*Известия вузов. Математика* *http://old.kpfu.ru/journals/izv_vuz/*
*2014, № 9, с. 27–42* *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

*В.С. КЛИМОВ*

# ВАРИАЦИОННЫЕ НЕРАВЕНСТВА С СИЛЬНЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

*Аннотация.* Изучена связь между критическими значениями и топологическими характеристиками негладких функционалов. Установлены аналоги теорем о регулярном интервале и "горном перевале". Найдены оценки снизу числа решений вариационных неравенств с нечетными потенциальными операторами.

*Ключевые слова*: критическое значение, топологические характеристики негладких функционалов, вариационное неравенство, банахово пространство.

*УДК*: 517.946

**Введение**. Работа посвящена приложениям теории операторов монотонного типа к оценкам числа решений вариационных неравенств. Отправным пунктом исследования и основным объектом приложения были вариационные и краевые задачи с нестепенными нелинейностями. Нестепенной характер нелинейностей порождает ряд серьезных трудностей: пространства, на которых определены функционалы (отображения), несепарабельны и нерефлексивны; рассматриваемые функционалы не всюду определены, недифференцируемы и разрывны в естественной области определения; их производные являются неограниченными отображениями и т. п.

В качестве характерного примера рассмотрим вопрос об оценке числа $\mathcal{N}(\lambda)$ обобщенных решений краевой задачи

$$-\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(2\frac{\partial u}{\partial x_k} e^{|\nabla u|^2}\right) + \lambda \Psi'(u) = 0 \quad (x \in \Omega), \quad u(x) = 0 \quad (x \in \partial\Omega).$$

Здесь $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — гладкая четная функция, $\Psi(0) = 0$, $\partial\Omega$ — граница ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$. Из установленных далее результатов вытекает следующее утверждение: если функция $\Psi$ удовлетворяет соотношениям

$$\Psi(t) > 0 \quad (0 < t < R_0), \quad \lim_{t\to\infty} e^{-t^2}\Psi(kt) = 0 \ \ \forall k > 0,$$

то $\mathcal{N}(\lambda) \to \infty$ при $\lambda \to -\infty$. Это утверждение ново даже в случае $\Psi(t) = t^2$.

Решения данной краевой задачи совпадают с экстремалями функционала

$$f(u) = \int_\Omega \left[e^{|\nabla u(x)|^2} + \lambda \Psi(u(x))\right] dx.$$

Для ее иследования представляется естественным использовать методы вариационного исчисления в целом. Однако нестепенной характер нелинейностей заставляет рассматривать

Поступила 27.02.2013

функционал $f$ на нерефлексивном и несепарабельном пространстве Орлича–Соболева, порождаемом $N$-функцией $\Phi(t) = e^{t^2} - 1$; функционал $f$ при этом становится недифференцируемым, $f$ не удовлетворяет условию компактности Пале–Смейла и т. д. Поэтому известные методы вариационного исчисления не дают возможности с достаточной полнотой оценивать число экстремалей данного функционала.

Основу работы составляют идеи и методы нелинейного анализа [1]–[6]. Близкие вопросы рассматриваются в [7]–[10].

Приняты следующие обозначения: $\overline{\mathfrak{M}}$ ($\overset{\circ}{\mathfrak{M}}$, $\partial\mathfrak{M}$) — замыкание (внутренность, граница) подмножества $\mathfrak{M}$ топологического пространства $\mathfrak{R}$; $\mathrm{Pv}(L)$ – совокупность всех непустых выпуклых подмножеств линейного пространства $L$; $X^*$ — сопряженное к банахову пространству $X$ пространство линейных функционалов; $\mathrm{Cv}\,(X)$ $(\mathrm{Kv}\,(X))$ — часть $\mathrm{Pv}(X)$, состоящая из замкнутых (компактных) множеств. Через $\Lambda(M,Y)$ обозначается совокупность отображений множества $M \subset X$ в банахово пространство $Y$, удовлетворяющих локальному условию Липшица, т. е. $F \in \Lambda(M,Y)$, если для каждой точки $x$ из $M$ найдутся ее окрестность $O$ и константа $k$ такие, что $\|F(x_1) - F(x_2)\| \le k\|x_1 - x_2\|$; здесь и далее имеются ввиду относительные окрестности $x$. Класс $\Lambda(M,\mathbb{R})$ действительных на $M$ функций, удовлетворяющих условию Липшица, обозначается символом $\Lambda(M)$. Все линейные пространства рассматриваются над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел. Ниже $\overline{\mathbb{R}}$ — числовая прямая, пополненная двумя несобственными числами $+\infty$ и $-\infty$.

**1. Операторы монотонного типа и вариационные неравенства.** Пусть $Y$ и $Z$ — банаховы пространства, двойственные относительно билинейной и непрерывной на $Y \times Z$ формы $\langle\cdot,\cdot\rangle$, $Y_0$ и $Z_0$ — замкнутые подпространства $Y$ и $Z$ соответственно. Четверка пространств $(Y, Y_0; Z, Z_0)$ называется [6] *дополнительной системой*, если существуют линейные гомеоморфизмы $J_1 : Z \to Y_0^*$, $J_2 : Y \to Z_0^*$, удовлетворяющие условиям $(J_1 z)(y) = \langle y, z\rangle$ $(y \in Y_0)$, $(J_2 y)(z) = \langle y, z\rangle$ $(z \in Z_0)$. Обычным образом вводятся слабые топологии $\sigma(Y,Z)$, $\sigma(Y,Z_0)$, $\sigma(Z,Y)$, $\sigma(Z,Y_0)$ в пространствах $Y$, $Z$ соответственно. Замыкание множества $M \subset Y$ в топологии $\sigma(Y,Z)$ обозначается символом $\sigma(Y,Z)\,\mathrm{cl}\,M$. Аналогичный смысл имеют символы $\sigma(Y,Z_0)\,\mathrm{cl}\,M$, $\sigma(Z,Y)\,\mathrm{cl}\,N$ $(N \subset Z)$ и т. д. Примерами дополнительных систем являются четверки $(X^{**}, X^*; X^*, X^*)$, $(X^*, X^*; X^{**}, X)$, где $X^{**}$ — второе сопряженное к банахову пространству $X$.

Обозначим через $\mathrm{Rv}(Y)$ часть $\mathrm{Pv}(Y)$, состоящую из множеств $Q$, удовлетворяющих равенствам

$$\sigma(Y,Z_0)\,\mathrm{cl}\,Q = Q = \sigma(Y,Z)\,\mathrm{cl}(Q \cap Y_0). \tag{1}$$

Левое из соотношений (1) означает замкнутость множества $Q$ в топологии $\sigma(Y,Z_0)$ пространства $Y$.

Снабдив $Y$ некоторой нормой, можно определить норму на пространстве $Z$ как двойственную к сужению исходной нормы на пространство $Y_0$. Исходная норма на $Y$ называется *допустимой*, если она двойственна сужению нормы пространства $Z$ на $Z_0$ и для любых $y \in Y$, $z \in Z$ справедливо неравенство $\langle y, z\rangle \le \|y\|\,\|z\|$. Как показано в [6], исходная норма будет допустимой в том и только том случае, если шар $\{y \in Y,\ \|y\| \le 1\}$ принадлежит $\mathrm{Rv}(Y)$.

Первостепенный интерес для нас представляют дополнительные системы, порождаемые пространствами Орлича–Соболева. Ниже используются терминология и обозначения, принятые в теории $N$-функций и пространств Орлича ([11], с. 150; [12], с. 95). Пусть $\Omega$ — ограниченная область в $\mathbb{R}^m$; $L_\Phi(\Omega)$, $L_{\Phi^*}(\Omega)$ — пространства Орлича, соответствующие $N$-функции $\Phi$ и сопряженной к ней функции $\Phi^*$; $E_\Phi(\Omega), E_{\Phi^*}(\Omega)$ — подпространства $L_\Phi(\Omega)$, $L_{\Phi^*}(\Omega)$, полученные замыканием в метриках соответствующих пространств множества непрерывных в $\overline{\Omega}$ функций. Четверка пространств $(L_\Phi(\Omega), E_\Phi(\Omega); L_{\Phi^*}(\Omega), E_{\Phi^*}(\Omega))$ образует дополнительную систему, если двойственность между $L_\Phi(\Omega)$, $L_{\Phi^*}(\Omega)$ задается билинейной формой

$$\langle u, v\rangle = \int_\Omega u(x)v(x)\,dx \quad (u \in L_\Phi(\Omega), \quad v \in L_{\Phi^*}(\Omega)).$$

Обозначим через $\overset{\circ}{L}{}^1_\Phi(\Omega)$ совокупность функций $u$ из пространства Соболева $\overset{\circ}{W}{}^1_1(\Omega)$ ([13], с. 283), первые производные $u'_{x_i}$ $(i = 1, \dots, m)$ которых принадлежат пространству $L_\Phi(\Omega)$. Ниже $\nabla u = (u'_{x_1}, \dots, u'_{x_m})$ — градиент функции $u$, $\nabla_1 u = \sqrt{(u'_{x_1})^2 + \dots + (u'_{x_m})^2}$. С нормой $\|u\| = \|\nabla_1 u, L_\Phi(\Omega)\|$ класс $\overset{\circ}{L}{}^1_\Phi(\Omega)$ становится банаховым пространством, называемым рядом авторов *пространством Орлича–Соболева.* Через $\overset{\circ}{E}{}^1_\Phi(\Omega)$ обозначим подпространство $\overset{\circ}{L}{}^1_\Phi(\Omega)$, состоящее из функций, первые производные которых принадлежат $E_\Phi(\Omega)$. Далее $L^{-1}_{\Phi^*}(\Omega)$ $(E^{-1}_{\Phi^*}(\Omega))$ — совокупность линейных функционалов на $\overset{\circ}{L}{}^1_\Phi(\Omega)$, допускающих в смысле обобщенных функций представление $h = \frac{\partial}{\partial x_1}h_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m}h_m$, где $h_i \in L_{\Phi^*}(\Omega)$ $(h_i \in E_{\Phi^*}(\Omega))$, $i = 1, \dots, m$.

