ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2007 МАТЕМАТИКА № 5 (540)

УДК 571.988:532.5-1/-9

М.Ю. КУЗЬМИН

О МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ НЕЛИНЕЙНО-ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ С УСЛОВИЕМ ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЯ НА ГРАНИЦЕ

Введение

Известно много математических работ, связанных с различными вопросами разрешимости уравнений Навье–Стокса. Математическим моделям неньютоновских жидкостей, реологические соотношения которых подчиняются принципу объективности поведения материалов (см. [1]), посвящено гораздо меньшее количество работ. Кроме того, различными авторами (см., напр., [2]) отмечается важность исследования задач с граничными условиями, отличными от классических условий прилипания. Данная работа посвящена доказательству теоремы существования слабых решений краевой задачи, описывающей стационарное движение нелинейно-вязкой жидкости с условием проскальзывания на границе. Необходимо отметить, что различные модели нелинейно-вязких жидкостей ранее изучались В.Г. Литвиновым, в данной работе содержатся результаты, существенно улучшающие некоторые результаты монографии [3].

Пусть изучаемая жидкость целиком заполняет сосуд с твердыми стенками, представляемый ограниченной областью $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \{2,3\}$, с липшицевой границей S. Как хорошо известно, стационарное движение любой жидкости описывается уравнением движения в форме Коши

$$\sum_{j=1}^{n} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = F_i, \tag{0.1}$$

где $x \in \Omega$; $u = (u_1, \dots, u_n)$ — поле скоростей жидкости; $\{\sigma_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ — тензор напряжений; $F = (F_1, \dots, F_n)$ — плотность объемных сил. Предполагается условие несжимаемости жидкости

$$\operatorname{div} u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0. \tag{0.2}$$

Основным объектом исследования являются нелинейно-вязкие жидкости, подчиняющиеся следующему определяющему соотношению (см. [3], [4]):

$$\sigma_{ij}(p,u) = -p\delta_{ij} + \varphi(I(u))\varepsilon_{ij}(u), \tag{0.3}$$

где δ_{ij}, ε_{ij} — компоненты единичного тензора и тензора скоростей деформации; $\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}\big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\big)$; φ — вещественная функция, определенная на множестве $[0,+\infty)(=\mathbb{R}_+)$; $I(u) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} (\varepsilon_{ij}(u))^2$; p — сферическая часть тензора напряжений.

Далее на границе S вводятся условия проскальзывания жидкости (см. [2], [3]). Пусть $f = (f_1, \dots, f_n)$ — сила взаимодействия жидкости и стенки сосуда, т.е.

$$f_i = \sum_{j=1}^{n} [-p\delta_{ij} + \varphi(I(u))\varepsilon_{ij}(u)]\eta_j|_S,$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 04-01-00081, и Министерством образования и науки Российской Федерации.

$\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$ — единичная внешняя нормаль к S, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — некоторый фиксированный базис в $\mathbb{R}^n$. Поверхностную силу f можно разложить на нормальную и касательную составляющие

$$f(s) = f^\eta(s) + f^\tau(s) \quad \forall s \in S,$$

где

$$f^\eta(s) = f_\eta(s)\eta(s), \quad f_\eta(s) = \sum_{i=1}^n f_i(s)\eta_i(s),$$

$$f^\tau(s) = f(s) - f^\eta(s) = \sum_{i=1}^n f_{\tau i}(s) e_i, \quad f_{\tau i}(s) = f_i(s) - f_\eta(s)\eta_i(s).$$

Очевидно, что для поля скоростей жидкости u имеет место аналогичное разложение.

Скольжение частиц жидкости описывается следующими двумя условиями:

$$u_\eta(s) = 0 \quad \forall s \in S, \tag{0.4}$$

$$f^\tau(s) = -\chi(f_\eta(s), |u^\tau(s)|^2) u^\tau(s) \quad \forall s \in S \tag{0.5}$$

(через $|\cdot|$ обозначается норма в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$). Вместо (0.5) будет рассматриваться регуляризованное условие

$$f^\tau(s) = -\chi(f_{r\eta}(s), |u^\tau(s)|^2) u^\tau(s) \quad \forall s \in S, \tag{0.6}$$

где χ — вещественная непрерывная функция, определенная на множестве $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$,

$$f_{r\eta}(p, u) = \Big[-Rp + \sum_{i,j=1}^n \varphi(I(Ru))\varepsilon_{ij}(Ru)\eta_i\eta_j \Big]\Big|_S.$$

Здесь

$$Rv(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \omega(|x-y|) v(y)\, dy, \quad x \in \overline{\Omega},$$

при $\omega \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$, $\operatorname{supp}\omega \in [0, a]$, $a \in \mathbb{R}_+$, $\omega(z) \geqslant 0$ при $z \in \mathbb{R}_+$, $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \omega(|x|)\, dx = 1$.

Как отмечено в ([5], с. 9), наличие в соотношении (0.5) оператора регуляризации R естественно с физической точки зрения и означает "нелокальность" рассматриваемой модели скольжения (см. [6], с. 15).

Кроме того, на давление необходимо нормировочное условие

$$\int_\Omega p(x)\, dx = 0. \tag{0.7}$$

Итак, краевая задача (0.1)–(0.3), (0.4), (0.6), (0.7) описывает стационарные течения нелинейно-вязких жидкостей с проскальзыванием на границе.

