ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 3 (514)

УДК 517.987

Е.А. САВИНОВ

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КОНЕЧНОМЕРНЫХ УСЛОВНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНЫХ МЕР НА ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Введение

В работе рассматриваются конечномерные проекции сферически-симметричных мер на локально выпуклом пространстве. Проекции строятся как совместные функции распределения конечных наборов линейных измеримых функционалов, входящих в ортонормированный базис воспроизводящего гильбертова пространства гауссовской меры, порождающей исходную сферически-симметричную меру. Далее для каждой проекции (конечного набора базисных функционалов) рассматривается соответствующее условное распределение некоторого фиксированного числа элементов набора от остальных элементов этого же набора. Устанавливается сходимость почти наверное таких распределений к гауссовским при стремлении размерности к бесконечности. Приводится связь полученных результатов с логарифмическими производными сферически-симметричных мер.

Будем пользоваться обозначениями и фактами из теории меры в локально выпуклом пространстве, приведенными в [1]. Пусть X — локально выпуклое пространство, X^* — пространство линейных непрерывных функционалов на X, $\mathcal{E}(X)$ — наименьшая σ-алгебра, относительно которой измеримы все функционалы из X^*, $\mathcal{B}(X)$ — борелевская σ-алгебра в X, $\mathcal{B}(R^n)$ — борелевская σ-алгебра в R^n.

Рассмотрим γ — радоновскую центрированную гауссовскую меру на X (далее под этим будем понимать, что мера задана на пространстве $\{X, \mathcal{E}(X)\}$) с ковариационным оператором $R_\gamma : X^* \mapsto X$. Введем семейство гауссовских мер $\{\gamma_\sigma\}_{\sigma>0}$ такое, что $\gamma_\sigma(A) = \gamma(\frac{1}{\sigma}A)$, $A \in \mathcal{E}(X)$.

Определение 1. *Воспроизводящим пространством* X^*_γ меры γ называется замыкание множества X^* по норме $\|\cdot\|_\gamma$ пространства $L^2(\gamma)$. Пространство $H(\gamma) = \{h \in X : \|h\|_{H(\gamma)} < \infty\}$, где $\|h\|_{H(\gamma)} = \sup\{l(h) : l \in X^*,\ R_\gamma(l)(l) \le 1\}$, называется *пространством Камерона–Мартина* меры γ или воспроизводящим ядром.

Известно ([1], сс. 57, 97), что X^*_γ и $H(\gamma)$ — сепарабельные гильбертовы пространства со скалярными произведениями

$$\langle f_1, f_2\rangle_\gamma = R_\gamma(f_1)(f_2), \quad \langle R_\gamma(f_1), R_\gamma(f_2)\rangle_{H(\gamma)} = R_\gamma(f_1)(f_2),$$

а ковариационный оператор R_γ продолжается до изоморфизма $X^*_\gamma \mapsto H(\gamma)$.

Пусть μ — некоторая вероятностная мера на X. Напомним известное определение логарифмической производной меры.

Определение 2. Производной меры μ по направлению $h \in X$ называется мера $d_h\mu$, определяемая равенством

$$d_h\mu(A) = \lim_{t\to 0} \frac{\mu(A+th) - \mu(A)}{t}, \quad A \in \mathcal{E}(X).$$

Если мера μ дифференцируема по направлению h, то мера $d_h\mu$ абсолютно непрерывна относительно μ, и существует производная Радона–Никодима

$$\beta_h^\mu(x) := \frac{d(d_h\mu)}{d\mu}(x), \quad x \in X,$$

которая называется *логарифмической производной меры* μ по направлению $h \in X$ ([1], с. 183–184).

Определение 3. Вероятностная радоновская мера μ на X называется $H(\gamma)$-сферически симметричной, если ее характеристический функционал

$$\psi_\mu(f) = \int_X e^{if(x)}\mu(dx), \quad x \in X, \quad f \in X^*,$$

записывается в виде $\psi_\mu(f) = \varphi(\|f\|_\gamma)$ $\forall f \in X^*$, где φ — некоторая функция на R^1.

Следующая теорема была доказана Шенбергом.

Если μ — $H(\gamma)$*-сферически-симметричная мера на* X*, то существует* ([1], сс. 288, 289) *вероятностная мера* ν *на* $(0,\infty)$ *такая, что*

$$\mu(A) = \int_0^\infty \gamma_\sigma(A)\,\nu(d\sigma), \tag{1}$$

где $A \in \mathcal{E}(X)$.

Определение 4. Функция f на X называется линейным измеримым функционалом на (X,γ), если существуют такие линейное пространство L полной γ-меры и γ-измеримая линейная функция f_0 на L, что $f = f_0$ γ-почти наверное.