Определим на $\overset{\circ}{L}{}^1_\Phi(\Omega) \times L^{-1}_{\Phi^*}(\Omega)$ билинейную форму

$$\langle u, h\rangle = \int_\Omega \sum_{i=1}^m h_i u'_{x_i}\,dx. \tag{2}$$

Если положить

$$Y = \overset{\circ}{L}{}^1_\Phi(\Omega), \quad Y_0 = \overset{\circ}{E}{}^1_\Phi(\Omega), \quad Z = L^{-1}_{\Phi^*}(\Omega), \quad Z_0 = E^{-1}_{\Phi^*}(\Omega), \tag{3}$$

то эта форма определяет двойственность между $Y$ и $Z$. Из результатов работы [6] следует, что если граница $\partial\Omega$ области $\Omega$ удовлетворяет локальному условию Липшица, а двойственность между $Y, Z$ задается билинейной формой (2), то четверка пространств (3) образует дополнительную систему. Условие гладкости $\partial\Omega$ можно значительно ослабить [6]. В дальнейшем предполагается лишь, что четверка пространств (3) образует дополнительную систему пространств.

Возвращаясь к общему случаю, ниже считаем, что норма в пространстве $Y$ допустима, а пространства $Y_0$, $Z_0$ сепарабельны и бесконечномерны. Как показывают приведенные выше результаты (см. также [6]), данные предположения естественны для дополнительной системы (3).

Пусть $D(T)$ — область определения отображения $T : D(T) \to Z$, причем $Y_0 \subset D(T) \subset Y$. Отображение $T$ назовем *полуограниченным*, если для любых $y_0$ из $Y_0$, $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, найдется такая постоянная $R(y_0, c_1, c_2)$, что из соотношений $y \in D(T)$, $\|y\| \le c_1$, $\langle y - y_0, T(y)\rangle \le c_2$ вытекает оценка $\|T(y)\| \le R(y_0, c_1, c_2)$. Обозначим через $G(Y)$ совокупность полуограниченных отображений $T : D(T) \to Z$, удовлетворяющих следующим условиям:

$(\alpha_1)$ график $\Gamma_T = \{(y, z),\ y \in D(T),\ z = T(y)\}$ отображения $T$ есть замкнутое подмножество $Y \times Z$ (при этом в $Y$ рассматривается сильная топология, порождаемая нормой, а в $Z$ — слабая $(\sigma(Z, Y_0))$ топология);

$(\alpha_2)$ для произвольной последовательности $y_i \in D(T)$, обладающей свойствами

$$y_i \to y \ \text{ в } \ \sigma(Y, Z_0), \quad T(y_i) \to z \ \text{ в } \ \sigma(Z, Y_0), \quad \varlimsup_{i\to\infty} \langle y_i, T(y_i)\rangle \le \langle y, z\rangle, \tag{4}$$

справедливы соотношения

$$y \in D(T), \quad z = T(y), \quad \lim_{i\to\infty} \langle y_i, T(y_i)\rangle = \langle y, T(y)\rangle. \tag{5}$$

Близкий к $G(Y)$ класс отображений рассматривается в [6].

**Лемма 1.** *Пусть $T \in G(Y)$, $w \in Y_0$, $h_0(y) = \langle w - y, T(y)\rangle$ $(y \in D(T))$ и $h_0(y) = -\infty$, если $y \notin D(T)$. Тогда функция $h_0 : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ полунепрерывна сверху.*

*Доказательство.* В предположении противного найдутся последовательности $y_i \in D(T)$ и число $c \in \mathbb{R}$ такие, что $y_i \to y$ в метрике $Y$ и $h_0(y_i) > c > h_0(y)$ для любого $i$. Следовательно, $\langle w - y_i, T(y_i)\rangle > c$. Так как $T$ — полуограниченное отображение, то последовательность $T(y_i)$ ограничена в $Z$. Проредив и переобозначив ее, можно считать, что $T(y_i) \to z$ в $\sigma(Z, Y_0)$. Ввиду условия $(\alpha_1) z = T(y)$, поэтому

$$\varliminf_{i\to\infty} \langle w - y_i, T(y_i)\rangle \geq c > h_0(y) \geq \langle w - y, z\rangle,$$

т. е. $\varlimsup_{i\to\infty} \langle y_i, T(y_i)\rangle < \langle y, z\rangle$, а это противоречит условию $(\alpha_2)$. □

Кратко последовательность $y_i$, обладающую свойствами (4), будем называть *$T$-сходящейся* и писать $y_i \xrightarrow{T} y$. Символ $\mathrm{cl}_T\, \mathfrak{M}$ означает множество, называемое *$T$-замыканием множества* $\mathfrak{M} \subset D(T)$. Оно состоит из тех $y$, для которых найдется последовательность $y_i \in \mathfrak{M}$ такая, что $y_i \xrightarrow{T} y$. Пусть $Y$ непрерывно вложено в банахово пространство $Y_1$. Обозначим через $G(Y, Y_1)$ часть класса $G(Y)$, для которой всякая $T$-сходящаяся последовательность сходится в метрике пространства $Y_1$. Самым узким является класс $G(Y, Y)$. Для рефлексивного пространства $Y$ аналогичный $G(Y, Y)$ класс отображений рассматривался в [2]–[5].

Пусть $T \in G(Y), Q \in \mathrm{Rv}(Y)$. Элемент $y$ из $Q \cap D(T)$ назовем *$Q$-особой точкой* отображения $T$, если

$$\langle v - y, T(y)\rangle \geq 0 \quad \forall v \in Q. \tag{6}$$

Соотношения типа (6) называют [5] *вариационными неравенствами.* Если $y \in \mathring{Q}$, то (6) эквивалентно равенству $T(y) = 0$. Множество $Q$ особых точек отображения $T$ обозначим символом $\mathfrak{N}_Q(T)$.

При исследовании вариационного неравенства (6) важную роль играет метод Галёркина. Последовательность $Q_n$ подмножеств множества $Q_0 = Q \cap Y_0$ будем называть *исчерпывающей* $Q_0$, если $Q_n \subset Q_{n+1}$ и объединение всех множеств $Q_n$ $(n = 1, 2, \dots)$ всюду плотно в $Q_0$.

**Лемма 2.** *Пусть $Q_n$, $n = 1, 2, \dots,$ — исчерпывающая $Q_0$ последовательность множеств. Пусть $y_n \in Q$, $\|y_n\| \leq c_1 < \infty$, и*

$$\langle v - y_n, T(y_n)\rangle \geq -\delta_n \quad \forall v \in Q_n, \tag{7}$$

*где $\delta_n \in \mathbb{R}$ и $\delta_n \to 0$. Тогда некоторая подпоследовательность $y_{n_i}$ последовательности $y_n$ $T$-сходится к элементу $y$ из $\mathfrak{N}_Q(T)$.*

*Доказательство.* Пусть $v \in Q_k$ при некотором $k$. Тогда $v \in Q_n$ при всех $n \geq k$, поэтому верно неравенство (7). Отсюда с учетом ограниченности последовательности $y_n$ и полуограниченности отображения $T$ вытекает ограниченность последовательности $T(y_n)$. Переходя, если нужно, к подпоследовательности и производя перенумерацию, можно считать, что $y_n \to y$ в $\sigma(Y, Z_0)$, $T(y_n) \to z$ в $\sigma(Z, Y_0)$. Из (7) следует неравенство

$$\varlimsup_{n\to\infty} \langle y_n, T(y_n)\rangle \le \langle v, z\rangle, \tag{8}$$

которое справедливо для произвольного $v$ из $\cup Q_k$ $(k = 1, 2, \dots)$. Поскольку последовательность $Q_n$ исчерпывает $Q_0$, то (8) верно для всех $v$ из $Q_0$ . Из равенства (1) следует, что (8) выполняется для всех $v$ из $Q$, в частности, для $v = y$. Таким образом, $\varlimsup_{n\to\infty} \langle y_n, T(y_n)\rangle \le \langle y, z\rangle$, т. е. $y_n$ есть $T$-сходящаяся последовательность, поэтому

$$y \in D(T), \quad y_n \xrightarrow{T} y, \quad z = T(y), \quad \langle y_n, T(y_n)\rangle \to \langle y, T(y)\rangle.$$

Докажем включение $y \in \mathfrak{N}_Q(T)$. Вновь зафиксируем элемент $v \in \cup Q_k$. Из неравенства (7) получаем

$$\langle v - y, T(y)\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle v - y_n, T(y_n)\rangle \ge 0.$$

Так как последовательность $Q_k$ исчерпывает $Q_0$, а $Q \in \mathrm{Rv}(Y)$, то из последнего соотношения вытекает (6). □

**Лемма 3.** *Пусть $Q(R) = \{y \in Q, \|y\| \le R\}$. Тогда множество $Q(R) \cap \mathfrak{N}_Q(T)$ $T$-компактно в следующем смысле: из любой последовательности $y_n \in Q(R) \cap \mathfrak{N}_Q(T)$ можно извлечь подпоследовательность $y_{n_i}$, $T$-сходящуюся к некоторому элементу $y$ из $Q(R) \cap \mathfrak{N}_Q(T)$.*

*Доказательство* вытекает из леммы 2 и замкнутости множества $Q(R)$ в топологии $\sigma(Y, Z_0)$ [6]. □

**Следствие.** Если $T \in G(Y, Y_1)$, то множество $Q(R) \cap \mathfrak{N}_Q(T)$ компактно в пространстве $Y_1$.

Обозначим через $\Gamma(Q)$ совокупность тех конечномерных подпространств $E$ пространства $Y_0$, для которых внутренность $\mathrm{ri}_Q$ $(Q \cap E)$ множества $Q \cap E$ относительно пространства $E$ непуста. Отметим некоторые свойства класса $\Gamma(Q)$ [8]:

1) если $E \in \Gamma(Q)$, $y \in Q$, $H = \mathrm{Lin}\,\{E, y\}$ — линейная оболочка $E$ и $y$, то $H \in \Gamma(Q)$;

2) если $E_0$ — конечномерное подпространство $Y_0$ и $Q \cap E_0 \ne \varnothing$, то существует пространство $E \in \Gamma(Q)$, для которого $E \subset E_0$, $Q \cap E = Q \cap E_0$;

3) найдется возрастающая последовательность $E_n$ из $\Gamma(Q)$, для которой последовательность множеств $Q \cap E_n$ исчерпывает $Q_0$.