1. Основные определения и формулировка результата работы

Введем пространства

$$Z = \{v : v \in H^1(\Omega)^n, \ \ v_\eta|_S = 0\},$$
$$W = \{v : v \in H^1(\Omega)^n, \ \ v_\eta|_S = 0, \ \ \operatorname{div} v|_\Omega = 0\}.$$

Пространство Z является гильбертовым со скалярным произведением, определяемым для любых $u, v \in Z$ равенством

$$(u, v)_Z = \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \varepsilon_{ij}[u](x)\varepsilon_{ij}[v](x)\, dx + \sum_{i=1}^n \int_S u_{\tau i}(s) v_{\tau i}(s)\, ds.$$

Заметим, что если умножить обе части равенства (0.1) скалярно в $L_2(\Omega)^n$ на произвольную функцию $h \in Z$, то с учетом условий (0.3), (0.4), (0.6) получим

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} \varphi(I(u)(x))\varepsilon_{ij}[u](x)\varepsilon_{ij}[h](x)\,dx + \sum_{i=1}^{n} \int_{S} \chi[f_{rn}(p(s),u(s)), |u_{\tau}(s)|^2]u_{\tau i}(s)h_{\tau i}(s)\,ds + \\ + \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} u_j(x)\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x)h_i(x)\,dx + \int_{\Omega} p(x)\,[\operatorname{div} h](x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} F_i(x)h_i(x)\,dx \quad (1.1)$$

(здесь предполагается $F \in L_2(\Omega)^n$).

Определение. Слабым решением задачи (0.1)–(0.3), (0.4), (0.6), (0.7) назовем пару функций $(u,p) \in W \times L_2(\Omega)$, удовлетворяющую при произвольной функции $h \in Z$ соотношению (1.1).

На функции φ и χ налагаются следующие *условия*:

C1) функция $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ является непрерывной;
C2) существуют положительные константы a_1 и a_2 такие, что $a_1 \leqslant \varphi(y) \leqslant a_2$ для любых $y \in \mathbb{R}_+$;
C3) функция $y \mapsto \varphi(y^2)y$ при неотрицательных y является неубывающей;
C4) функция $\chi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ является непрерывной;
C5) существуют положительные константы b_1 и b_2 такие, что $b_1 \leqslant \chi(z_1,z_2) \leqslant b_2$ для любых $(z_1,z_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.

Условия C1)–C5) имеют физический смысл (см. [3]).

Основной результат работы представляет

Теорема. *Пусть* $F \in L_2(\Omega)^n$, *функции* φ *и* χ *удовлетворяют условиям* C1)–C5). *Тогда существует по крайней мере одно слабое решение задачи* (0.1)–(0.3), (0.4), (0.6), (0.7).

Отметим, что задача (0.1)–(0.3), (0.4), (0.6), (0.7) исследовалась в [3] без учета конвективных членов $\sum_{i,j=1}^{n} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ и при существенно более ограничительных условиях на функции φ и χ.

Для доказательства вышеприведенной теоремы применяется аппроксимационно-топологический метод [7], для чего вначале определяется эквивалентная операторная трактовка рассматриваемой задачи, затем для полученного операторного уравнения вводится аппроксимирующее семейство уравнений, зависящее от параметра δ, далее с помощью теории И.В. Скрыпника топологической степени обобщенных монотонных отображений, на основании априорных оценок доказывается существование решений аппроксимационных уравнений, в итоге совершается предельный переход при $\delta \to 0$, посредством которого и показывается разрешимость исходного операторного уравнения, а значит, и задачи (0.1)–(0.3), (0.4), (0.6), (0.7).

2. Операторная трактовка задачи

Условимся о некоторых обозначениях. Через X^* обозначается пространство, сопряженное некоторому банахову пространству X, а через $\langle g, y\rangle$ — действие функционала $g \in X^*$ на элемент $y \in X$, запись X^m обозначает топологическое произведение m экземпляров пространства X.

Введем операторы

$$\begin{aligned} &A : Z \to Z^*, && \langle A(u), h\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} \varphi(I(u))\varepsilon_{ij}(u)\varepsilon_{ij}(h)\,dx, \\ &K : Z \times L_2(\Omega) \to Z^*, && \langle K(u,p),\, h\rangle = \sum_{i=1}^{n} \int_{S} \chi[f_{rn}(p(s),u(s)), |u_{\tau}(s)|^2]u_{\tau i}(s)h_{\tau i}(s)\,ds, \qquad (2.1) \\ &M : Z \to Z^*, && \langle M(u),\, h\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} u_j(x)\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x)h_i(x)\,dx. \end{aligned}$$

Положим
$$D : Z \to L_2(\Omega), \quad D(u) = \operatorname{div} u.$$

Отождествляя $L_2(\Omega)^n$ и $(L_2(\Omega)^n)^*$, согласно теореме Рисса о представлении линейного функционала в гильбертовом пространстве можно определить оператор
$$D^* : L_2(\Omega)^n \equiv (L_2(\Omega)^n)^* \to Z^*, \quad \langle D^*(p), h\rangle = \int_\Omega p(x)[\operatorname{div} h](x)\, dx.$$

Очевидно, множество слабых решений задачи (0.1)–(0.3), (0.4), (0.6), (0.7) совпадает с множеством пар $(u,p) \in W \times L_2(\Omega)$, удовлетворяющих операторному уравнению вида
$$A(u) + K(u,p) + M(u) - D^*(p) = F. \tag{2.2}$$

3. Свойства операторов

Всюду далее записи $v_k \underset{k\to\infty}{\to} v_0$ и $v_k \underset{k\to\infty}{\rightharpoonup} v_0$ означают соответственно сильную и слабую сходимости последовательности $\{v_k\}_{k=1}^\infty$ к элементу v_0; если же члены последовательности $\{v_k\}_{k=1}^\infty$ не стремятся к элементу v_0 в сильном смысле, то будем обозначать это как $v_k \underset{k\to\infty}{\not\to} v_0$.