Отметим ([1], с. 79; [2], сс. 71, 80), что X_γ^*, воспроизводящее гильбертово пространство гауссовской меры γ, совпадает с пространством всех линейных измеримых функционалов на (X,γ).

Рассмотрим последовательность $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ линейных измеримых функционалов на X как последовательность случайных величин на вероятностном пространстве $(X,\mathcal{E}(X),\mu)$ и введем их совместную функцию распределения

$$F^\mu_{f_1,\dots,f_n}(x_1,\dots,x_n) = \mu\{x \in X : f_1(x) \le x_1,\ f_2(x) \le x_2, \dots, f_n(x) \le x_n\}.$$

Введем условную функцию распределения $F^\mu_{i_1,\dots,i_k|j_1,\dots,j_{n-k}}(x_{i_1},\dots,x_{i_k} \mid x_{j_1},\dots,x_{j_{n-k}}) \equiv F^\mu_{nk}$ системы случайных величин $f_{i_1}(x),\dots,f_{i_k}(x)$ относительно системы случайных величин $f_{j_1}(x)$, $\dots, f_{j_{n-k}}(x)$, где $\{i_1,\dots,i_k\}$ и $\{j_1,\dots,j_{n-k}\}$ — непересекающиеся и упорядоченные по возрастанию множества индексов такие, что

$$\{1,\dots,n\} = \{i_1,\dots,i_k\}\bigcup\{j_1,\dots,j_{n-k}\}, \quad 1 \le k < n.$$

1. Формулировки основных результатов

На локально выпуклом пространстве X определим функционал

$$s^2_\infty(x) = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{j=1}^k [f_j(x)]^2, \quad x \in X, \tag{2}$$

и множество $\Gamma \equiv \{x \in X : 0 < s^2_\infty(x) < \infty\}$. Введем σ-алгебры, порожденные системами случайных величин

$$\mathcal{F}_{m,\infty} = \sigma\{f_m(x), f_{m+1}(x), \dots\}, \quad \mathcal{F}_\infty = \bigcap_{m=1}^\infty \mathcal{F}_{m,\infty}.$$

В дальнейшем будем считать, что $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис пространства X_{γ}^{*}. Известно, что линейные измеримые функционалы $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ (в частности, они могут быть непрерывными [1], с. 99) как случайные величины на вероятностном пространстве $(X, \mathcal{E}(X), \gamma)$ независимы, и каждый f_n имеет $(0,1)$-гауссовское распределение ([1], с. 80). Пусть μ — $H(\gamma)$-сферически-симметричная мера, определенная в (1), такая, что мера ν абсолютно непрерывна относительно меры Лебега и имеет плотность $\nu'(t)$.

Основные свойства функционала (2) устанавливает

Теорема 1. 1^0. $\Gamma \in \mathcal{F}_{\infty}$, $\mu\{\Gamma\} = 1$, *функционал* $s_{\infty}^2(x)$ *является* $\mathcal{F}_{\infty}$*-измеримым и* $\mu\{s_{\infty}^2(x) \le u\} = \int\limits_0^{\sqrt{u}} \nu(d\sigma)$.

2^0. *Относительно меры* μ *система случайных величин*

$$\left\{ s_{\infty}^2(x); \frac{f_1(x)}{s_{\infty}(x)}, \dots, \frac{f_n(x)}{s_{\infty}(x)}, \dots \right\}$$

независима и

$$\mu\left\{ \frac{f_n(x)}{s_{\infty}(x)} \le u \right\} = \Phi(u).$$

3^0. *Относительно меры* μ *случайные величины*

$$\frac{f_{i_1}(x)}{s_{\infty}(x)}, \dots, \frac{f_{i_k}(x)}{s_{\infty}(x)}$$

независимы и не зависят от семейства $f_{j_1}(x), \dots, f_{j_{n-k}}(x)$.

Замечание. Абсолютная непрерывность ν в п. 1^0 не требуется.

В следующей теореме устанавливается сходимость почти наверное (при фиксированном k и $n \to \infty$) условных распределений F_{nk}^{μ} к гауссовским. Для доказательства этого факта рассматривается представление Шенберга условных распределений в виде непрерывной смеси гауссовских и с помощью метода Лапласа нахождения асимптотики интегралов показывается дельтаобразность последовательности весовых функций в таких представлениях. Таким образом, указанная сходимость является следствием хорошо известного в анализе "принципа локализации".

Теорема 2. *Для любого* $x \in \Gamma$

$$\lim_{n \to \infty} F_{nk}^{\mu} = \prod_{l=1}^{k} \Phi\left(\frac{x_{i_l}}{s_{\infty}(x)} \right),$$

где $\Phi(\cdot)$ *— стандартное гауссовское распределение,* $x_{i_l} = f_{i_l}(x)$.