Пусть $\mathfrak{M} \subset Q \cap D(T)$. Отображение $T : D(T) \subset Y \to Z$ удовлетворяет условию $(C_0)$ на множестве $\mathfrak{M}$, если найдется такой элемент $v_0$ из $Q_0$, что всякая последовательность $y_n$ из $\mathfrak{M}$, для которой $\varliminf_{n\to\infty} \langle v_0 - y_n, T(y_n)\rangle \ge 0$, ограничена.

**Лемма 4.** *Пусть отображение $T$ удовлетворяет условию $(C_0)$ на множестве $\mathfrak{M} \subset Q \cap D(T)$ и $\mathrm{cl}_T\, \mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}_Q(T) = \varnothing$. Тогда существуют $E$ из $\Gamma(Q)$, равномерно ограниченное отображение $w$ класса $\Lambda(\mathfrak{M}, Y)$ и постоянная $\delta > 0$, обладающие свойствами*

$$w(y) \in \mathrm{ri}_E(Q \cap E), \quad \langle w(y) - y, T(y)\rangle < \delta \quad \forall y \in \mathfrak{M}. \tag{9}$$

*Доказательство.* Фиксируем возрастающую последовательность $E_n$ из $\Gamma(Q)$, для которой последовательность $Q \cap E_n$ исчерпывает $Q_0$, причем фигурирующий в условии $(C_0)$ элемент $v_0$ принадлежит $E_1$. Образуем последовательность $Q_n$ класса $\mathrm{Kv}\,(E_n)$, исчерпывающую $Q_0$ и такую, что $v_0 \in Q_1$, $Q_n \subset \mathrm{ri}_{E_n}(Q \cap E_n)$ $(n = 1, 2, \dots)$. Положим $\mathfrak{M}_n = \{y \in \mathfrak{M} : \min\{\langle v - y, T(y)\rangle,\ v \in Q_n\} > -\frac{1}{n}\}$. Так как $Q_n \subset Q_{n+1}$, то $\mathfrak{M}_{n+1} \subset \mathfrak{M}_n$. Если $y_n \in \mathfrak{M}_n$, то выполнено неравенство (7) с $\delta_n = \frac{1}{n}$.

Докажем, что $\mathfrak{M}_n = \varnothing$ при больших $n$. В предположении противного $\mathfrak{M}_n \neq \varnothing$ для всех $n$. Из условия $(C_0)$ вытекает, что всякая последовательность $y_n$ из $\mathfrak{M}_n$ ограничена. Но тогда согласно лемме 2 $\mathrm{cl}_T\, \mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}_Q(T) \neq \varnothing$, а это противоречит условиям доказываемой леммы.

Считая $\mathfrak{M}_n{=}\varnothing$, положим $E = E_n$, $\delta = \frac{1}{n+1}$. Тогда $\min\{\langle v{-}y, T(y)\rangle : v \in Q_n\} < -\delta \ \ \forall y \in \mathfrak{M}$ и $Q_n \subset \mathrm{ri}_E(Q{\cap}E)$. Фиксируем $y_0$ из $\mathfrak{M}$ и подберем $v(y_0)$ из $Q_n$ так, что $\langle v(y_0) - y_0, T(y_0)\rangle < \delta$. В силу леммы 1 существует такая окрестность $O(y_0)$ точки $y_0$, что $\langle v(y_0) - y, T(y)\rangle < \delta$ $\forall y \in O(y_0) \cap \mathfrak{M}$. Система окрестностей $O(y_0)$ $(y_0 \in \mathfrak{M})$ образует покрытие метрического пространства $\mathfrak{M}$. Впишем в покрытие $O(y_0)$ $(y_0 \in \mathfrak{M})$ пространства $\mathfrak{M}$ локально конечное покрытие $V_j$ $(j \in J)$. Пусть $\omega_j$ $(j \in J)$ — разбиение единицы класса $\Lambda(\mathfrak{M})$, подчиненное покрытию $V_j$. Векторное поле

$$w(y) = \sum_{j\in J} \omega_j(y) v(y_j)$$

(элемент $y_j$ подобран так, что $V_j \subset O(y_j)$) является искомым. □

**Теорема 1.** *Пусть найдутся $y_0 \in Q_0$ и $R_0 > \|y_0\|$ такие, что $\langle y - y_0, T(y)\rangle > 0$ $(y \in Q_0$, $\|y\| = R_0)$. Тогда $Q(R_0) \cap \mathfrak{N}_Q(T) \neq \varnothing$.*

*Доказательство.* Предположим противное, т.е. пусть $Q(R_0) \cap \mathfrak{N}_Q(T) = \varnothing$. Множество $Q(R_0)$ ограничено и $T$-замкнуто. Согласно лемме 4 существуют $E$ из $\Gamma(Q)$, отображение $w$ класса $\Lambda(Q(R_0) \cap D(T), Y)$ и постоянная $\delta > 0$, обладающие свойствами (9) с $\mathfrak{M} = Q(R_0) \cap D(T)$. Можно считать, что $y_0 \in E$. Конечномерные векторные поля $y - w(y)$, $y - y_0$ линейно гомотопны на множестве $S = \{y \in Q_0,\ \|y\| = R_0\}$. Относительное вращение поля $y - y_0$ на множестве $S$ равно единице и совпадает с относительным вращением поля $y - w(y)$ на том же множестве [14]. Тогда векторное поле $y - w(y)$ обращается в нуль на одном из элементов множества $\{y \in Q_0,\ \|y\| \le R_0\}$, а это противоречит (9). □

Для псевдомонотонных операторов, действующих в рефлексивных пространствах, аналог теоремы 1 доказан в ([5], гл. 2, п. 8.2).

**Лемма 5.** *Пусть множество $Q$ симметрично относительно нуля, отображение $T$ нечетно. Пусть $\mathfrak{M}$ — симметричное относительно нуля подмножество $Q \cap D(T)$, $\mathrm{cl}_T\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}_Q(T) = \varnothing$ и отображение $T$ удовлетворяет условию $(C_0)$ на множестве $\mathfrak{M}$. Тогда найдутся $E$ из $\Gamma(Q)$, ограниченное нечетное отображение $w$ класса $\Lambda(\mathfrak{M}, Y)$ и постоянная $\delta > 0$, обладающие свойствами (9).*

*Доказательство.* Согласно лемме 4 существуют $E$ из $\Gamma(Q)$, равномерно ограниченное отображение $w_0$ класса $\Lambda(\mathfrak{M}, Y)$ и постоянная $\delta > 0$ такие, что $w_0(y) \in \mathrm{ri}_E(Q \cap E)$, $\langle w_0(y) - y, T(y)\rangle < -\delta \ \ \forall y \in \mathfrak{M}$. Искомое векторное поле $w$ можно определить равенством

$$w(y) = \frac{w_0(y) - w_0(-y)}{2}.$$ □

В качестве примера рассмотрим отображения, действующие в дополнительной системе (3), порождаемой $N$-функцией $\Phi$. Для $N$-функций $\Phi_1$, $\Phi_2$ будем писать $\Phi_1 \ll \Phi_2$, если $\Phi_1(\lambda t) = o(\Phi_2(t))$ при $t \to \infty$ $\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$. Запись $\Phi_1 \prec \Phi_2$ будет обозначать, что $\Phi_1(\lambda t) = O(\Phi_2(t))$ при $t \to \infty$ $\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$. Для упрощений непринципиального характера ограничимся случаем, когда пространство $Y = \overset{\circ}{L}{}^1_\Phi(\Omega)$ компактно вложено в пространство $C(\overline{\Omega})$ непрерывных в $\overline{\Omega}$ функций.

