Министерство образования и науки Российской Федерации

КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ
им. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО

КАФЕДРА АЛГЕБРЫ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Специальность: 01.03.01 – Математика.

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

(Бакалаврская работа)

ПРИМИТИВНЫЕ ОРГРАФЫ С БОЛЬШИМИ ЭКСПОНЕНТАМИ

Работа завершена:
"____"________2015 г.
____(А.Ф. Сиразиева)

Работа допущена к защите:
Научный руководитель
доцент кафедры алгебры и математической логики
"____"________2015 г.
____(Ю.А. Альпин)

Заведующий кафедрой док.физ.-мат. наук, профессор
"____"________2015 г.
____(М.М. Арсланов)

Казань – 2015

Оглавление

Введение

Матрица называется неотрицательной, если её элементы - вещественные неотрицательные числа. Если все элементы положительны, то матрица называется положительной. Неотрицательные матрицы имеют многочисленные приложения в теории случайных процессов и экономической теории. О них написано значительное количество книг ([3], [4], [5]). На русском языке с теорией неотрицательных матриц можно познакомиться по книгам Гантмахера [2], Хорна и Джонсона [1], Сачкова и Тараканова [5]. Важным классом неотрицательных матриц являются примитивные матрицы. Неотрицательная матрица A называется примитивной, если некоторая её степень A^k является положительной матрицей. Наименьший показатель k, для которого это случится, называется экспонентом примитивной матрицы. Существенная роль примитивных матриц в теории и приложениях объясняется тем, что, будучи намного более широким классом, чем класс положительных матриц, они сохраняют спектральные свойства последних. А именно, как доказано Г.Фробениусом в 1912 г., всякая примитивная матрица A имеет простое положительное число ρ, которое строго больше, чем модуль любого другого собственного значения A. Отсюда следует важная для приложений характеристика примитивных матриц $([1], .607 - 608)$: последовательность степеней $(\rho^{-1}A)^k$ сходится при $k \to \infty$ к положительной матрице ранга 1 тогда и только тогда, когда A примитивна.

Эффективным средством изучения неотрицательных матриц и, в частности, примитивных матриц, являются ориентированные графы. Общая идея применения графов заключается в том, что всякой неотрицательной матрице сопоставляется орграф. Матрица примитивна в том и только том случае, если любая вершина её графа достижима из любой другой вершины путём некоторой фиксированной длины k. В этом случае граф называется примитивным, причём наименьшая длина k, для которой имеет место указанная достижимость, называется экспонентом матрицы. Эта величина в точности равна экспоненту матрицы. В частности, представляют интерес примитивные матрицы и графы с максимально большими экспонентами.

Совместному изучению примитивных графов и примитивных матриц и посвящена выпускная работа. В ней доказываются точная оценка для экспонента примитивной матрицы, принадлежащая Г.Виландту и равная $n^2 - 2n + 2$. В отличие от доказательств этого результата, имеющихся в книгах [2], [1] и статье [7], в данной работе существенно используется наглядный и выразительный язык графов. Как и в [7], результат Виландта получается как следствие теоремы о скорости появления положительного столбца. Однако эта теорема доказана в нашей работе в более общей форме, использующей в качестве параметра длину кратчайшего контура в примитивной подграфе регулярного графа.

§1. Графы и портреты матриц

Ориентированным графом в данной работе называется пара $(V,\ N\ )$, где $N = \{1, ..., n\}$ множество вершин, $E \subseteq V \times\ V$ множество *дуг.* Таким образом, дуга – это упорядоченная пара вершин. Вершина i называется *началом*, а вершина j – *концом* дуги ij. Говорят, что дуга ij *выходит* из i и *входит* в j (или – *ведет* из вершины i в вершину j). Дуга ii называется *петлёй.* Запись $i \to j$ иногда заменяет выражение "существует дуга, ведущая из i в j".

Путём длины k в орграфе называется любая последовательность вершин

$$i_1 i_2 ... i_{k+1} \tag{1}$$

такая, что $i_m i_{m+1}$ – дуга, $m = 1, ..., k$. Здесь i_1 – *начало*, i_{k+1} – *конец* пути. Путь, у которого конец совпадает с началом, называется *замкнутым* путём или *контуром. Длина* пути равна количеству его дуг. Длина незамкнутого пути равна числу вершин минус единица, длина контура равна числу вершин.

Введём операцию произведения путей. Произведение путей $p = i_1 ... i_k$ и $p = j_1 ... j_k$ определено, если последняя буква p совпадает с первой буквой q. В этом случае

$$pq = x_1 ... x_k y_2 ... y_m = x_1 ... x_{k-1} y_1 ... y_m$$

Произведение путей ассоциативно в том смысле, что если произведение $(pq)r$ определено, то произведение $p(qr)$ тоже определено и $(pq)r = p(qr)$. Из ассоциативности следует, что скобки в произведении любого числа путей можно опустить. Заметим, что *для пути pqr путь pr существует в точности тогда, когда q – контур.*

Путь называется *простым*, если все его вершины различны, кроме, может быть, первой и последней.