Отметим, что результаты теорем 1 и 2 для устойчивых мер в гильбертовом пространстве были получены в [3], [4].

В следующих двух теоремах речь пойдет о свойствах логарифмических производных сферически-симметричных мер, вычисленных в направлении векторов $R_{\gamma}(f_i)$.

Теорема 3. *Если*

$$\int_0^{\infty} t^{-1}\, \nu(dt) < \infty, \tag{3}$$

то

1^0. *относительно меры* μ *система случайных величин* $s_{\infty}^2(x), \beta_{R_{\gamma}(f_1)}^{\mu}(x) s_{\infty}(x), ..., \beta_{R_{\gamma}(f_n)}^{\mu}(x) s_{\infty}(x)$ *независима и* $\mu\{\beta_{R_{\gamma}(f_j)}^{\mu}(x) s_{\infty}(x) \le u\} = \Phi(u)$, $j = 1, 2, \dots$;

2^0. *относительно меры* μ *случайные величины* $\beta_{R_{\gamma}(f_{i_1})}^{\mu}(x) s_{\infty}(x), \dots, \beta_{R_{\gamma}(f_{i_k})}^{\mu}(x) s_{\infty}(x)$ *независимы и не зависят от семейства* $f_{j_1}(x), \dots, f_{j_{n-k}}(x)$.

Теорема 4. *При выполнении* (3)

1^0. *для любого* $x \in \Gamma$

$$\lim_{n\to\infty} F^{\mu}_{nk} = \prod_{m=1}^{k} \Phi(-\beta^{\mu}_{R_\gamma(f_{i_m})}(x) s_\infty(x));$$

2^0. μ*-почти наверное*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} [\beta^{\mu}_{R_\gamma(f_j)}(x)]^2 = \frac{1}{s^2_\infty(x)}.$$

Замечание. Теоремы 3 и 4 фактически являются переформулировками теорем 1 и 2 в терминах логарифмических производных сферически-симметричных мер [5].

Приведенные выше результаты для некоторых устойчивых мер в гильбертовом пространстве также рассматривались в [4], [6].

2. Вспомогательные утверждения

Лемма 1. *Характеристический функционал меры* μ*, заданной равенством* (1)*, имеет вид*

$$\psi_\mu(f) = \int_0^\infty \exp\Big\{-\frac{\sigma^2}{2} R_\gamma(f)(f)\Big\}\nu(d\sigma), \quad f \in X^*. \tag{4}$$

Этот факт легко доказывается с помощью аппарата цилиндрических мер.

Пример (сферически-симметричной меры). Рассмотрим $H(\gamma)$-сферически-симметричную меру μ, для которой распределение ν (см. (1)) такое, что

$$\nu'(\sigma) = g\Big(\frac{\sigma^2}{2}; \frac{\alpha}{2}, 1\Big)\sigma, \tag{5}$$

где $g(\,\cdot\,; a, 1)$ — плотность крайнего устойчивого [7] распределения на R с показателем α, т. е.

$$\mu(A) = \int_0^\infty \gamma_\sigma(A) g\Big(\frac{\sigma^2}{2}; \frac{\alpha}{2}, 1\Big)\sigma\, d\sigma, \quad A \in \mathcal{E}(X).$$

Известно ([7], с. 201; [8], с. 504), что

$$\exp\{-\rho^\alpha\} = \int_0^{+\infty} \exp\{-\rho^2 z\} g\Big(z; \frac{\alpha}{2}, 1\Big)\, dz, \quad \alpha \in (0, 2). \tag{6}$$

Из (4)–(6), полагая $\sigma^2/2 = z$, $\rho^2 = R_\gamma(f)(f)$, получим $\psi_\mu(f) = \exp\{-(R_\gamma(f)(f))^{\frac{\alpha}{2}}\}$. В силу $(\psi_\mu(f))^n = \psi_\mu(n^{\frac{1}{\alpha}} f)$ мера μ устойчива с показателем α.

В следующей лемме устанавливается дельта-образность некоторой вспомогательной последовательности функций с помощью метода Лапласа нахождения асимптотики интегралов.