Пусть $A_0(x, \eta, \xi), A_1(x, \eta, \xi), \ldots, A_m(x, \eta, \xi)$ — действительные функции на $\Omega \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^m$, измеримые по $x$ при всех $(\eta, \xi)$ из $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^m$ и непрерывные по $(\eta, \xi)$ при всех $x$ из $\Omega$. Пусть выполнены следующие условия:

$(t_1)$ для каждого $R > 0$ существуют функции $a \in E_{\Phi^*}(\Omega)$, $a_1 \in L_1(\Omega)$, положительные константы $c$, $c_1$ и $N$-функция $P \ll \Phi$ такие, что при всех $(x, \eta, \xi)$ $|\eta| \leqslant R$, $k = 1, \dots, m$, имеют место неравенства

$$|A_k(x, \eta, \xi)| \le a(x) + \sum_{j=1}^{m} (\Phi^*)^{-1}(\Phi(c\xi_j)), \quad |A_0(x, \eta, \xi)| \le a_1(x) + \sum_{j=1}^{m} (\Phi_0^*)^{-1} P(c\xi_j), \tag{10}$$

$$\sum_{k=1}^{m} A_k(x, \eta, \xi)\xi_k \ge \Phi(c_1|\xi|) - a_1(x); \tag{11}$$

$(t_2)$ для каждого $x$ из $\Omega$, $\eta$ из $\mathbb{R}^1$, $\xi$ и $\xi'$ из $\mathbb{R}^m$, $\xi \neq \xi'$,

$$\sum_{k=1}^{m} (A_k(x, \eta, \xi) - A_k(x, \eta, \xi'))(\xi_k - \xi_k') > 0.$$

Определим оператор $T : D(T) \subset Y \to Z$ соотношением

$$\langle v, T(y) \rangle = \int_\Omega \left( \sum_{k=1}^{m} A_k(\cdot, y, \nabla y) v'_{x_k} + A_0(\cdot, y, \nabla y) v \right) dx,$$

где $v$ — произвольный элемент из $Y$,

$$D(T) = \left\{ y \in Y : \int_\Omega \sum_{k=1}^{m} A_k(\cdot, y, \nabla y) y'_{x_k}\, dx < \infty \right\}.$$

Условия $(t_1)$, $(t_2)$ гарантируют [6] включение $T \in G(Y)$.

**Лемма 6.** *Пусть система пространств* $(Y, Y_0; Z, Z_0)$ *определена равенством* (3), $Y_1 = \mathring{L}^1_{\Phi_1}(\Omega)$, *где* $\Phi_1 \prec \Phi$. *Пусть функции* $A_k(x, \eta, \xi)$ $(k = 0, 1, \dots, m)$ *удовлетворяют условиям* $(t_1)$, $(t_2)$. *Тогда оператор* $T : D(T) \subset Y \to Z$ *принадлежит классу* $G(Y, Y_1)$.

*Доказательство.* Пусть $y_i \xrightarrow{T} y$. Тогда последовательность $y_i$ сходится к $y$ в метрике $C(\overline{\Omega})$ и $|y_i(x)| < R$ п. в. при некотором положительном $R$. В силу результатов [6] справедливы соотношения (5) и $(y_i, \nabla y_i) \to (y, \nabla y)$ по мере. Введем функции

$$\psi_i = \sum_{k=1}^{m} A_k(\cdot, y_i, \nabla y_i)(y_i)'_{x_k} + a_1 \quad (i = 1, 2, \dots), \quad \psi = \sum_{k=1}^{m} A_k(\cdot, y, \nabla y) y'_{x_k} + a_1.$$

Согласно (11) $\psi_i \ge \Phi(c_1|\nabla y_i|) \ge 0$; последовательность $\psi_i$ сходится по мере к функции $\psi$; из соотношения (5) вытекает равенство

$$\lim_{i \to \infty} \int_\Omega \psi_i(x)\, dx = \int_\Omega \psi(x)\, dx.$$

Отсюда следует ([15], с. 238–239), что последовательности $\psi_i, \Phi(c_1|\nabla y_i|)$ равностепенно интегрируемы.

При любом $\lambda$ из $\mathbb{R}$ последовательность $v_i = \Phi_1(\lambda|\nabla(y_i - y)|)$ сходится к нулю по мере. Так как $\Phi_1 \prec \Phi$, найдется такая постоянная $c(\lambda)$, что $\Phi_1(2\lambda t) \le c(\lambda)(\Phi(c_1 t) + 1)$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Справедливы оценки

$$v_i \le \frac{\Phi_1(2\lambda|\nabla y_i|) + \Phi_1(2\lambda|\nabla y|)}{2} \le \frac{c(\lambda)}{2}(\Phi(c_1|\nabla y_i|) + \Phi(c_1|\nabla y|)) + c(\lambda),$$

влекущие за собой равностепенную интегрируемость последовательности функций $v_i$ ($i = 1, 2, \dots$). Поэтому $\|v_i, L_1(\Omega)\| \to 0$ при $i \to \infty$ и любом $\lambda \in \mathbb{R}$. Это означает, что $y_i \to y$ в $\overset{\circ}{L}{}^1_{\Phi_1}(\Omega) = Y_1$. $\square$

**2. Вариационные неравенства с потенциальными операторами.**

Ниже вариационное неравенство (6) рассматривается в предположении потенциальности отображения $T : D(T) \subset Y \to Z$. Это предположение позволяет установить более полные результаты о количестве решений неравенства (6). Функционал $f : Y \to \overline{\overline{\mathbb{R}}}$ назовем *регулярным*, если

1) его эффективное множество $D(f) = \{y \in Y : |f(y)| < \infty\}$ выпукло и $Y_0 \subset \overset{\circ}{D}(f)$;

2) сужение $f$ на $\overset{\circ}{D}(f)$ удовлетворяет условию Липшица;

3) для любых $u \in \overset{\circ}{D}(f), v \in Y$ существует производная функционала $f$ в точке $u$ по направлению $v$:

$$f'(u, v) = \lim_{\lambda \to +0} \frac{f(u + \lambda v) - f(u)}{\lambda}.$$

Например, $f$ — регулярный функционал, если $f$ выпуклый и $Y_0 \subset \overset{\circ}{D}(f)$. Регулярными являются дифференцируемые по Гато функционалы класса $\Lambda(Y)$. Если $y : (t_0, t_1) \to \overset{\circ}{D}(f)$ — непрерывно дифференцируемая функция, то правая производная $D^*$ функции $f \circ y : (t_0, t_1) \to \mathbb{R}$ (суперпозиции функций $f$ и $y$) в точке $t$ вычисляется по формуле

$$D^* f(y(t)) = f'(y(t), y'(t)). \tag{12}$$

Назовем отображение $T : D(T) \subset Y \to Z$ *потенциальным в дополнительной системе* $(Y, Y_0; Z, Z_0)$, если существует регулярный функционал $f : D(f) \subset Y \to \mathbb{R}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) $Y_0 \subset \overset{\circ}{D}(f) \subset D(T) \subset D(f)$;

2) если $y \in \overset{\circ}{D}(f)$, $v \in Y$, то $f'(y, v) = \langle v, T(y) \rangle$.

Функционал $f$ будем называть *потенциалом отображения* $T$ и писать $T = \partial f$. В этом и следующем пунктах считаем, что $T = \partial f \in G(Y)$. Если $y_* \in \mathfrak{N}_Q(T)$, то $y_*$ назовем *$Q$-экстремалью функционала* $f$, а число $f(y_*)$ — *$Q$-критическим значением* $f$. Обозначим через $C_Q(f)$ множество $f(\mathfrak{N}_Q(T))$ $Q$-критических значений $f$. Предшествующие определения имеют смысл и для $Q = Y$. В этом случае $Q$-экстремаль называем *экстремалью*, $Q$-критическое значение — *критическим значением*, множество $C_Q(f)$ обозначаем символом $C(f)$.

Потенциал $f$ отображения $T$ будем называть *$\alpha$-непрерывным*, если для каждой $T$-сходящейся к элементу $y$ последовательности $y_i$ из $D(T)$ справедливо равенство $f(y) = \lim\limits_{i \to \infty} f(y_i)$. Примеры $\alpha$-непрерывных функционалов приводятся в конце этого пункта (см. также [7]). Не оговаривая каждый раз особо, далее считаем, что потенциал $f$ отображения $T$ есть $\alpha$-непрерывный функционал.

**Лемма 7.** *Пусть $b \in \mathbb{R} \setminus C_Q(f)$ и при некотором $\varepsilon_0 > 0$ множество $\{y \in \mathfrak{N}_Q(T) : b - \varepsilon_0 < f(y) \le b\}$ ограничено. Тогда $[b - \varepsilon, b] \subset \mathbb{R} \setminus C_Q(f)$ при некотором $\varepsilon > 0$. Аналогичное утверждение верно и для правых полуокрестностей $[b, b + \varepsilon_0)$, $[b, b + \varepsilon]$ числа $b$.*

*Доказательство.* Пусть, например, ограничено множество $\{y \in \mathfrak{N}_Q(T) : b - \varepsilon_0 < f(y) \le b\}$. Установим включение $[b - \varepsilon, b] \subset \mathbb{R} \setminus C_Q(f)$ при некотором $\varepsilon > 0$. В предположении противного существует последовательность $y_k$ из $\mathfrak{N}_Q(T)$, для которой $f(y_k) < b$, $f(y_k) \to b$.