Лемма 1. *В графе с n вершинами*

1) *длина простого (i, j)-пути при $i \neq j$ не больше, чем n – 1;*

2) *длина простого контура не больше, чем n;*

3) *если существует (i, j)-путь, то существует и простой (i, j)- путь.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Длина (i,j)-пути при $i \neq j$ равна числу вершин пути минус единица, а длина контура равна числу вершин в контуре. Отсюда и из определения простого пути следуют пункты 1) и 2). Чтобы доказать 3), рассмотрим произвольно взятый (i, j)-путь. Если он не простой, то его можно разложить в произведение вида $r_1 q r_2$, где q контур (множитель r_1 или r_2 могут и отсутствовать). Удалив контур q, получим более короткий (i,j)-путь $r_1 r_2$. Если и он не простой, то продолжим удаление контуров. Ясно, что на некотором шаге получится простой (i,j)-путь. □

Говорят, что из вершины i достижима вершина j, если существует (i, j)-путь. Граф называется *сильно связным* или *неразложимым*, если из любой вершины достижимы все вершины, то есть любые две вершины взаимодостижимы.

Матрица A называется *неотрицательной* (пишется $A \geq 0$), если её элементы - вещественные неотрицательные числа. Матрица с положительными элементами называется *положительной* (пишется $A > 0$). Сумма и произведение неотрицательных (положительных) матриц являются, очевидно, неотрицательными (положительными) матрицами.

Пусть дана неотрицательная квадратная матрица $A = (a_{ij})$ порядка n. Графом матрицы A называется ориентированный граф с множеством вершин $N = \{1, ..., n\}$, в котором

$$i \to j \Leftrightarrow a_{ij} \neq 0.$$

Таким образом, граф отображает комбинаторную структуру матрицы, то есть расположение в ней положительных и нулевых элементов.

Матрица A называется *неразложимой*, если её граф неразложим (сильно связен).

Множество S вершин называется *замкнутым*, если не существует дуг, ведущих из вершин множества S в вершины, не лежащие в S. Любое множество S вершин графа порождает *подграф*, дугами которого являются все дуги графа, соединяющие вершины из S. Подграф, порождаемый замкнутым множеством вершин, называется *замкнутым*.

Из определения графа матрицы следует, что

$$a_{il_1} a_{l_1 l_2} ... a_{l_{k-1} j} > 0 \Longleftrightarrow \text{в графе } A \text{ есть путь } i l_1 l_2 ... l_{k-1} j. \tag{2}$$

Согласно правилу умножения матриц (i, j)-элемент матрицы A^k определяется формулой

$$a_{ij}^{(k)} = \sum_{l_1, ..., l_{k-1}} a_{il_1} a_{l_1 l_2} ... a_{l_{k-1} j}, \tag{3}$$

где суммирование ведётся по всевозможным последовательностям индексов $l_1, ..., l_{k-1}$ Формула (3) доказывается методом математической индукции по параметру k.

Из формул (2) и (3) следует лемма

Лемма 2. *Пусть $A = (a_{ij})$ – неотрицательная матрица. Тогда*

$$(a_{ij})^k > 0 \Longleftrightarrow \textit{в графе } A \textit{ существует } (i, j)\textit{-путь длины } k.$$

Из леммы 2 при $i = j$ получаем следствие:

Следствие 1. *Пусть $A = (a_{ij})$ – неотрицательная матрица. Неравенство*

$$a_{jj}^{(k)} > 0$$

имеет место тогда и только тогда, когда в графе A есть контур длины k, проходящий через вершину j.

Проверить неразложимость неотрицательной матрицы можно с помощью следующей теоремы:

Теорема 1. *Матрица $A \geq 0$ неразложима тогда и только тогда, когда*

$$A + A^2 + ... + A^n > 0 \tag{4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из лемм 1 и 2 следует, что вершина j достижима из вершины i тогда и только тогда, когда $a_{ij}^{(k)} > 0$ при некотором k, $1 \leq k \leq n$. То есть, тогда и только тогда, когда

$$a_{ij} + a_{ij}^2 + ... + a_{ij}^n > 0 \tag{5}$$

Для неразложимости A необходимо и достаточно, чтобы неравенство (5) выполнялось для любых i, j, что и выражается условием (4). $\square$

Портретом неотрицательной матрицы $A = (a_{ij})$ называется матрица $B = (b_{ij})$ с элементами

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если } a_{ij} > 0, \\ 0, \text{если } a_{ij} = 0 \end{cases}$$

Матрицей смежности графа с вершинами $1, 2, ..., n$ называется матрица $B = (b_{ij})$ порядка n, в которой

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если } i \to j, \\ 0, \text{в противном случае} \end{cases}$$

Таким образом, всякому графу сопоставлена $(0, 1)-$матрица. И наоборот, любая квадратная $(0, 1)-$матрица очевидным образом определяет граф.

