\circ T\| = O(1).$$

Таким образом, предположения леммы 5 выполнены и поэтому метод (24) оптимален в смысле определения 2.

Порядковая оценка (25) вытекает из результатов по поперечникам (напр., [4]) и результатов по оптимизации полиномиальных проекционных методов для регулярных интегральных уравнений (напр., [1], [2])

$$U_n(\mathcal{E}) \asymp \inf_{P_n \in \mathcal{P}_n} \sup_{e \in \mathcal{E}} \|x - x_n^\circ\| \asymp \sup_{x \in H_{\omega_*}} \|x - S_n x\| \asymp \ln N \cdot d_N(X^*, X);$$

здесь через S_n обозначен полиномиальный оператор Фурье порядка N. $\square$

Замечание. Утверждение теоремы 4 сохранится для класса $\mathcal{E} = \mathcal{E}_2$.

Литература

1. Габдулхаев Б.Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1980. – 232 с.
2. Габдулхаев Б.Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач и прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений*: Дисс. … докт. физ.-матем. наук. – Киев, 1985. – 48 с.
3. Корнейчук Н.П. *Точные константы в теории приближения.* – М.: Наука, 1987. – 424 с.
4. Тихомиров В.М. *Некоторые вопросы теории приближений.* – М.: Изд-во МГУ, 1976. – 304 с.
5. Агачев Ю.Р. *Сплайновые приближения решений интегральных и дифференциальных уравнений*: Дисс. … канд. физ.-матем. наук. – Казань, 1987. – 144 с.
6. Агачев Ю.Р. *Сходимость метода подобластей и одного "смешанного" метода для интегральных и дифференциальных уравнений.* – Казанск. ун-т. – Казань, 1986. – 48 с. – Деп. в ВИНИТИ 30.12.86, № 9039–В86.
7. Габдулхаев Б.Г. *Оптимизация прямых и проекционных методов решения операторных уравнений* // Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 12. – С. 3–18.
8. Габдулхаев Б.Г. *Аппроксимация полиномами и сплайнами решений слабо сингулярных интегральных уравнений* // Теория приближ. функций. – М.: Наука, 1977. – С. 89–93.
9. Агачев Ю.Р. *Об оптимальных по порядку методах решения слабо сингулярных интегральных уравнений* // Материалы Республиканск. научно-техн. конф. Интеграл. уравнения в прикл. моделир. Ч. II. – Киев, 1983. – С. 7–8.

Казанский государственный университет

Поступила
06.03.2000