Последовательность $y_k$ ограничена. Из леммы 3 вытекает, что некоторая подпоследовательность $y_{k_i}$ последовательности $y_k$ $T$-сходится к элементу $y \in \mathfrak{N}_Q(T)$. Так как функционал $f$ $\alpha$-непрерывен, то $f(y) = b$, поэтому $b \in C_Q(f)$. Получили противоречие. $\square$

Положим $M_b = \{y \in Q \cap D_f : f(y) \leq b\}$ $(b \in \mathbb{R})$, $M_{a,b} = \{y \in Q \cap \overset{\circ}{D}_f : a \leq f(y) \leq b\}$. При построении деформаций, понижающих значения функционала $f$, полезна

**Лемма 8.** *Пусть поле $v$ класса $\Lambda(M_b, Y)$ удовлетворяет условиям*

$$v(y) + y \in \mathrm{ri}_E(Q \cap E), \quad y \in M_b, \tag{13}$$

$$f'(y, v(y)) < -\delta, \quad y \in M_{a,b}, \tag{14}$$

*где $\delta > 0$, $E \in \Gamma(Q)$, $a < b, M_{a,b} \neq \varnothing$. Тогда*

1) *при любом $y_0$ из $M_b$ задача Коши*

$$y' = v(y), \quad y(0) = y_0 \tag{15}$$

*имеет единственное решение $y(t, y_0)$, причем $y(t, y_0) \in M_b$ $\forall t \geq 0$;*

2) *решение $y(t, y_0)$ непрерывно по совокупности переменных на $[0, \infty) \times M_b$;*

3) *функция $\tau(y_0) = \min\{t \geq 0 : f(y(t, y_0)) \leq a\}$ непрерывна на множестве $M_b$ и $\tau(y_0) \leq \frac{1}{\delta} \max\{f(y_0) - a, 0\}$.*

*Доказательство.* Фиксируем $y_0$ из $M_b$ и положим $H = \mathrm{Lin}\,\{E, y_0\}$, $D = M_b \cap H$. Используя включение (13) и рассуждения, аналогичные проведенным при доказательстве лемм 2, 3 работы [8], убеждаемся, что задача Коши (15) имеет единственное решение $y(t, y_0)$, не выходящее за пределы множества $D$. Включение $v \in \Lambda(M_b, Y)$ влечет непрерывность $y(t, y_0)$ по совокупности переменных. Равенство $U_t(y_0) = y(t, y_0)$ определяет семейство преобразований, оставляющих инвариантным не только множество $M_b$, но и его сечения вида $M_b \cap E_1$, где $E_1 \in \Gamma(Y_0)$, $E \subset E_1$.

В силу (12), (14), (15) $D^* f(y(t, y_0)) \leq -\delta$, если $y(t, y_0) \in M_{a,b}$. Отсюда следует оценка $\tau(y_0) \leq \frac{1}{\delta} \max\{f(y_0) - a,\ 0\}$. Непрерывность функции $\tau(\cdot)$ на множестве $M_b$ вытекает из равенства $f(\tau(y_0), y_0)) = a$ и теорем о неявных функциях. $\square$

**Теорема 2.** *Пусть $(\alpha, b] \cap C_Q(f) = \varnothing$ и отображение $T = \partial f$ на множестве $f^{-1}((\alpha, b])$ удовлетворяет условию $(C_0)$. Тогда для любого числа $a$ из $(\alpha, b)$ множество $M_a$ — деформационный ретракт множества $M_b$.*

*Доказательство.* Пусть $\alpha < a_1 < a < b$. Отображение $T$ на множестве $\mathfrak{M} = f^{-1}([a_1, b])$ удовлетворяет условию $(C_0)$. Поскольку функционал $f$ $\alpha$-непрерывен, то $\mathrm{cl}_T\, \mathfrak{M} = \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}_Q(T) = \varnothing$. Согласно лемме 4 существуют пространство $E \in \Gamma(Q)$, равномерно ограниченное отображение $w$ класса $\Lambda(\mathfrak{M}, Y)$ и постоянная $\delta > 0$, обладающие свойствами (9). Фиксируем функцию $\psi_0$ класса $C^\infty(\mathbb{R})$, для которой $\psi_0(t) = 1$ $\left(t \geq \frac{a+a_1}{2}\right)$, $\psi_0(t) = 0$ $(t \leq a_1)$, $0 \leq \psi_0(t) \leq 1$, и вектор $w_0$ из $\mathrm{ri}_E(Q \cap E)$. Положим $w(y) = \psi_0(f(y))w(y) + (1 - \psi_0(f(y)))w_0$. Так как $\psi_0(t) = 0$, если $t < a_1$, то способ распространения функции $w(y)$ на множество $\{y \in Q : f(y) < a_1\}$ несуществен.

Поле $v(y) = w_1(y) - y$ удовлетворяет условиям (13), (14). Обозначим через $y(t, y_0)$ решение задачи Коши (15), $\tau(y_0) = \min\{t \geq 0 : f(y(t, y_0)) \leq a\}$. Как отмечалось выше, функции $y(t, y_0)$ и $\tau(y_0)$ непрерывны на $[0, \infty) \times M_b$ (соответственно на $M_b$). Определим отображение $\psi : M_b \times [0, 1] \to M_b$ равенством $\psi(y_0, \lambda) = y(\lambda\tau(y_0), y_0)$. Отображение $\psi$ непрерывно по совокупности переменных;

$$\psi(y_0, \lambda) = y_0 \ \ (y_0 \in M_b); \quad \psi(y_0, \lambda) = y_0 \ \ (y_0 \in M_a), \ \ 0 \leq \lambda \leq 1;$$

$\psi(y_0,1)\in M_a$ $(y_0\in M_b)$. Эти утверждения следуют из свойств функций $y(t,y_0),\tau(y_0)$. Они означают, что $M_a$ — деформационный ретракт $M_b$. $\square$

Пусть $y_0,y_1\in Q\cap\overset{\circ}{D}(f)$. Обозначим через $\Pi(y_0,y_1)$ совокупность непрерывных путей, соединяющих $y_0$, $y_1$ и не выходящих за пределы множества $Q\cap\overset{\circ}{D}_f$. Классу $\Pi(y_0,y_1)$ сопоставим число

$$c=\inf_{\mathfrak{K}\in\Pi(y_0,y_1)}\ \max_{y\in\mathfrak{K}} f(y). \tag{16}$$

**Теорема 3.** *Пусть существуют открытое (в относительной топологии пространства $Q\cap\overset{\circ}{D}_f$) множество $V$, элементы $y_0\in V$, $y_1\in(Q\cap\overset{\circ}{D}_f)\setminus V$ и число $m_1$ такие, что $f(y)\ge m_1>f(y_1)\ge f(y_0)$ $(y\in\partial_Q V)$. Тогда*

1) *определяемое равенством* (16) *число $c$ конечно и $c\ge m_1$;*

2) *если отображение $T=\partial f$ на некотором множестве $f^{-1}((\alpha,\beta))$ $(\alpha<c<\beta)$ удовлетворяет условию $(C_0)$, то $c\in C_Q(f)$.*

*Доказательство.* Конечность $c$ и оценка $c\ge m_1$ очевидны. Установим, что $(c-\varepsilon,c+\varepsilon)\cap C_Q(f)\ne\varnothing$ для каждого $\varepsilon>0$. В предположении противного $(c-\varepsilon,c+\varepsilon)\cap C_Q(f)=\varnothing$ для некоторого $\varepsilon>0$. Будем считать, что $[c-\varepsilon,c+\varepsilon]\subset(\alpha,\beta)$. Пусть $c-\varepsilon<a<c<b<c+\varepsilon$, $a>f(y_1)$, $\mathfrak{K}\in\Pi(y_0,y_1)$ и $\max\{f(y):y\in\mathfrak{K}\}<b$. В силу теоремы 2 существует ретракция $\psi_1:M_b\to M_a$. Тогда $\psi_1(\mathfrak{K})\in\Pi(y_0,y_1)$ и $\max\{f(y):y\in\psi_1(\mathfrak{K})\}\le a<c$, что противоречит определению числа $c$. Противоречие означает, что $(c-\varepsilon,c+\varepsilon)\cap C_Q(f)\ne\varnothing$ $\forall\varepsilon>0$. Согласно лемме 7 отсюда следует включение $c\in C_Q(f)$. $\square$

Теоремы 2, 3 можно рассматривать как аналоги теорем о регулярном интервале и "горном перевале" [7]–[10].

Приведем примеры потенциальных операторов, действующих в дополнительной системе (3). Определяемый в лемме 6 оператор $T$ является потенциальным, если наряду с условиями $(t_1)$, $(t_2)$ выполнено предположение

$(t_3)$ существует такая функция $F:\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m$, что

$$A=\frac{\partial F}{\partial\eta},\quad A_k=\frac{\partial F}{\partial\xi_k}\quad(k=1,\dots,m),\quad F(\cdot,0,0,\dots,0)\in L^1(\Omega).$$

Действительно, введем функционал

$$f(y)=\int_\Omega F(\cdot,y,\nabla y)\,dx. \tag{17}$$

Из результатов работы [7] вытекает, что при выполнении условий $(t_1)$–$(t_3)$ справедливо равенство $D(f)=\{y\in\overset{\circ}{L}{}^1_\Phi(\Omega):F(\cdot,0,\nabla y)\in L^1(\Omega)\}$. Условие $(t_2)$ влечет за собой выпуклость функции $\xi\to F(x,0,\xi)$ $\forall x\in\Omega$, поэтому $D(f)$ — выпуклое подмножество пространства $\overset{\circ}{L}{}^1_\Phi(\Omega)$. Включение $y\in\overset{\circ}{D}(f)$ эквивалентно включению $\lambda y\in D(f)$ при некотором $\lambda>1$. Из леммы 5 работы [7] следует

**Лемма 9.** *Если выполнены условия $(t_1)$–$(t_3)$, то*

1) *$T$ — потенциальный оператор с потенциалом $f$, определенным равенством* (17);

2) *функционал $f$ $\alpha$-непрерывен и $\sigma(Y,Z_0)$-полунепрерывен снизу.*

В частности, пусть $F(x,\eta,\xi)=\Phi(|\xi|)+\lambda\Psi(\eta)$ $(\lambda\in\mathbb{R})$. В данном случае

$$A_k(x,\eta,\xi)=\frac{\partial\Phi}{\partial\xi_k}(|\xi|)\quad(k=1,\dots,m),\quad A_0(x,\eta,\xi)=\lambda\Psi'(\eta).$$

Определяемые таким образом функции $A_i$ $(i = 0, 1, \dots, m)$ удовлетворяют условиям $(t_1)$–$(t_3)$, если $\Phi$ — строго выпуклая дифференцируемая $N$-функция, а функция $\Psi$ непрерывно дифференцируема.