Лемма 3.1. *Для оператора A имеют место свойства*

a) *оператор A ограничен и непрерывен,*

b) *для любых $u_1, u_2 \in Z$ имеет место неравенство*
$$\langle A(u_1) - A(u_2), u_1 - u_2\rangle \geqslant 0. \tag{3.1}$$

Доказательство. a) Ограниченность оператора A достаточно очевидна. Докажем его непрерывность. Итак, пусть $u_k \underset{k\to\infty}{\to} u_0$ в Z. Не ограничивая общности, можно полагать, что для некоторой подпоследовательности $\{u_{k_l}\}_{l=1}^\infty$ имеют место сходимости
$$I(u_{k_l})[x] \underset{l\to\infty}{\to} I(u_0)[x] \ \text{ и } \ u_{k_l}[x] \underset{l\to\infty}{\to} u_0[x] \ \text{ для почти всех } \ x \in \Omega. \tag{3.2}$$

Предположим $A(u_k) \underset{k\to\infty}{\not\to} A(u_0)$ при некотором u в Z^*. Не ограничивая общности, можно считать, что для некоторой подпоследовательности $\{u_{k_l}\}_{l=1}^\infty$ имеет место неравенство
$$\|A(u_{k_l}) - A(u_0)\|_{Z^*} > \zeta \tag{3.3}$$

с некоторым фиксированным $\zeta > 0$. Оцениваем
$$\begin{aligned}
\|A(u_{k_l}) - A(u_0)\|_{Z^*} &\overset{\text{def}}{=} \sup_{\breve h \in Z,\ \|\breve h\|_Z = 1} |\langle A(u_{k_l}) - A(u_0), \breve h\rangle| \leqslant \\
&\leqslant \left| \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \varphi(I(u_{k_l}))\varepsilon_{ij}(u_{k_l} - u_0)\varepsilon_{ij}(\breve h)\, dx \right| + \\
&+ \left| \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega [\varphi(I(u_{k_l})) - \varphi(I(u_0))]\varepsilon_{ij}(u_0)\varepsilon_{ij}(\breve h)\, dx \right| \leqslant \\
&\leqslant a_2\|u_{k_l} - u_0\|_Z + \left\{ \int_\Omega [\varphi(I(u_{k_l})) - \varphi(I(u_0))]^2 I(u_0)\, dx \right\}^{1/2},
\end{aligned} \tag{3.4}$$

первое слагаемое в последней части неравенств (3.4) стремится к нулю в силу сходимости $u_k \underset{k\to\infty}{\to} u_0$ в Z, второе стремится к нулю в силу теоремы Лебега. Следовательно, $\langle A(u_{k_l}) - A(u_0), \breve h\rangle \underset{l\to\infty}{\to} 0$, что противоречит неравенству (3.3).

b) В силу неравенства Коши–Буняковского и условия C3)

$$\langle A(u_1) - A(u_2), u_1 - u_2\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega [\varphi(I(u_1))\varepsilon_{ij}(u_1) - \varphi(I(u_2))\varepsilon_{ij}(u_2)][\varepsilon_{ij}(u_1 - u_2)]\,dx =$$

$$= \int_\Omega [\varphi(I(u_1))I(u_1) + \varphi(I(u_2))I(u_2)]\,dx -$$

$$- \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega [\varphi(I(u_1))\varepsilon_{ij}(u_1)\varepsilon_{ij}(u_2) - \varphi(I(u_2))\varepsilon_{ij}(u_1)\varepsilon_{ij}(u_2)]\,dx \geqslant$$

$$\geqslant \int_\Omega [\varphi(I(u_1))I^{1/2}(u_1) - \varphi(I(u_2))I^{1/2}(u_2)](I^{1/2}(u_1) - I^{1/2}(u_2))\,dx \geqslant 0. \quad \square$$

Лемма 3.2. a) *Если K — оператор* (2.1), *то для любой последовательности $\{u^k, h^k, p^k\}_{k=1}^\infty$ из пространства $Z \times Z \times L_2(\Omega)^n$, для которой имеют место сходимость $(u^k, h^k, p^k) \underset{k\to\infty}{\rightharpoonup} (u^0, h^0, p^0)$ в $Z \times Z \times L_2(\Omega)^n$, существует подпоследовательность $\{u^{k_l}, h^{k_l}, p^{k_l}\}_{l=1}^\infty$ такая, что $\langle K(u^{k_l}, p^{k_l}), h^{k_l}\rangle \underset{l\to\infty}{\to} \langle K(u^0, p^0), h^0\rangle$.*

b) *Для произвольного оператора $T : Z \to L_2(\Omega)$, оператор $K(\cdot, T(\cdot))$ компактен.*