Ясно, что портрет A есть матрица смежности графа матрицы A. Граф и портрет неотрицательной матрицы, будучи более простыми объектами, отражают её важные свойства и дают удобный язык и вычислительное средство для теории неотрицательных матриц.

Матрицу смежности графа и портрет неотрицательной матрицы в данной работе рассматриваются как *булевы* матрицы. Это значит, что, символы 0 и 1 являются элементами двухэлементной алгебраической системы *булевой алгебры*, в которой сложение и умножение задаются следующими таблицами:

$$\begin{array}{c|c|c} \oplus & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \end{array}, \quad \begin{array}{c|c|c} \odot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \end{array}.$$

Нетрудно проверить, что операции в этой алгебре обладают привычными свойствами ассоциативности, коммутативности, а так же дистрибутивности умножения относительно сложения.

Для упрощения записи вместо $a \oplus b$ и $a \odot b$ будем писать $a + b$ и ab, так как из контекста будет видно, когда действие происходит в булевой алгебре.

Матрицы над булевой алгеброй складывают и умножают по обычным правилам, при этом сохраняются известные свойства операций с матрицами (с теми же доказательствами).

Будем называть $(0,1)-$матрицу *булевой*, если с её элементами мы намерены обращаться по правилам булевой алгебры.

Обозначим портрет матрицы A символом $Sg(A)$. Следующее простое утверждение является основой применения булевых матриц в теории неотрицательных матриц.

Лемма 3. *Если P,Q-неотрицательные матрицы, то*

$$Sg(P+Q) = Sg(P) + Sg(Q),$$

$$Sg(PQ) = Sg(P)Sg(Q)$$

Таким образом, если мы желаем знать, как расположены ненулевые элементы в сумме (произведении) неотрицательных матриц, то для этого достаточно вычислить сумму (произведение) их портретов.

Пусть $A = a_{ij}$ – квадратная неотрицательная матрица и булева матрица $B = b_{ij}$ – её портрет. Из второго утверждения леммы 3 следует, что

$$Sg(A^k) = B^k,\ k = 1, 2, ...$$

Или, на языке элементов,

$$a_{ij}^{(k)} > 0 \Longleftrightarrow b_{ij}^{(k)} = 1. \tag{6}$$

В данной работе мы будем изучать графы с помощью их булевых матриц смежности. На элементах булевой алгебры введём отношение порядка: будем считать, что $a \leq b$ во всех случаях, кроме одного: когда $a = 1$, $b = 0$. Будем писать $a < b$, если $a = 0$, $b = 1$. То есть отношение порядка такое же, как если бы 0 и 1 были обычными числами. Для булевых матриц A, B одинаковых размеров запись $A \leq B$ нужно понимать поэлементарно.

При этом для удобства речи булеву матрицу A, в которой все элементы равны 1, будем называть положительной и записывать этот факт как $A > 0$. На булевы матрицы автоматически переносят понятия неразложимости и примитивности.

§2. Примитивные и регулярные матрицы

Напомним, что матрица $A \geq 0$ называется *примитивной*, если $A^k > 0$ при некотором показателе k. Граф называется *примитивным*, если существует такое число k, что из любой вершины в любую другую можно перейти путём длины k. Ясно, что матрица примитивна в точности тогда, когда примитивен её граф.

Назовём матрицу $A \geq 0$ *регулярной*, если при некотором показателе k матрица A^k содержит положительный столбец. Это значит, что в графе A есть вершина, достижимая из любой вершины за одно и то же число шагов. Назовём такую вершину *фокусом* , а граф, содержащий фокусы – *регулярным*. В регулярном графе нет висячих вершин. Следовательно, из каждой вершины выходит путь какой угодно длины. Это значит, что любая степень регулярной матрицы не содержит нулевых строк.

Лемма 4. *Если j-й столбец положителен в матрице A^k , то он положителен в A^l при всех $l > k$. Другими словами, если фокус j достижим из всех вершин путями длины k, то он достижим и путями длины $l > k$.*

Действительно, j-й столбец матрицы A^l равен произведению положительного j-ого столбца A^k на матрицу A^{l-k} без нулевых строк. Очевидно, что это произведение является положительным столбцом. □

Следствие 2. *Если $A^k > 0$, то $A^l > 0$ при всех $l > k$.*

Лемма 5. *Из фокуса достижимы лишь фокусы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть фокус i достижим из всех вершин за k шагов. Если $i \to j$, то вершина j достижима из всех вершин за $k+1$ шагов и тоже является фокусом. □

Из лемме 4 вытекает, что при любом достаточно большом показателе k столбцы матрицы A^k, отвечающие фокусам, положительны. В частности, *матрица A примитивна, если все вершины её графа – фокусы.* В общем случае согласно лемме 5 имеет место:

Предложение 1. *Фокусы регулярного графа порождают замкнутый примитивный подграф*

Теорема 2. *Если матрица A регулярна и неразложима, то она примитивна.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу регулярности A в графе A есть фокус. Поскольку граф неразложимой матрицы сильно связен, то из этого фокуса достижимы все вершины графа. Значит, по Лемме 5, все вершины — фокусы, то есть матрица A примитивна. □

§3. Экспонент регулярности и примитивности

Если матрица $A \geq 0$ примитивна, то наименьший показатель k, при котором матрица $A^k > 0$, называется *экспонентом примитивности* матрицы A (см.[3],стр. 225). Расширим применение термина "экспонент"на регулярные матрицы. пусть вершина j является фокусом графа регулярной матрицы A. следовательно, при некотором показателе t j-й столбец матрице A^t становится положительным. Наименьший из таких показателей назовём *экспонентом фокуса* j. Наименьший из экспонентов фокусов будет называется *экспонентом регулярности* матрицы A.

Вначале выведем оценку для экспонента регулярности. Обозначим j-й столбец матрицы M символом M_j.

Лемма 6. *Пусть* $B = (b_{ij})$*-булева матрица, такая, что* $b_{jj} = 1$. *Тогда для любого k=0,1,2,... имеет место неравенство*

$$B_j^k \leq B_j^{k+1}. \tag{7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть e_j–столбец, у которого $j-$й элемент равен 1, а остальные равны 0. Тогда справедливы равенства

$$B_j^{k+1} = B^k B_j = B^k(e_j + B_j) = B_j^k + B^k B_j = B_j^k + B_j^{k+1}.$$

Сравнивая первый и последний члены этой последовательности равенств, можно видеть неравенство (1). □

Следующая лемма говорит о том, что неравенство столбцов можно умножить на матрицу.

Лемма 7. *Пусть x и y – булевы столбцы высоты n, A-булева матрица порядка n. Тогда*

$$x \leq y \Rightarrow Ax \leq Ay. \tag{8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Неравенство $x \leq y$ означает, что вектор y можно представить в виде суммы двух булевых векторов: $y = x + z$. Тогда $Ay = A(x + z) = Ax + Az$. □

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть вершина j является фокусом графа регулярной матрицы A. Согласно предложению 1 вершина j принадлежит замкнутому примитивному подграфу, состоящему из фокусов. Отсюда следует, что

1)через фокус j проходят контуры (в том числе простые контуры),

2)любой контур, проходящий через j, состоит из фокусов.

Лемма 8. *Пусть вершина j является фокусом графа регулярной булевой матрицы A и принадлежит контуру длины s. Тогда для любого k=0,1,2,... имеет место неравенство*

$$A^{sk} A_j \leq A^{s(k+1)}. \tag{9}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из того, что вершина j в графе матрицы A принадлежит контуру длины s вытекает, что (j,j)-элемент матрицы A^s равен 1, т.е. $a_{jj}^{(s)} = 1$. Применяя к матрице A^s лемму 7 получим неравенство

$$A_j^{sk} \le A_j^{s(k+1)} \tag{10}$$

Применяя лемму 7, умножим это неравенство на матрицу A. Получим неравенство

$$A \cdot A_j^{sk} \le A \cdot A_j^{s(k+1)}.$$

Производя очевидные упрощения, получим неравенство (9). □

В силу (9) имеет место цепочка неравенств

$$A_j \le A^s A_j \le A^{2s} A_j \le A^{3s} A_j ... \tag{11}$$

В этой цепочке неравенств каждый столбец получается из предыдущего умножением на матрицу A^s. Если два соседних столбца не равны, то в одном из них больше единиц (хотя бы на одну единицу больше). Если однажды, при некотором k, случилось равенство, то и дальше в последовательности (11) будут только равенства. Спрашивается, сколько может быть в этой последовательности различных столбцов? Нетрудно подсчитать, что их не может быть больше, чем n-m, где m-число единиц в столбце A_j. Следовательно, j-й столбец матрицы $A^{(n-m)s+1}$ положителен.

Мы доказали, что экспонент фокуса j не больше, чем $(n-m)s+1$. Эта оценка зависит от двух параметров: m и s. На языке графов число m равно количеству дуг, входящих в вершину j. Оценка будет точнее, если в качестве s выбрать длину самого короткого контура, проходящего через вершину j. Сформулируем полученный результат.

Теорема 3._Пусть вершина j является фокусом регулярного графа с n вершинами. Экспонент вершины j не превышает числа_

$$(n-m)s+1,$$

где m равно количеству дуг, входящих в вершину j, s- длина кратчайшего контура, проходящего через вершину j.

Приведём матричную формулировку теоремы 3.