**3. Вариант теории Люстерника–Шнирельмана.** Для излагаемого ниже варианта теории Люстерника–Шнирельмана важное значение имеет понятие рода множества [1], [7], [9], [10]. Напомним определение и некоторые свойства рода.

Пусть $K$ — центрально-симметричное замкнутое подмножество банахова пространства $X$. Пусть $\sum(K)$ — совокупность замкнутых центрально-симметричных подмножеств $K \setminus \{0\}$, $\sum_1(K)$ — часть $\sum(K)$, состоящая из компактных множеств. *Родом непустого множества* $\mathfrak{K}$ класса $\sum_1(K)$ будем называть число $\gamma(\mathfrak{K})$, равное наименьшему из натуральных чисел $n$, для которых существует нечетное непрерывное отображение $\mathfrak{K}$ в $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Род пустого множества $\{0\}$ полагаем равным нулю. Для произвольного симметричного множества $\mathfrak{B} \subset K \setminus \{0\}$ род $\gamma(\mathfrak{B})$ определяется как $\sup \gamma(\mathfrak{K})$ по всем компактам $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{B}$ класса $\sum_1(K)$. Пишем $\gamma(\mathfrak{B}) = \infty$, если $\mathfrak{B}$ содержит компакты $\mathfrak{K}$ сколь угодно большого рода. Перечислим свойства рода. Их доказательства и другие определения рода можно найти в [1], [7], [9], [10]. Ниже $\mathfrak{K}_i \in \sum(K)$ $(i = 1, 2)$.

1. Если существует нечетное непрерывное отображение из $\mathfrak{K}_1$ в $\mathfrak{K}_2$, то $\gamma(\mathfrak{K}_1) \le \gamma(\mathfrak{K}_2)$, в частности, если $\mathfrak{K}_1 \subset \mathfrak{K}_2$, то $\gamma(\mathfrak{K}_1) \le \gamma(\mathfrak{K}_2)$.

2. $\gamma(\mathfrak{K}_1 \cup \mathfrak{K}_2) \le \gamma(\mathfrak{K}_1) + \gamma(\mathfrak{K}_2)$.

3. Если $\gamma(\mathfrak{K}_2) < \infty$, то $\gamma(\overline{\mathfrak{K}_1 \setminus \mathfrak{K}_2}) \ge \gamma(\mathfrak{K}_1) - \gamma(\mathfrak{K}_2)$.

4. Если $\mathfrak{K} \in \sum_1(K)$, то $\gamma(\mathfrak{K}) < \infty$ и $\mathfrak{K}$ имеет такую окрестность $V$, что $\overline{V} \in \sum(K)$ и $\gamma(\overline{V}) = \gamma(\mathfrak{K})$.

5. Если существуют нечетный гомеоморфизм множества $\mathfrak{K} \in \sum_1(K)$ и границы симметричной окрестности нуля в $\mathbb{R}^n$, то $\gamma(\mathfrak{K}) = n$.

6. Род любого конечного непустого множества класса $\sum(K)$ равен единице.

Пусть $Q$ — симметричное относительно нуля множество класса $\mathrm{Rv}(Y)$ и $0 \in \overset{\circ}{Q}$, $T$ — нечетное потенциальное отображение класса $G(Y)$ с $\alpha$-непрерывным потенциалом $f$ и $f(0) = 0$. Множество $\mathfrak{N}_Q(T)$ $Q$-экстремалей функционала $f$ центрально симметрично. Введем множество $M_t = \{y \in Q_0 : f(y) \le t\}$. При любом $t < 0$ множество $M_t$ входит в класс $\sum(Q_0)$, поэтому определен его род $\gamma(M_t)$. Число $\gamma(M_t)$ можно рассматривать как топологическую характеристику четного функционала $f$. Стабилизацию этой характеристики при конечномерных аппроксимациях функционала влечет

**Теорема 4.** *Пусть $[a, b] \subset \mathbb{R} \setminus C_Q(f)$ $(a < b < 0)$ и множество $\{f \le b\} = \{y \in Q : f(y) \le b\}$ ограничено. Тогда найдется такое пространство $E$ класса $\Gamma(Q)$, что $\gamma(M_a) = \gamma(M_c \cap E) = \gamma(M_c)$ при всех $c$ из $[a, b]$.*

*Доказательство.* В случае $M_b = \varnothing$ утверждение очевидно, поэтому считаем, что $M_b \ne \varnothing$. Фиксируем числа $\alpha$ и $a_1$ так, что $(\alpha, b] \cap C_Q(f) = \varnothing$, $\alpha < a_1 < a$, и положим $\mathfrak{M} = \{y \in Q_0 : a_1 \le f(y) \le b\}$. Множество $\mathfrak{M}$ ограничено и центрально симметрично, его $T$-замыкание принадлежит $f^{-1}([a_1, b])$. Так как $[a_1, b] \cap C_Q(f) \subset (\alpha, b] \cap C_Q(f) = \varnothing$, то $\mathrm{cl}_T \mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}_Q(T) = \varnothing$. Согласно лемме 5 существуют пространство $E$ класса $\Gamma(Q)$, равномерно ограниченное нечетное отображение класса $\Lambda(\mathfrak{M}, Y)$ и постоянная $\delta > 0$, обладающие свойствами (9). Пусть $\psi_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — функция, введенная при доказательстве теоремы 2, $v(y) = \psi_0(f(y))w(y)$ (способ распространения функции $w$ на множество $\{y \in Q_0 : f(y) < a_1\}$ несуществен).

Поле $v$ удовлетворяет условиям (13), (14) и нечетно. Если $y(t, y_0)$ — решение задачи Коши (15), $U_t y_0 = y(t, y_0)$ $(t \ge 0, y_0 \in M_b)$, то $U_t : M_b \to M_b$ — семейство преобразований, образующих непрерывную полугруппу и оставляющих инвариантными множества $M_c$, $M_c \cap E$

при любом $c$ из $[a,b]$. Положим $\mathfrak{A} = \bigcap\limits_{t\geq 0} U_t(M_b \cap E)$. Тогда $\mathfrak{A}$ — непустой компакт, минимальный глобальный аттрактор сужения полугруппы $U_t$ на $M_b \cap E$ [16]. Компакт $\mathfrak{A}$ притягивает каждый непустой компакт $\mathfrak{K} \subset M_b : \Theta_Y(U_t(\mathfrak{K}), \mathfrak{A}) \to 0$ при $t \to \infty$ (здесь и далее $\Theta_{\mathfrak{R}}(\mathfrak{N}, \mathfrak{M}) = \sup\limits_{u\in\mathfrak{N}} \inf\limits_{v\in\mathfrak{M}} \rho(u,v)$ — уклонение множества $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{R}$ от множества $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{R}$ в метрике $\rho$ метрического пространства $\mathfrak{R}$). Если $\mathfrak{K} \in \sum_1(Q_0)$, $\mathfrak{K} \subset M_b$, то $\gamma(U_t(\mathfrak{K})) \geq \gamma(\mathfrak{K})$ (свойство 1 рода). С другой стороны, $\gamma(U_t(\mathfrak{K})) \leq \gamma(\mathfrak{A})$ при достаточно больших $t$ (свойство 4 рода). Отсюда вытекает оценка $\gamma(M_b) = \sup\left\{\gamma(\mathfrak{K}) : \mathfrak{K} \in \sum_1(Q_0),\ \mathfrak{K} \subset M_b\right\} \leq \gamma(\mathfrak{A})$. Так как $\mathfrak{A} \in \sum_1(Q_0)$, $\mathfrak{A} \subset M_b$, то $\gamma(M_b) = \gamma(\mathfrak{A})$. В предшествующих утверждениях множество $M_b$ можно заменить любым из множеств $M_c$, $M_c \cap E$ $(a \leq c \leq b)$. Это и приводит к требуемому результату. $\square$

**Теорема 5.** *Пусть множество $\{f \leq b\}$ ограничено при любом $b < 0$. Пусть род множества $\{y \in Q_0 : f(y) < 0\}$ бесконечен. Тогда на любом интервале $(-\varepsilon, 0)$ имеется бесконечно много $Q$- критических значений функционала $f$.*

*Доказательство.* В предположении противного пусть

$$a = \sup\{C_Q(f) \cap (-\infty, 0)\} < 0, \quad (a,0) \cap C_Q(f) = \varnothing.$$

В силу теоремы 4 функция $\gamma(M_t)$ постоянна на интервале $(a,0) : \gamma(M_t) = n$ $(a < t < 0)$. Если центрально-симметричный компакт $\mathfrak{K}$ содержится в множестве $\{y \in Q_0 : f(y) < 0\}$, то $b = \max\{f(y) : y \in \mathfrak{K}\} < 0$, следовательно, $\mathfrak{K} \subset M_b$, $\gamma(\mathfrak{K}) \leq n$. Поэтому

$$\gamma(\{y \in Q_0 : f(y) < 0\}) \leq n < \infty. \qquad \square$$

**Следствие.** В условиях теоремы 3 существует бесконечно малая последовательность $Q$-критических значений функционала $f$.