Доказательство. a) Пусть имеют место предельные соотношения из условия доказываемого пункта леммы. Так как вложение $Z \hookrightarrow L_2(S)^n$ компактно, выделим такую подпоследовательность $\{u^{k_l}, h^{k_l}\}_{l=1}^\infty$, что

$$(u^{k_l}, h^{k_l}) \underset{l\to\infty}{\to} (u^0, h^0) \quad \text{в} \quad L_2(S)^n \times L_2(S)^n, \tag{3.5}$$
$$(u^{k_l}[s], h^{k_l}[s]) \underset{l\to\infty}{\to} (u^0[s], h^0[s]) \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^{2n} \quad \text{для почти всех} \quad s \in S.$$

Продолжим функции последовательности $\{p^k\}_{k=1}^\infty$ (и функцию p^0) на все пространство $\mathbb{R}^n$, для этого положим $\widetilde{p}^k(x) = p^k(x)$, если $x \in \Omega$, в противном случае $\widetilde{p}^k(x) = 0$. Ясно, что $\widetilde{p}^{k_l} \underset{l\to\infty}{\rightharpoonup} \widetilde{p}^0$ в $L_2(\mathbb{R}^n)$. Имеем

$$\int_{\mathbb{R}^n} \omega(|\xi - y|)\widetilde{p}^{k_l}(y)\,dy = R(p^{k_l})[\xi] \underset{l\to\infty}{\to} R(p^0)[\xi] \quad \text{для всех} \quad s \in S. \tag{3.6}$$

Аналогично,

$$\Big[- Rp^{k_l} + \sum_{i,j=1}^{n} \varphi(I(Ru^{k_l}))\varepsilon_{ij}(Ru^{k_l})\eta_i\eta_j \Big](s) = f_{r\eta}(p^{k_l}, u^{k_l})[s] \underset{l\to\infty}{\to} f_{r\eta}(p^0, u^0)[s] \quad \text{для всех} \quad s \in S. \tag{3.7}$$

Оцениваем

$$|\langle K(u^{k_l}, p^{k_l}), h^{k_l}\rangle - \langle K(u^0, p^0), h^0\rangle| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \Big| \int_S \{\chi(f_{r\eta}(p^{k_l}, u^{k_l}), |u_\tau^{k_l}|^2) - \chi(f_{r\eta}(p^0, u^0), |u_\tau^0|^2)\} u_{\tau i}^0 h_{\tau i}^0\,ds \Big| +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \Big| \int_S \{\chi(f_{r\eta}(p^{k_l}, u^{k_l}), |u_\tau^{k_l}|^2)(u_{\tau i}^0 - u_{\tau i}^{k_l}) h_{\tau i}^0\,ds \Big| +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} \Big| \int_S \{\chi(f_{r\eta}(p^{k_l}, u^{k_l}), |u_\tau^{k_l}|^2) u_{\tau i}^{k_l}(h_{\tau i}^0 - h_{\tau i}^{k_l})\,ds \Big|. \tag{3.8}$$

В силу условий C5) и соотношения (3.6), (3.7) первое слагаемое в правой части неравенства (3.8) стремится к нулю по теореме Лебега, два других стремятся к нулю в силу (3.5).

b) Далее будет использоваться признак И.М. Гельфанда относительной компактности в банаховом пространстве, предварительно переформулированный в виде следующей леммы.

Лемма 3.3. *Для того чтобы подмножество $\mathfrak{M}$ банахова пространства $\mathcal{X}$ было относительно компактным, необходимо, а если $\mathcal{X}$ сепарабельно, то и достаточно, чтобы из любой последовательности функционалов $\{\mathbf{f}_k\}_{k=1}^{\infty}$ из $\mathcal{X}^*$ такой, что*

$$\mathbf{f}_k(y) \underset{k\to\infty}{\to} 0 \quad \forall y \in \mathcal{X}, \tag{3.9}$$

можно было выделить подпоследовательность $\{\mathbf{f}_{k_l}\}_{l=1}^{\infty}$, для которой предельное соотношение (3.9) *оказалось бы выполненным равномерно на $\mathfrak{M}$.*

Доказательство проводится так же, как доказательство теоремы 3(1.IX) из ([8], с. 274). Незначительные изменения связаны с переходом к подпоследовательности в формулировке леммы.

Пусть $T : Z \to L_2(\Omega)$ — произвольный оператор, $\mathfrak{M}$ — некоторое ограниченное множество в Z, $h_k \underset{k\to\infty}{\rightharpoonup} 0$ в пространстве $(Z^*)^* \equiv Z$. Имеем

$$\langle h_k, K(u, Tu)\rangle \leqslant b_2 \|u\|_{L_2(S)^n} \|h_k\|_{L_2(S)^n} \quad \forall u \in \mathfrak{M}.$$

При этом вложение $Z \hookrightarrow L_2(S)^n$ компактно, поэтому для некоторой подпоследовательности $\{h_{k_l}\}_{l=1}^{\infty}$ $\langle h_{k_l}, K(u, Tu)\rangle \underset{l\to\infty}{\to} 0$ равномерно по всем u из $\mathfrak{M}$. Следовательно, множество $K(\mathfrak{M}, T(\mathfrak{M}))$ относительно компактно. $\square$

Лемма 3.4. *Пусть*

$$M_\delta : Z \to Z^*, \quad \langle M_\delta(u), h\rangle = \frac{1}{1 + \delta^{1/4}\|u\|_{L_4(\Omega)^n}} \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} h_i \, dx \quad (\delta \in \mathbb{R},\ \delta > 0).$$