Теорема 4._Пусть A – регулярная матрица порядка n, s – длина самого короткого контура, проходящего через фокус j, m – число дуг, входящих в j. Тогда j-й столбец матрицы_ $A^{(n-m)s+1}$ _положителен._

Теперь мы получим оценку скорости появления положительного столбца, не связанную с выбором фокуса.

Теорема 5. _Пусть A – регулярная матрица порядка n, s-длина самого короткого контура, содержащего фокусы. Тогда матрица_

$$A^{s(n-2)+1}$$

содержит положительный столбец. Другими словами, в регулярном графе некоторый фокус достижим из любой вершины за s(n-2)+1 шагов.

Доказательство. Рассмотрим кратчайший контур фокусов θ и докажем, что для некоторой вершины j этого контура $m \geq 2$. Действительно, в противном случае, при $m = 1$, оказалось бы, что в каждую вершину контура θ можно войти лишь из предыдущей вершины θ. Это значит, что все фокусы регулярного графа лежат на простом контуре θ, что противоречит примитивности подграфа фокусов (см. предложение 1). Теперь мы можем в формулировке теоремы 4 заменить параметр m на двойку. □

При фиксированном n выражение $(n-2)s+1$ является возрастающей функцией от s. Значение параметра s для регулярной матрицы не больше $n-1$. Подставив это значение в $(n-2)s+1$, получаем оценку сверху для экспонента регулярности, зависящую только от порядка матрицы:

Теорема 6. *Если матрица A порядка n регулярна, то матрица*

$$A^{n^2-3n+3}$$

содержит положительный столбец.

Теперь пусть матрица $A \geq 0$ примитивна. Из теоремы 5 выводится следующая оценка для экспонента:

Теорема 7. *Если матрица $A \geq 0$ порядка n примитивна, то*

$$A^{s(n-2)+n} > 0, \tag{12}$$

где s– длина самого короткого контура в графе матрицы A.

Доказательство. По теорема 4 в графе A из любой вершины i есть путь длины $(n-2)s+1$ в некоторую вершину j. А поскольку граф сильно связен, то из j в любую вершину l можно перейти путём длины не больше $n-1$. В итоге получается, что из любой вершины i в любую вершину l можно перейти путём длины не больше, чем

$$(n-2)s+1+n-1 = (n-2)s+n.$$

То есть, для каждого номера l найдется показатель $k \leq (n-2)s+n$, такой, что в матрице A^k столбец с номером m положителен. В силу леммы 1 тогда $A^{s(n-2)+n} > 0$.□

Заменив параметр s его максимально возможным значением $s = n-1$, получим оценку сверху для экспонента импримитивности, зависящую только от порядка матрицы:

Следствие 3. *Для любой примитивной матрицы A порядка n*

$$A^{n^2-2n+2} > 0$$

§4. Точность оценок экспонента. Граф Виландта

В этом параграфе будет доказано, что оценки теоремы 6 и следствия 3-точные. Для следствия 3 это означает, что для всякого n существует регулярная матрица A, такая, что

$$k = n^2 - 3n + 3$$

есть наименьший показатель, при котором матрица A^k содержит положительный столбец. Для следствия 3 точность оценки означает, что для всякого n существует примитивная матрица A, такая, что $k = n^2 - 2n + 2$ есть наименьший показатель, при котором матрица A^k является положительной. В обоих случаях точность доказывается с помощью следующей матрицы, предложенной Виландтом. Рассмотрим матрицу W порядка n:

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Матрицу W будем называть матрицей Виландта, а её граф – графом Виландта.

С помощью матрицы Виландта мы докажем, что оценки теоремы 6 и следствия 3 –точные. А именно, мы докажем, что $k = n^2 - 3n + 3$ есть наименьший показатель, при котором матрица W^k содержит положительный столбец. Соответственно, докажем, что $k = n^2 - 2n + 2$ есть наименьший показатель, при котором матрица W^k положительна. Граф Виландта имеет вид.

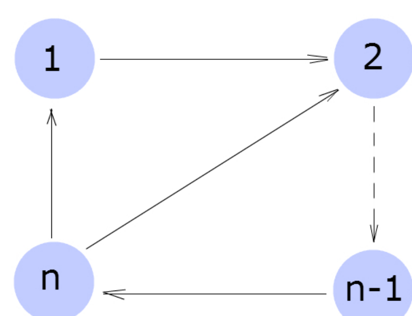

Рис. 1: Граф матрицы W порядка n

Предложение 2. *Матрица W примитивна. Соответственно, и граф Виландта примитивен.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Известно, что сильно связный граф примитивен тогда и только тогда, когда наибольший общий делитель длин всех простых контуров равен единице (см.[3], стр. 226). В графе Виландта всего два простых контура: длины n и длины $n-1$. Эти числа взаимно просты. Следовательно, граф Виландта примитивен.□

Предложение 3. *Матрица W^{n^2-3n+2} не содержит положительных столбцов, то есть она содержит нуль в каждом столбце.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что в графе матрицы W не существует путь длины $n^2-3n+2=(n-1)^2-(n-1)$

1) не существует $(i,i+1)-$пути длины n^2-3n+2 при $i=1,...,n-1$,

2)не существует $(n,1)-$пути и $(n,2)-$пути длины n^2-3n+2.