Критические значения функционала $f$ могут быть найдены с помощью минимаксных конструкций. Положим $\Sigma_i(Q_0) = \{\mathfrak{K} \in \Sigma_1(Q_0) : \gamma(\mathfrak{K}) \geq i\}$. Сопоставим классам $\Sigma_i(Q_0)$ $(i = 1, 2, \dots)$ числа

$$c_i = \inf_{\mathfrak{K}\in\sum\limits_i(Q_0)} \max_{y\in\mathfrak{K}} f(y). \tag{18}$$

Из равенства $f(0) = 0$ следует цепочка неравенств $-\infty \leq c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_i \leq c_{i+1} \leq 0$. В общем случае некоторые из неравенств являются равенствами. Наиболее интересна для нас ситуация, когда

$$-\infty < c_i = c_n = c < 0 \quad (n \geq i). \tag{19}$$

Будем считать, что отображение $T = \partial f$ удовлетворяет условию $(C_0)$ на множестве $f^{-1}((\alpha,\beta)) = \{y \in Q : \alpha < f(y) < \beta\}$, где $-\infty < \alpha < c < \beta < 0$. Предположение $T \in G(Y)$ заменим более жестким ограничением $T \in G(Y, Y_1)$. Как и в п. 1, $B$-пространство $Y$ непрерывно вложено в $B$-пространство $Y_1$. Используются следующие обозначения: $\Theta_{Y_1}(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}_0)$ — уклонение множества $\mathfrak{K} \subset Y_1$ от множества $\mathfrak{K}_0 \subset Y_1$ в метрике, порождаемой нормой в пространстве $Y_1$; $\gamma_1(\mathfrak{K})$ — род множества $\mathfrak{K}$ класса $\sum(Y_1)$; $\mathfrak{K}^t = \mathfrak{N}_Q(T) \cap f^{-1}(t)$ — множество принадлежащих поверхности уровня $f^{-1}(t) = \{y \in Q,\ f(y) = t\}$ $Q$-экстремалей функционала $f$. Из свойств рода следует, что если $\mathfrak{K} \in \sum(Y)$, $\mathfrak{K}_1 \in \sum(Y_1)$, $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{K}_1$, то $\gamma(\mathfrak{K}) \geq \gamma_1(\mathfrak{K}_1)$.

При каждом $t$ из $(\alpha,\beta)$ множество $\mathfrak{K}^t$ можно рассматривать как подмножество $Y_1$. Множество $\mathfrak{K}^t$ центрально-симметрично, компактно и не содержит нуля. В силу леммы 7 равенство $\mathfrak{K}^b = \varnothing$ влечет $\mathfrak{K}^t = \varnothing$ для близких к $b$ значений $t$. Если же $\mathfrak{K}^b \neq \varnothing$, то можно гарантировать равенство

$$\lim_{t\to b} \Theta_{Y_1}(\mathfrak{K}^t, \mathfrak{K}^b) = 0. \tag{20}$$

Действительно, пусть $t_n \to b$, $y_n \in \mathfrak{K}^{t_n}$. Последовательность $y_n$ ограничена и некоторая ее подпоследовательность $y_{n_i}$ $T$-сходится к элементу $y$ из $\mathfrak{N}_Q(T)$. Так как $f$ — $\alpha$-непрерывный функционал, то $f(y) = b$, поэтому $y \in \mathfrak{K}^b$. Всякая $T$-сходящаяся последовательность сходится в пространстве $Y_1$. Поскольку последовательности $y_n$, $t_n$ подчинены лишь требованиям $t_n \to b$, $y_n \in \mathfrak{K}^{t_n}$, то ввиду произвольности их выбора имеет место равенство (20).

Введем функцию $h_1(y) = \Theta_{Y_1}(y, \mathfrak{K}^c)$ $(y \in Y_1)$, здесь $c$ то же, что в (19): в случае $\mathfrak{K}^c = \varnothing$ полагаем $h_1(y) = +\infty$. Пусть $V_\varepsilon = \{y \in Y_1 : h_1(y) < 3\varepsilon\}$. Константу $\varepsilon > 0$ возьмем настолько малой, что $\gamma_1(\overline{V_\varepsilon}) = \gamma_1(\mathfrak{K}^c)$. Выберем далее постоянную $d_1 > 0$ так, чтобы $[c - d_1, c + d_1] \subset (\alpha, \beta)$ и $\Theta_{Y_1}(\mathfrak{K}^t, \mathfrak{K}^c) < \varepsilon$ для всех $t$ из $[c-d_1, c+d_1]$. Подобный выбор $d_1$ возможен в силу (20). Считая числа $\varepsilon > 0$, $d_1 > 0$ фиксированными таким образом, введем множество $M_d = \{y \in Q_0 \backslash V_\varepsilon : f(y) \le c+d\}$, где $d$ — положительный параметр. В указанных выше предположениях относительно отображения $T$ и его потенциала $f$ справедлива

**Лемма 10.** *Найдутся постоянная $d$ из $(0, d_1)$ и нечетное непрерывное отображение $\psi : M(d) \to Q_0$ такие, что $f(\psi(y)) \le c - d \quad \forall y \in M(d)$.*

*Доказательство.* Пусть $\mathfrak{M} = \{y \in Q : c - d_1 \le f(y) \le c + d_1,\ h_1(y) \ge \varepsilon\}$. Отображение $T = \partial f$ на множестве $\mathfrak{M}$ удовлетворяет условию $(C_0)$; $\mathrm{cl}_T\,\mathfrak{M} = \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}_Q(T) = \varnothing$. Согласно лемме 5 существуют пространство $E \in \Gamma(Q)$, ограниченное нечетное отображение $w$ класса $\Lambda(\mathfrak{M}, Y)$ и число $\delta > 0$, обладающие свойствами (9). Пусть $\varphi_i \in C^\infty(\mathbb{R})$ $(i = 1, 2)$, причем

$$0 \le \varphi_1(t) \le 1 \quad (c - d_1 < t < c + d_1), \quad 0 < \varphi_2(t) \le 1 \quad (t \ge \varepsilon),$$

$$\varphi_1(t) = \begin{cases} 1, & t \in \left[c - \frac{d_1}{2}, c + \frac{d_1}{2}\right]; \\ 0, & t \notin (c - d_1, c + d_1), \end{cases} \qquad \varphi_2(t) = \begin{cases} 0, & t \le \varepsilon; \\ 1, & t \ge 2\varepsilon. \end{cases}$$

Введем векторное поле $v(y)$ $(y \in M_{c+d_1} = \{y \in Q_0 : f(y) \le c + d_1\})$, полагая $v(y) = \varphi_1(f(y))\varphi_2(h(y))w(y) - y$. Векторное поле $w$ распространяется на $M_{c+d_1} \setminus \mathfrak{M}$ произвольным образом. Поскольку $\varphi_1((f(y))\varphi_2(h(y))) = 0$ на $M_{c+d_1} \setminus \mathfrak{M}$, выбор распространения несуществен. Векторное поле $v$ принадлежит $\Lambda(M_{c+d_1}, Y)$, является нечетным, кроме того, справедливы аналогичные (13), (14) соотношения

$$v(y) + y \in \mathrm{ri}_E(Q \cap E), \quad y \in M_{c+d_1}, \tag{21}$$

$$\|v(y)\| \le \varkappa_0, \quad f'(y, v(y)) < -\delta \quad \left(c - \frac{d_1}{2} \le f(y) \le c + \frac{d_1}{2},\ h_1(y) \ge 2\varepsilon\right), \tag{22}$$

где $\varkappa_0$ — положительная постоянная. Обозначим через $y(t, y_0)$ решение задачи Коши (16). Как и при доказательстве леммы 8, убеждаемся, что решение $y(t, y_0)$ существует и единственно при всех $y_0 \in M_{c+d_1}$, $t \ge 0$; $y(t, y_0)$ непрерывно по совокупности переменных, $y(t, y_0) \in M_{c+d_1}$. Если $h_1(y_0) \ge 3\varepsilon$ и $h_1(y(t, y_0)) \le 2\varepsilon$ при некотором $t$, то из оценки $\|v(y)\| \le \varkappa_0$ и непрерывности оператора вложения пространства $Y$ в $Y_1$ вытекает неравенство $t > \tau_0 > 0$, где постоянная $\tau_0$ может быть взята одинаковой для всех $y_0$, удовлетворяющих условию $h_1(y_0) \ge 3\varepsilon$.