Справедливы следующие утверждения:

a) *оператор M_δ ограничен и вполне непрерывен*;

b) *если последовательности $\{u^k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{h^k\}_{k=1}^{\infty}$ из пространства Z таковы, что $u^k \underset{k\to\infty}{\rightharpoonup} u^0$ в Z, $h^k \underset{k\to\infty}{\rightharpoonup} h^0$ в Z, то существуют подпоследовательности $\{u^{k_l}\}_{l=1}^{\infty}$ и $\{h^{k_l}\}_{l=1}^{\infty}$, для которых имеет место сходимость $\langle M(u^{k_l}), h^{k_l}\rangle \underset{l\to\infty}{\to} \langle M_\delta(u^0), h^0\rangle$.*

Доказательство. a) Свойства ограниченности и непрерывности оператора M_δ доказываются стандартно. Компактность доказывается с помощью неравенства

$$\langle M_\delta(u), h\rangle \leqslant \frac{\|u\|_{L_4(\Omega)^n} \|u\|_{H^1(\Omega)^n}}{1 + \delta^{1/4}\|u\|_{L_4(\Omega)^n}} \|h\|_{L_4(\Omega)^n}$$

аналогично предыдущей лемме.

b) В силу компактности вложения $Z \hookrightarrow L_4(\Omega)^n$ существуют подпоследовательности $\{u^{k_l}\}_{l=1}^{\infty}$ и $\{h^{k_l}\}_{l=1}^{\infty}$ такие, что

$$(u^{k_l}, h^{k_l}) \underset{l\to\infty}{\to} (u^0, h^0) \quad \text{по норме пространства} \quad L_4(\Omega)^n \times L_4(\Omega)^n. \tag{3.10}$$

Имеем

$$\begin{aligned}
|\langle M_\delta(u^0), h^0\rangle - \langle M_\delta(u^{k_l}), h^{k_l}\rangle| \leqslant \left| \frac{1}{1 + \delta^{1/4}\|u^0\|_{L_4(\Omega)^n}} \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega u_j^0 \left(\frac{\partial u_i^0}{\partial x_j} - \frac{\partial u_i^{k_l}}{\partial x_j} \right) h_i^0 \, dx \right| + \\
+ \left| \frac{1}{1 + \delta^{1/4}\|u^0\|_{L_4(\Omega)^n}} \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega (u_j^0 - u_j^{k_l}) \frac{\partial u_i^{k_l}}{\partial x_j} h_i^0 \, dx \right| + \\
+ \left| \frac{1}{1 + \delta^{1/4}\|u^0\|_{L_4(\Omega)^n}} \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega u_j^{k_l} \frac{\partial u_i^{k_l}}{\partial x_j} (h_i^0 - h_i^{k_l}) \, dx \right| + \\
+ \left| \left(\frac{1}{1 + \delta^{1/4}\|u^0\|_{L_4(\Omega)^n}} - \frac{1}{1 + \delta^{1/4}\|u^{k_l}\|_{L_4(\Omega)^n}} \right) \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega u_j^{k_l} \frac{\partial u_i^{k_l}}{\partial x_j} h_i^{k_l} \, dx \right|.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Первое слагаемое в правой части неравенства (3.11) стремится к нулю в силу того, что $u^{k_l} \underset{l\to\infty}{\rightharpoonup} u^0$ в Z, остальные слагаемые стремятся к нулю в силу (3.10). $\square$

4. Аппроксимационное уравнение и априорная оценка

Для произвольного $\delta > 0$ введем вспомогательное уравнение относительно неизвестной функции u^δ

$$A^+(u_\delta) + A(u^\delta) + K_\delta(u^\delta) + M_\delta(u^\delta) + \delta^{-1}D^*D(u^\delta) = F,$$

где

$$\langle K_\delta(u),\, h\rangle = \sum_{i=1}^n \int_S \chi(f_{rn}(-\delta^{-1}Du, u), |u_\tau|^2)u_{\tau i}h_{\tau i}\,ds,$$

$$\langle M_\delta(u),\, h\rangle = \frac{1}{1+\delta^{1/4}\|u\|_{L_4(\Omega)^n}} \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} h_i\,dx,$$

$$\langle A^+(u), h\rangle = \delta \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \varepsilon_{ij}(u)\varepsilon_{ij}(h)\,dx.$$

Положим $\langle K^+(u), h\rangle = \frac{b_1}{2}\sum\limits_{i=1}^n \int\limits_S u_{\tau i}h_{\tau i}\,ds$.

Лемма 4.1. *Для семейства операторных уравнений*

$$\Lambda_t^\delta(u^\delta) = A^+(u^\delta) + K^+(u^\delta) + t\left(A(u^\delta) + K(u^\delta) - K^+u^\delta + M_\delta(u^\delta) + \delta^{-1}D^*D(u^\delta) - F\right) = 0, \quad (4.1)$$

зависящих от параметра $t \in [0,1]$, при достаточно малых δ имеет место априорная оценка решений, т. е. при всех δ таких, что

$$0 < \delta \leqslant c(a_1, b_1, n, \Omega),$$

выполняется неравенство

$$\|u^\delta\|_Z \leqslant C(\|F\|_{Z^*}, a_1, b_1, n, \Omega), \quad (4.2)$$

где c, C — величины, зависящие только от указанных аргументов.