Действительно, всякий путь из i в следующую вершину содержит некоторое количество $x\geq 0$ обходов большого контура длины n, некоторое количество $y\geq 0$ обходов малого контура длины $n-1$ и ещё один шаг. Следовательно, длина такого пути равна $nx+(n-1)y+1$, где x,y-неотрицательные целые числа. Допустим, что

$$nx+(n-1)y+1=n^2-3n+2. \tag{13}$$

Так как $n^2-3n+2=(n-1)^2-n+1$, то (14) равносильно равенству

$$nx+(n-1)y+1=n^2-n+1. \tag{14}$$

а последнее-равенству

$$n(x+1+(n-1)y)=(n-1)^2. \tag{15}$$

Отсюда видно, что число $n(x+1)$ должно делиться на $n-1$, а так как n взаимно просто с $n-1$, то число $x+1$ должно делиться на $n-1$, значит, оно представимо в виде $x+1=(n-1)q$, где q-целое положительное число. Подставляя это выражение для $x+1$ в равенство (15) и сокращая на $n-1$, получим равенство

$$nq+y=n-1,$$

но это невозможно, поскольку при любых $q\geq 1$ и $y\geq 0$ выполняется неравенство $nq+y>n-1$.

На матричном языке доказанные свойства графа 1) и 2) означают, что из вершины i в следующую за ней вершину. Точнее говоря

$$w_{12}^{(n^2-3n+2)}=w_{23}^{(n^2-3n+2)}=...=w_{n-1,n}^{(n^2-3n+2)}=w_{n1}^{(n^2-3n+2)}=0. \tag{16}$$

Таким образом, каждый столбец матрицы W^{n^2-3n+2} содержит нуль.□

Предложение 4. *Матрица W^{n^2-2n+1} содержит нуль.*

Д о к а з а т е л ь с т в о.Докажем, что матрица W^{n^2-2n+1} содержит нуль в позиции $(1,1)$, то есть в графе W не существует пути длины n^2-2n+1 из

1 в 1. Всякий $(1,1)$-путь состоит из некоторого положительного числа обходов большого контура и некоторого числа обходов малого контура. Следовательно, любой $(1,1)-$ путь имеет длину $nx+(n-1)y$, где $x>0$, $y\geq 0$ – целые числа. Допустим, что

$$nx+(n-1)y=n^2-2n+1 \tag{17}$$

Тогда число nx должно делиться на $n-1$, а так как n взаимно просто с $n-1$, то x должно делится на $n-1$. Следовательно, x представимо в виде $x+1=(n-1)q$, где q-целое положительное число. Поставляя это выражение для x в равенство (7) и сокращая на $n-1$, получим $nq+y=n-1$, но это невозможно, поскольку при любых $q\geq 1$, $y\geq 0$ выполняется неравенство $nq+y>n-1$. □

Приведём новые доказательства предложений 3 и 4, основанные на двух леммах.

Лемма 9.

$$W^n=E+W \tag{18}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вычислим характеристический многочлен вещественной матрицы W, разлагая определитель матрицы

$$\lambda E-W=\begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & -1\\ -\alpha & \alpha-1 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \tag{19}$$

По последней строке. Тогда получим

$$|\lambda E-W|=\lambda^n-\lambda-1. \tag{20}$$

По теореме Гамильтона-Кэли всякая комплексная матрица удовлетворяет своему характеристическому уравнению. Следовательно, $W^n-W-E=0$, то есть $W^n=E+W$. Теперь заметим, что в силу леммы 6 равенство (18) верно и для булевой матрицы W. □

Лемма 10. *Для любого показателя k имеет место формула*

$$(E+W)^k=E+c_1W+c_2W^2+...+W^k. \tag{21}$$

Действительно, поскольку матрицы E и W коммутируют, то можно применить формулу бинома Ньютона, $c_0=1, c_1, c_2, ..., c_k=1$–биномиальные коэффициенты. □

Матричное доказательство предложения 3. Используем формулы (18) и (21) для вычисления матрицы W^{n^2-3n+2}

$$W^{n^2-3n+2} = W^{n(n-3)+2} = W^{n(n-3)}W^2 =$$

$$= (E+W)^{(n-3)}W^2 = (E+c_1W+c_2W^2+...+W^{n-3})W^2 = W^2+c_1W^3+c_2W^4+...+W^{n-1}.$$