Пусть $d > 0$, $2d < \tau_0\delta$, $2d < d_1$; $\delta$ — то же число, что и в (21). Выбранное таким образом число является искомым. Действительно, пусть $y_0 \in M(d)$, т. е. $y_0 \in Q_0$, $h_1(y_0) \ge 3\varepsilon$, $f(y_0) \le c + d$. Положим $\tau(y_0) = \min\{t : f(y(t, y_0)) \le c - d\}$, функция $\tau : M(d) \to \mathbb{R}$ непрерывна и удовлетворяет оценке $\tau(y_0) \le \frac{f(y_0) - c + d}{\delta}$ (см. лемму 8). Искомое преобразование $\psi$ определяется равенством $\psi(y_0) = y(\tau(y_0), y_0)$. $\square$

**Теорема 6.** *Пусть $T$ — нечетное отображение с $\alpha$-непрерывным потенциалом $f$ и $f(0) = 0$. Пусть числа $c_i$ определены равенствами* (18) *и при некотором $n \geq i$ выполнены соотношения* (19). *Пусть отображение $T$ удовлетворяет условию $(C_0)$ на некотором множестве $f^{-1}((\alpha, \beta))$, где $-\infty < \alpha < c < \beta < 0$. Тогда $c \in C_Q(f)$ и $\gamma_1(\mathfrak{K}^c) \geq n - i + 1$.*

*Доказательство.* Пусть $\gamma_1(\mathfrak{K}^c) \leq n - i$. Фиксируем постоянные $\varepsilon > 0$, $d > 0$ так, чтобы выполнялись условия леммы 10. В частности, если $V_\varepsilon = \{y \in Y_1 : h_1(y) < 3\varepsilon\}$, то $\gamma_1(\overline{V}_\varepsilon) = \gamma(\mathfrak{K}^c) \leq n-i$. Так как $c = c_n$, то найдется компакт $\mathfrak{K}$ класса $\sum_n(Q_0)$, для которого $\max\{f(y) : y \in \mathfrak{K}\} < c + d$. Поскольку $\gamma(\mathfrak{K}) \geq n$, $\gamma_1(\overline{V_\varepsilon}) \leq n - i$, то $\gamma(\mathfrak{K} \setminus V_\varepsilon) \geq \gamma(\mathfrak{K}) - \gamma(\mathrm{cl}_Y V_\varepsilon) \geq \gamma(\mathfrak{K}) - \gamma_1(\overline{V_\varepsilon}) \geq i$. Если $\psi$ — отображение, фигурирующее в лемме 10, то $i \leq \gamma(\mathfrak{K} \setminus V_\varepsilon) \leq \gamma(\psi(\mathfrak{K} \setminus V_\varepsilon))$ и в то же время $\psi(\mathfrak{K} \setminus V_\varepsilon) \subset M_{c-d}$, иначе говоря, $\max\{f(y) : y \in \psi(\mathfrak{K} \setminus V_\varepsilon)\} \leq c-d$, в частности, $c_i < c - d$. Это противоречит условию $c_i = c$. □

**Замечание.** Заменим в теореме 6 условие $(C_0)$ более жесткими предположениями:
1) множество $\{f \leq b\}$ ограничено при любом $b < 0$;
2) функционал $f : Y \to \mathbb{R}$ $\sigma(Y, Z_0)$-полунепрерывен снизу;
3) $f(y_0) < 0$ для некоторого $y_0$ из $Q_0$.

Обозначим через $l$ род множества $\mathfrak{M}_0 = \{y \in Q_0 : f(y) < 0\}$. Если $l = \infty$, то согласно теореме 5 функционал $f$ имеет счетное число пар $Q$-экстремалей. Если же $l < \infty$, то при перечисленных выше условиях существует не менее $l$ пар ненулевых $Q$-экстремалей функционала $f$. Действительно, в силу теоремы Вейерштрасса функционал $f$ ограничен снизу и достигает своего минимального значения $m_0 > -\infty$. Из определения числа $l$ вытекает оценка $c_l < 0$. Таким образом, $m_0 \leq c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_l < 0$. Теперь существование не менее $l$ пар $Q$-экстремалей функционала $f$ очевидно.

Остановимся на следствиях теоремы 6, относящихся к случаю, когда дополнительная система $(Y, Y_0; Z, Z_0)$ определена равенством (3), $Q = Y = \overset{\circ}{L}{}^1_\Phi(\Omega)$, функционал $f : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ имеет вид

$$f(y) = \int_\Omega [\Phi(|\nabla y|) + \lambda \Psi(y)]\, dx,$$

где $\Phi$ — строго выпуклая дифференцируемая $N$-функция, $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывно дифференцируемая четная функция, $\Psi(0) = 0$.

**Следствие 1.** Пусть функция $\Psi$ удовлетворяет соотношению

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\Psi(kt)}{\Phi(t)} = 0 \quad \forall k > 0. \tag{23}$$

Тогда
1) множество $\{y \in Y : f(y) \leq b\}$ ограничено при любом $b$,
2) функционал $f$ $\alpha$-непрерывен и $\sigma(Y, Z_0)$-полунепрерывен снизу,
3) если род множества $\mathfrak{M}_0 = \{y \in \overset{\circ}{E}{}^1_\Phi(\Omega) : f(y) < 0\}$ равен $l$, то существует не менее $l$ пар ненулевых обобщенных решений краевой задачи

$$-\sum_{k=1}^m \frac{\partial}{\partial x_k} \Phi_{\xi_k}(|\nabla y|) + \lambda \Psi'(y) = 0, \quad u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{24}$$

*Доказательство.* Из результатов [6] вытекает неравенство

$$\int_\Omega \Phi(cy)\, dx \leq \int_\Omega \Phi(|\nabla y|)\, dx, \tag{25}$$

где $c > 0$ и не зависит от $y$ из $\overset{\circ}{L}{}^1_\Phi(\Omega)$. В силу (23) справедлива оценка $|\lambda\Psi(t)| \le \varepsilon\Phi(ct)+\mu(\varepsilon)$, в которой $\mu(\varepsilon)$ — положительная функция $\varepsilon$. Из оценок (23), (25) следует

$$f(y) \ge k_0 \int_\Omega \Phi(|\nabla y|)\, dx - k_1 \quad (k_0 > 0, \quad k_1 > 0).$$

Теперь первое утверждение очевидно.

Справедливость второго утверждения следует из результатов п. 2. Наконец, третье утверждение вытекает из замечания к теореме 6. □

**Следствие 2.** Пусть выполнены условия следствия 1 и функция $\Psi$ положительна на некотором интервале $(0, R_0)$. Тогда число пар ненулевых обобщенных решений краевой задачи (24) неограниченно растет при $\lambda \to -\infty$.

*Доказательство.* Пусть $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ — линейно независимые функции из пространства $C_0^\infty(\Omega)$. Введем компакт

$$K_\varepsilon = \Big\{ y : y = \sum_{i=1}^n t_i \varphi_i, \quad \sum_{i=1}^n t_i^2 = \varepsilon^2 \Big\}.$$

Компакт $K_\varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) гомеоморфен границе единичной сферы в пространстве $\mathbb{R}^n$, поэтому $\gamma(K_\varepsilon) = n$. Фиксируем $\varepsilon > 0$ так, чтобы имела место оценка

$$\int_\Omega \Psi(y)\, dx \ge c_0 > 0 \quad (y \in K_\varepsilon).$$

Отсюда в свою очередь вытекает существование такого числа $\lambda(n) < 0$, что при $\lambda \le \lambda(n)$ справедливо неравенство $f(y) < 0$ для всех $y$ из $K_\varepsilon$. Следовательно, при $\lambda \le \lambda(n)$ род множества $\mathfrak{M}_0$ не меньше $n$. Требуемый результат вытекает теперь из следствия 1. □

В заключение автор благодарит рецензента за ряд полезных замечаний.

## Литература


[1] Красносельский М.А., Забрейко П.П. *Геометрические методы нелинейного анализа* (Наука, М., 1975).

[2] Похожаев С.И. *О разрешимости нелинейных уравнений с нечетными операторами*, Функц. анализ и его прил. **1** (3), 66–73 (1967).

[3] Скрыпник И.В. *Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач* (Наука, М., 1990).

[4] Бобылев Н.А., Емельянов С.В., Коровин С.К. *Геометрические методы в вариационных задачах* (Магистр, М., 1998).

[5] Лионс Ж.-Л. *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач* (Мир, М., 1972).

[6] Gossez J.P. *Nonlinear elliptic boundary value problems for equations with rapidly or slowly coefficients*, Trans. Amer. Math. Soc. **190** (3), 163–205 (1974).

[7] Климов В.С. *Нетривиальные решения уравнений с потенциальными операторами*, Сиб. матем. журн. **21** (6), 28–45 (1980).

[8] Климов В.С. *О топологических характеристиках негладких функционалов*, Изв. РАН. Сер. матем. **62** (5), 117–134 (1998).

[9] Ambrosetti A., Rabinowitz P. *Dual variational methods in critical point theory and applications*, J. Funct. Anal. **14** (4), 349–381 (1973).

[10] Clark D.C. *A variant of Lusternik–Schnierelman theory*, Indiana Univ. Math. J. **22** (1), 65–74 (1972).

[11] Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ* (Наука, М., 1977).

[12] Красносельский М.А., Рутицкий Я.Б. *Выпуклые функции и пространства Орлича* (Физматгиз, М., 1958).

[13] Соболев С.Л. *Введение в теорию кубатурных формул* (Наука, М., 1974).

[14] Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В. *Топологические методы в теории неподвижных точек многозначных отображений*, УМН **35** (1), 59–126 (1980).

[15] Экланд И., Темам Р. *Выпуклый анализ и вариационные проблемы* (Мир, М., 1979).

[16] Ладыженская О.А. *О нахождении минимальных глобальных аттракторов для уравнений Навье–Стокса и для других уравнений с частными производными*, УМН **42** (6), 26–60 (1987).

*В.С. Климов*

*професссор, заведующий кафедрой математического анализа,*
*Ярославский государственный университет,*
*ул. Советская, д. 14, г. Ярославль, 150000, Россия,*

e-mail: VSK76@list.ru

*V.S. Klimov*

**Variational inequalities with strong nonlinearities**

*Abstract.* We study a connection between critical values and topological characteristics of non-smooth functionals. We establish analogs of theorems about regular interval and “nek”. We also find lower estimates of solutions to variational inequalites with odd potential operators.

*Keywords*: critical value, topological characterictics of non-smooth functionals, variational inequality, Banach space.

*V.S. Klimov*

*Professor, Head of the Chair of Mathematical Analysis,*
*Yaroslavl State University,*
*14 Sovetskaya str., Yaroslavl, 150000 Russia,*

e-mail: VSK76@list.ru