Доказательство. При $t = 0$ имеет место только нулевое решение, в этом случае оценка (4.2) очевидна. Пусть u^δ — решение (4.1) при некотором $t \in (0,1]$. Подействуем левой и правой частями (4.1) на u^δ. Имеем

$$\langle A^+(u^\delta) + K^+(u^\delta), u^\delta\rangle \geqslant 0,$$

таким образом,

$$\langle A(u^\delta), u^\delta\rangle + \langle K_\delta(u^\delta), u^\delta\rangle - \langle K^+(u^\delta), u^\delta\rangle + \langle M_\delta(u^\delta), u^\delta\rangle + \delta^{-1}\langle D^*D(u^\delta), u^\delta\rangle \leqslant \langle \mathrm{F}, u^\delta\rangle.$$

Заметим, что

$$\langle A(u^\delta), u^\delta\rangle + \langle K_\delta(u^\delta), u^\delta\rangle - \langle K^+(u^\delta), u^\delta\rangle \geqslant \min(a_1, b_1/2)\,\|u^\delta\|_Z.$$

Вместе с тем

$$|\langle M_\delta(u^\delta),\, u^\delta\rangle| = \left|\frac{1}{1+\delta^{1/4}\|u^\delta\|_{L_4(\Omega)^n}} \sum_{i,j=1}^n \int\limits_\Omega u_j^\delta \frac{\partial u_i^\delta}{\partial x_j} u_i^\delta\,dx\right| =$$

$$= \frac{1}{1+\delta^{1/4}\|u^\delta\|_{L_4(\Omega)^n}}\left|\left(-\frac{1}{2}\int_\Omega D(u^\delta)|u^\delta|^2\,dx + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \int_S u_{\tau i}^\delta \eta_i |u^\delta|^2\,ds\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{n}{2}\|D(u^\delta)\|_{L_2(\Omega)}\,\frac{\|u^\delta\|^2_{L_4(\Omega)^n}}{1+\delta^{1/4}\|u^\delta\|_{L_4(\Omega)^n}} \leqslant \frac{n}{2}\|D(u^\delta)\|_{L_2(\Omega)}\,\frac{\|u^\delta\|^2_{L_4(\Omega)^n}}{\delta^{1/4}\|u^\delta\|_{L_4(\Omega)^n}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\|D(u^\delta)\|_{L_2(\Omega)}}{\delta^{1/2}}\,\delta^{1/4}\frac{n}{2}\,\vartheta\|u^\delta\|_Z \leqslant \frac{\|D(u^\delta)\|^2_{L_2(\Omega)}}{\delta} + \delta^{1/2}\frac{n^2}{4}\,\vartheta^2\|u^\delta\|^2_Z$$

(ϑ — норма оператора вложения пространства Z в пространство $L_4(\Omega)^n$).

Нетрудно заметить также, что

$$\delta^{-1}\langle D^*D(u^\delta), u^\delta\rangle = \delta^{-1}\langle D(u^\delta), D(u^\delta)\rangle = \delta^{-1}\|D(u^\delta)\|^2_{L_2(\Omega)},$$

$$\|F\|_{Z^*}\|u^\delta\|_Z \leqslant \frac{l^2}{4}\|F\|^2_{Z^*} + \frac{1}{l^2}\|u^\delta\|.$$

Положим l настолько большим по модулю, что

$$\frac{1}{l^2} < \min\left(a_1, \frac{b_1}{2}\right).$$

Тогда при достаточно малых δ получим

$$\|u^\delta\|^2_Z \leqslant \frac{l^2}{2}\left(\min\left(a_1, \frac{b_1}{2}\right) - \frac{1}{l^2}\right)^{-1}\|F\|^2_{Z^*}. \tag{4.3}$$

Неравенство (4.3) и является оценкой вида (4.2). $\square$

5. Существование решений аппроксимационного уравнения

Для доказательства существования решений аппроксимационного уравнения применим метод топологической степени обобщенных монотонных отображений (см. [9]). Покажем, что семейство Λ^δ_t осуществляет гомотопию отображений Λ^δ_0 и Λ^δ_1. Для этого вначале заметим, что в силу априорной оценки (4.2) в пространстве Z существует замкнутый шар Θ_R с центром в нуле радиуса $R > 0$, на границе $\partial\Theta_R$ которого нет решений уравнений $\Lambda^\delta_t(u^\delta) = 0$ (при $t \in [0,1]$). Далее необходимо показать

a) для любой последовательности $\{u_k\}_{k=1}^\infty$, взятой на границе $\partial\Theta_R$, и для любой последовательности точек $\{t_k\}_{k=1}^\infty$ на отрезке $[0,1]$, из того, что имеют место предельные соотношения $u_k \underset{k\to\infty}{\rightharpoonup} u_0$ в Z, $\Lambda^\delta_{t_k}(u_k) \underset{k\to\infty}{\rightharpoonup} 0$ в Z^*, и $\langle\Lambda^\delta_{t_k}(u_k), u_k - u_0\rangle \underset{k\to\infty}{\to} 0$, следует $u_k \underset{k\to\infty}{\to} u_0$ в Z,

b) для любой последовательности $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ из шара Θ_R такой, что $u_k \underset{k\to\infty}{\to} u_0$ в Z, и такой последовательности точек $\{t_k\}_{k=1}^\infty$ ($t_k \in [0,1]$), что $t_k \underset{k\to\infty}{\to} t_0$, имеет место сходимость $\Lambda^\delta_{t_k}(u_k) \underset{k\to\infty}{\rightharpoonup} \Lambda^\delta_{t_0}(u_0)$ в Z^*.