Получили равенство

$$W^{n^2-3n+2} = W^2 + c_1W^3 + c_2W^4 + ... + W^{n-1}. \tag{22}$$

Применяя графовую интерпретацию степеней неотрицательной матрицы (лемма 5) заключаем из неравенства (22), что путь длины $n^2 - 3n + 2$ из любой вершины i в следующую за ней вершину существует ровно тогда, когда есть такой путь длины не меньше, чем 2, и не больше, чем $n-1$. Но в графе W из вершины в следующую вершину можно, очевидно, перейти либо за один шаг, либо не меньше, чем за n шагов.□

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из матричного доказательства предложения 3 можно получить новые сведения о матрице W^{n^2-3n+2}. Действительно, в какие вершины в графе матрицы W можно перейти из вершины i за l шагов, если $2 \leq l \leq n-1$. Из леммы 1 следует, что попасть можно в любую вершину j, $j \neq i$, кроме следующей за i вершины (то есть кроме тех, в которые можно попасть за один шаг). Кроме того, для любой вершины i, кроме первой, существует (i,i)-путь длины $n-1$, но самый короткий $(1,1)$-путь имеет длину n. Следовательно, в матрице W^{n^2-3n+2} нули стоят в точности на тех местах, на которых в матрице W стоят единицы.

Матричное доказательство предложения 4. Используем формулы (18) и (21) для вычисления булевой матрицы W^{n^2-2n+1}.

$$W^{n^2-2n+1} = W^{n(n-2)+1} = W^{n(n-2)}W = (E+W)^{(n-2)}W =$$

$$= (E + c_1W + c_2W^2 + ... + W^{n-2})W = W + c_1W^2 + c_2W^3 + ... + W^{n-1}. \tag{23}$$

Снова применяя графовую интерпретацию степеней неотрицательной матрицы (2 §1), заключаем из равенства (11), (i,j)- путь длины n^2-2n+1 существует ровно тогда, когда есть такой путь длины не больше, чем $n-1$, Но в графе матрицы W самый короткий $(1,1)$- путь имеет длину n. Следовательно, матрица W^{n^2-2n+1} содержит нуль в позиции $(1,1)$. □

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Второе доказательство предложении 4 даёт больше информации о матрице W^{n^2-2n+1}, чем первое. В графе матрицы W для любых $i \neq j$

существует (i, j)-путь длины не больше, чем $n-1$. Это следует из леммы 1 §1, а для нашего графа это очевидно. Также очевидно, что для любой вершины, кроме первой, существует (i, j)-путь длины $n-1$. Следовательно, за исключением (1,1)-элемента все элементы матрицы W^{n^2-2n+1} положительны.

ПРИМЕР 1. Приведем иллюстрацию доказательств предложений 3 и 4 для матрицы Виландта порядка 4. По формулам у нас должны получиться:

$$n^2 - 3n + 3 = 16 - 12 + 3 = 7 \text{ – экспонент регулярности,} \tag{24}$$

$$n^2 - 2n + 2 = 16 - 8 + 2 = 10 \text{ – экспонент примитивности.} \tag{25}$$

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

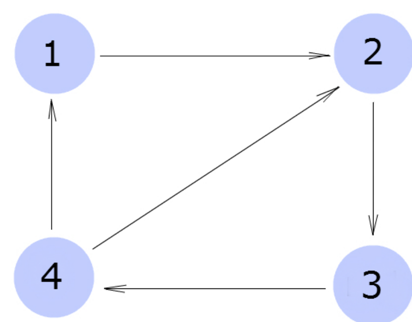

Рис. 2: Граф матрицы Виландта порядка n=4

Начнем возводить матрицу в степень полученную в (24), пока не получим первый положительный столбец.

$$W^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, W^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, W^4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$W^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, W^6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, W^7 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В степени 7 второй столбец становится положительным. На графе видно, что вторая вершина отличается от всех остальных тем, что в нее входит две дуги.

Данный факт иллюстрирует теорему 4, для которой в нашем случае параметр m равен 2.

Продолжим возводить матрицу в степень 10, чтобы получить экспонент примитивности.

$$W^8 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, W^9 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, W^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

В десятой степени в матрице полностью исчезают нули, как и было получено в формуле (25).

Из полученных результатов делаем вывод, что в матрице Виландта положительный столбец появляется не раньше, чем по достижении её степени максимального экспонента регулярности. Полностью положительной же матрица становится не раньше, чем степень станет равной максимальному экспоненту примитивности.

Приведём примеры регулярных, но не примитивных графов, у которых появление положительного столбца происходит раньше, чем степень станет равна экспоненту регулярности.

ПРИМЕР 2. Дан граф вида:

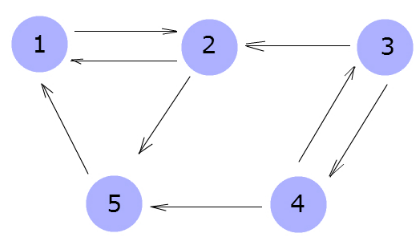

Рис. 3: Регулярный граф

Докажем, что этот граф не является примитивным. По теореме 2 мы знаем, что регулярная матрица примитивна тогда, когда она неразложима. Значит, что примитивный граф должен быть сильно связным. В нашем случае существует такая вершина, из которой не достижимы некоторые вершины. Например, это вершина 2. Легко видеть, что какой бы путь из 2 мы ни выбрали, нам не удастся попасть в вершины 3 и 4.