Доказательство. a) Предположим противное, т. е. пусть $u_k \underset{k\to\infty}{\not\to} u_0$ в Z. Тогда для некоторых подпоследовательностей $\{u_{k_l}\}_{l=1}^\infty$ и фиксированного числа $\varepsilon > 0$

$$\|u_{k_l} - u_0\|_Z > \varepsilon. \tag{5.1}$$

Из последовательности $\{u_{k_l}\}_{l=1}^\infty$ нельзя выделить подпоследовательность, сходящуюся к u_0. Однако будет доказано обратное утверждение.

Из условия предложения a) имеем

$$\lim_{l\to\infty}\langle\Lambda^\delta_{t_{k_l}}(u_{k_l}), u_{k_l} - u_0\rangle = \lim_{l\to\infty}\langle\Lambda^\delta_{t_{k_l}}(u_{k_l}) - \Lambda^\delta_{t_0}(u_{k_l}) + \Lambda^\delta_{t_0}(u_{k_l}) - \Lambda^\delta_{t_0}(u_0), u_{k_l} - u_0\rangle = 0.$$

Не ограничивая общности, можем считать, что последовательность $\{t_{k_l}\}_{l=1}^\infty$ такова, что $t_{k_l} \underset{l\to\infty}{\to} t_0 \in [0,1]$. Так как все определенные операторы ограничены, то

$$\lim_{l\to\infty}\langle\Lambda^\delta_{t_{k_l}}(u_{k_l}) - \Lambda^\delta_{t_0}(u_{k_l}), u_{k_l} - u_0\rangle =$$

$$= \lim_{l\to\infty}\langle(t_{k_l} - t_0)\left[A(u_{k_l}) + K_\delta(u_{k_l}) - K^+(u_{k_l}) + M_\delta(u_{k_l}) + \delta^{-1}D^*D(u_{k_l}) - F\right], u_{k_l} - u_0\rangle = 0. \tag{5.2}$$

Кроме того, в силу доказанных свойств операторов из последовательности $\{u_{k_l}\}_{l=1}^{\infty}$ можно выделить такую подпоследовательность $\{u_{k_{l_m}}\}_{m=1}^{\infty}$, что будут выполнены следующие предельные соотношения:

$$\lim_{m\to\infty}\langle A(u_{k_{l_m}}) - A(u_0), u_{k_{l_m}} - u_0\rangle \geqslant 0, \tag{5.3}$$

$$\lim_{m\to\infty}\langle K_\delta(u_{k_{l_m}}) - K_\delta(u_0) + K^+(u_{k_{l_m}}) - K^+(u_0) + M_\delta(u_{k_{l_m}}) - M_\delta(u_0), u_{k_{l_m}} - u_0\rangle = 0. \tag{5.4}$$

Имеет место неравенство

$$\lim_{m\to\infty}\langle \delta^{-1}D^*D(u_{k_{l_m}} - u_0), u_{k_{l_m}} - u_0\rangle \geqslant 0. \tag{5.5}$$

Из (5.2)–(5.5) вытекает

$$\lim_{m\to\infty}\langle \delta[A^+ + K^+](u_{k_{l_m}} - u_0), u_{k_{l_m}} - u_0\rangle \leqslant 0. \tag{5.6}$$

Предельное соотношение (5.6) противоречит (5.1), т. к. оператор $A^+ + K^+$ строго монотонен:

$$\langle [A^+ + K^+](u-w), u-w\rangle \geqslant \min(\delta, b_1/2)\|u-w\|_Z^2 \quad \forall u,w \in Z.$$

Доказательство предложения b). Очевидно, для произвольного $h \in Z$ справедливо равенство

$$\lim_{k\to\infty}\langle \Lambda_{t_k}^{\delta}(u_k), h\rangle = \lim_{k\to\infty}\langle \Lambda_{t_k}^{\delta}(u_k) - \Lambda_{t_0}^{\delta}(u_k), h\rangle + \lim_{k\to\infty}\langle \Lambda_{t_0}^{\delta}(u_k) - \Lambda_{t_0}^{\delta}(u_0), h\rangle. \tag{5.7}$$

Первое слагаемое в (5.7) стремится к нулю в силу сходимости $t_k \underset{k\to\infty}{\to} t_0$, второе — в силу деминепрерывности всех входящих в слагаемое операторов.

Таким образом, отображения Λ_0^{δ} и Λ_1^{δ} гомотопны, вместе с тем степень $\deg(\Lambda_0^{\delta}, \Theta_R, 0)$ нечетна, т. к. отображение Λ_0^{δ} нечетно. Поэтому решение уравнения $\Lambda_1^{\delta}(u^{\delta}) = 0$ существует при всех достаточно малых δ. □

6. Предельный переход

Возьмем последовательность $\delta_k \underset{k\to\infty}{\to} 0$ и поставим в соответствие каждому δ_k решение $u_k \in Z$ уравнения $\Lambda_1^{\delta_k}(u) = 0$. Имеем

$$\delta_k^{-1}D^*D(u_k) = F - A^+(u_k) - A(u_k) - K_{\delta_k}(u_k) - M_{\delta_k}(u_k). \tag{6.1}$$

Как следствие результатов [10], отметим, что оператор D^* осуществляет изоморфизм пространств

$$\mathcal{P}_0 = \left\{\rho \in L_2(\Omega) : \int_\Omega \rho(x)\,dx = 0\right\} \quad \text{и} \quad \mathrm{W}_0 = \{\mathbf{f} \in Z^* : \langle \mathbf{f}, u\rangle = 0 \ \forall u \in W\}.$$

Из априорной оценки и соотношения (6.1) следует существование элементов $u_0 \in Z, p_0 \in L_2(\Omega)$ таких, что

$$u_k \underset{k\to\infty}{\rightharpoonup} u_0 \quad \text{в} \quad Z, \tag{6.2}$$

$$u_k \underset{k\to\infty}{\to} u_0 \quad \text{по норме} \quad L_2(\Omega)^n \quad \text{и почти всюду на} \quad \Omega, \tag{6.3}$$

$$u_k \underset{k\to\infty}{\to} u_0 \quad \text{по норме} \quad L_2(S)^n \quad \text{и почти всюду на} \quad S, \tag{6.4}$$

$$D(u_k) \underset{k\to\infty}{\to} 0 \quad \text{в} \quad L_2(\Omega), \tag{6.5}$$

$$\delta_k^{-1}D(u_k) \underset{k\to\infty}{\rightharpoonup} -p_0 \quad \text{в} \quad \mathcal{P}_0. \tag{6.6}$$

Положим

$$\Upsilon(u_k, v) = \langle A^+(u_k) + A(u_k) - A(v) + K_{\delta_k}(u_k) - K(u_0, p_0) + \\ + M_{\delta_k}(u_k) - M(u_0) + \delta_k^{-1}D^*D(u_k) + D^*(p), u_k - v\rangle.$$

Согласно леммам 3.1–3.4 и соотношениям (6.2)–(6.6) можно положить, что для последовательности $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ выполняются следующие предельные соотношения:

$$\lim_{k\to\infty}\langle A(u_k)-A(v),u_k-v\rangle\geqslant 0, \tag{6.7}$$

$$\lim_{k\to\infty}\langle K_{\delta_k}(u_k)-K_{\delta_k}(u_0,p_0)+M_{\delta_k}(u_k)-M(u_0),u_k-v\rangle=0, \tag{6.8}$$

$$\lim_{k\to\infty}\langle \delta_k^{-1}D^*D(u_k)+D^*(p),u_k-v\rangle=0, \tag{6.9}$$

$$\lim_{k\to\infty}\langle A^+(u_k),u_k-v\rangle=0. \tag{6.10}$$

Из соотношений (6.7)–(6.10) имеем

$$\lim_{k\to\infty}\Upsilon(u_k,v)\geqslant 0\quad \forall v\in Z. \tag{6.11}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\Upsilon(u_k,v)&=\lim_{k\to\infty}\langle A^+(u_k),u_k-v\rangle+\\&+\lim_{k\to\infty}\langle A(u_k)+K_{\delta_k}(u_k)+M_{\delta_k}(u_k)+\delta_k^{-1}D^*D(u_k),u_k-v\rangle+\\&+\lim_{k\to\infty}\langle -A(v)-K(u_0,p_0)-M(u_0)+D^*(p_0),u_k-v\rangle=\\&=\langle F-A(v)-K(u_0,p_0)-M(u_0)+D^*(p_0),u_0-v\rangle.\end{aligned} \tag{6.12}$$

Далее возьмем $v=u_0-\gamma h$, где $\gamma>0$, $h\in Z$, и устремим $\gamma\to 0$. Из соотношений (6.11) и (6.12) следует, что для любого $h\in Z$ имеет место неравенство

$$\langle F-A(u_0)-K(u_0,p_0)-M(u_0)+D^*(p_0),h\rangle\geqslant 0,$$

заменяя в котором h на $-h$, получим в силу произвольности h, что пара (u_0,p_0) — искомое решение уравнения (2.2).

Литература

1. Трусделл К. *Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред.* – М.: Мир, 1975. – 592 с.
2. Раджагопал К.Р. *О некоторых нерешенных проблемах нелинейной динамики жидкостей* // УМН. – 2003. – Вып. 58. – № 2. – С. 111–121.
3. Литвинов В.Г. *Движение нелинейно-вязкой жидкости.* – М.: Наука, 1982. – 376 с.
4. Астарита Дж., Марручи Дж. *Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей.* – М.: Мир, 1978. – 309 с.
5. Hoppe R.H.W., Litvinov W.G. *Flow of electrorhological fluids under the conditions of slip on the boundary.* – Institute of Mathematics, University of Augsburg, 2002. – 9 p.
6. Eringen A.C. *Nonlocal Continuum Field Theories.* – Springer-Verlag, 2002. – 15 p.
7. Звягин В.Г., Дмитриенко В.Т. *Аппроксимационно-топологический подход к исследованию задач гидродинамики. Система Навье–Стокса.* – М.: УРСС, 2004. – 112 с.
8. Канторович А.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ в нормированных пространствах.* – М: Физматгиз, 1959. – 274 с.
9. Скрыпник И.В. *Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач.* – М: Физматгиз, 1990. – 265 с.
10. Litvinov W.G. *Optimization in Elliptic Problems with Applications to Mechanics of Deformable Bodies and Fluid Mechanics.* – Birkhäuser, 2000. – 142 p.

Воронежский государственный университет

Поступила 17.04.2006