Теперь запишем матрицу смежности нашего графа:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Будем считать матрицу булевой. Начнём возводить её в степень, пока не получим положительный столбец.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

.

Экспонент регулярности матрицы A равен 3. Если мы посчитаем по формуле, то получим максимальный экспонент регулярности при $n = 5$:

$$n^2 - 3n + 3 = 5^2 - 3 \cdot 5 + 3 = 13. \tag{26}$$

Значит, в данной матрице экспонент регулярности не достигает максимума.

ПРИМЕР 3. Рассмотрим граф вида:

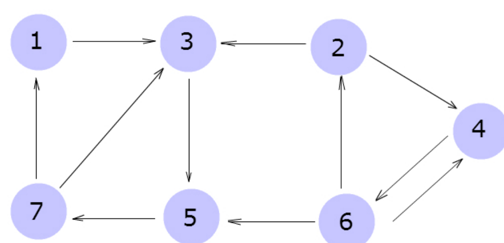

Рис. 4: Регулярный граф

Покажем, что он не является примитивным. По графу видим, что он не сильно связен, так как из множества вершин $\{1, 3, 5, 4\}$ не достижима ни одна из вершин множества $\{2, 4, 6\}$, значит, граф не примитивен.

Построим его матрицу смежности

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Найдём степень, в которой матрица будет иметь положительный столбец.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&1&1&0\\ 0&0&0&0&0&1&0\\ 0&1&0&1&1&0&1\\ 0&1&0&1&1&0&0\\ 1&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&1&1\\ 0&0&1&0&1&1&0 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 0&1&0&1&1&0&1\\ 0&1&0&1&1&0&0\\ 1&0&1&1&0&1&1\\ 0&0&0&1&0&1&1\\ 0&0&1&0&1&1&0\\ 1&1&1&1&1&1&0\\ 0&1&0&1&1&1&1 \end{pmatrix},$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 1&0&1&1&0&1&1\\ 0&0&0&1&0&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&0\\ 1&1&1&1&1&1&0\\ 0&1&0&1&1&1&1\\ 0&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1 \end{pmatrix}$$

Положительный столбец появляется в степени 4. Если мы посчитаем по формуле, то получим

$$n^2 - 3n + 3 = 7^2 - 3 \cdot 7 + 3 = 31 \text{ – экспонент регулярности при n=7.} \qquad (27)$$

Значит, в этой матрице экспонент регулярности не достигает максимально возможного значения.

Рассмотрим пример графа, который является примитивным.

ПРИМЕР 4.

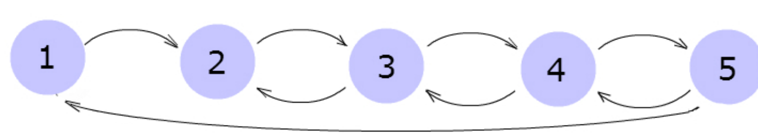

Рис. 5: Примитивный граф

Докажем, что граф примитивен. Мы знаем, что граф примитивен тогда и только тогда, когда он сильно связен и наибольший общий делитель всех его контуров равен 1. В нашем графе видно, что из любой вершины достижима любая другая вершина. Мы имеем только контуры длины 2 и 5. Очевидно, что НОД всех контуров равен 1. Отсюда следует, что граф примитивен.

Построим матрицу смежности.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Найдем экспоненты регулярности и примитивности.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

В степени 5 появляется первый положительный столбец. Если использовать формулу максимального экспонента регулярности, то получим $n^2 - 3n + 3 = 25 - 5 \cdot 3 + 3 = 13$. Значит, максимальный экспонент регулярности не достигается.

Продолжим возводить матрицу, чтобы найти степень, в которой исчезнут все нули.

$$A^6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} A^7 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^8 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} A^9 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

В итоге, получили степень 9. Тоже проверим, максимальный ли это экспонент примитивности, $n^2 - 2n + 2 = 25 - 2 \cdot 5 + 2 = 17$. Значит, в этом графе не достигаются ни максимальный экспонент примитивности, ни максимальный экспонент регулярности.

Литература

1. Хорн Р., Джонсон Ч., *Матричный анализ.* М.: Мир, 1989.
2. Гантмахер Ф. Р., *Теория матриц.* М. Наука, 1967.
3. Minc H., *Nonnegative Matrices.* New York etc.: Wiley, 1988.
4. Seneta E., *Non-negative Matrices and Markov Chaines.* Springer, New York (2006).
5. Сачков В.Н., Тараканов В.Е., *Комбинаторика неотрицательных матриц.* М: ТВП, 2000.