Введем последовательность функций $\{h_m(\beta_m, z)\}_{m=1}^\infty$ следующим образом:

$$h_m(\beta_m, z) = \frac{1}{I_m} \exp\Big[-mC\Big(\frac{\beta_m}{z} + \ln z\Big)\Big] f(z), \tag{7}$$

где

$$I_m = \int_0^\infty \exp\Big[-mC\Big(\frac{\beta_m}{u} + \ln u\Big)\Big] f(u)\, du,$$

$C > 0$, $m = 1, 2, \ldots$, $z \geq 0$, $f(u)$ — некоторая плотность вероятностей такая, что $f(u) > 0$, $u > 0$, непрерывна и ограничена на $[0, \infty)$, а $\{\beta_m\}$ — некоторая числовая последовательность такая, что $\lim\limits_{m\to\infty} \beta_m = \beta > 0$, $\beta \neq e^{-1}$. Введем также систему отрезков

$$U(\beta_m) = \Big\{u : |u - \beta_m| \leq \frac{\beta_m}{\sqrt{C}} m^{-1/4}\Big\}.$$

Лемма 2. *Функциональная последовательность* $\{h_m(\beta_m, z)\}$ *обладает следующими свойствами:*

1^0. $\int\limits_0^\infty h_m(\beta_m, z)dz = 1$;

2^0. $h_m(\beta_m, z) > 0$ *при* $z > 0$;

3^0. $\lim\limits_{m\to\infty} \int\limits_{U(\beta_m)} h_m(\beta_m, z)dz = 1$.

Следующая лемма устанавливает вид условной функции распределения конечномерной проекции сферически-симметричной меры, заданной соотношением (1) с мерой ν, имеющей плотность $\nu'(t)$, в виде непрерывной смеси гауссовских.

Лемма 3. *Справедливо соотношение*

$$F_{nk}^{\mu} = \int_0^\infty \prod_{l=1}^{k} \Phi\left(\frac{x_{i_l}}{\sqrt{z}}\right) h_{n-k}^{\mu}\left(\frac{\rho_{j,k,n}^2(x)}{n-k}; z\right) dz, \tag{8}$$

где

$$h_{n-k}^{\mu}(t; z) = \frac{\exp[-\frac{n-k}{2}(\frac{t}{z} + \ln z)]\nu'(\sqrt{z})\frac{1}{\sqrt{z}}}{\int\limits_0^\infty \exp[-\frac{n-k}{2}(\frac{t}{u} + \ln u)]\nu'(\sqrt{u})\frac{1}{\sqrt{u}}du}, \tag{9}$$

$$\rho_{j,k,n}^2(x) = \sum_{l=1}^{n-k} x_{j_l}^2, \quad x_{j_l} = f_{j_l}(x). \tag{10}$$

Отметим, что леммы 2, 3 (для одномерных условных распределений) были доказаны в [3].

Следующая лемма [9] дает явное представление логарифмической производной сферически-симметричной меры.

Лемма 4. *Пусть сферически-симметричная мера* μ*, заданная соотношением* (1)*, такая, что выполняется* (3)*. Тогда мера* μ *дифференцируема по всем направлениям из* $H(\gamma)$*, в частности, из* $R_\gamma(X^*) \subset H(\gamma)$*, и для любого* $f \in X^*$ *существует логарифмическая производная*

$$\beta_{R_\gamma(f)}^{\mu}(x) = -\frac{f(x)}{s_\infty^2(x)} \tag{11}$$

μ*-почти наверное.*

Замечание. Условие (3) означает интегрируемость логарифмической производной $\beta_{R_\gamma(f)}^{\mu}(x)$ меры μ, заданной соотношением (1). Отметим, что аналогичное условие в [9] содержит t в степени $-1/2$. Это обусловлено разницей в обозначениях: в [9] параметр t играет роль дисперсии гауссовской случайной величины $\gamma_t \circ f_n^{-1}$, а в изучаемом случае — роль среднего квадратичного отклонения (f_n — элемент ортонормированного базиса пространства X_γ^*).

3. Доказательства теорем

Доказательство теоремы 1. 1^0. Отметим, что

$$\gamma_\sigma\{x \in X : f_1(x) \le x_1,\ f_2(x) \le x_2, \dots, f_n(x) \le x_n\} = \prod_{i=1}^{n} \Phi\left(\frac{x_i}{\sigma}\right). \tag{12}$$

Ввиду (12) случайные величины $f_n(x)$ относительно меры γ_σ являются гауссовскими центрированными независимыми с дисперсиями σ^2. Следовательно, случайные величины $[f_n(x)]^2$ имеют средние, равные σ^2. Значит, на основе усиленного закона больших чисел А.Н. Колмогорова ([10], с. 418) можно утверждать, что для любого $\sigma > 0$

$$\gamma_\sigma\left\{\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}[f_j(x)]^2 = \sigma^2\right\} = 1.$$

Используя критерий фундаментальности почти наверное ([10], с. 271), $\forall \sigma > 0$, $\varepsilon > 0$ получим

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_\sigma(A) = 0, \tag{13}$$

где

$$A = \left\{ \sup_{k\geq 0} \left| \frac{1}{n+k} \sum_{j=1}^{n+k} [f_j(x)]^2 - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} [f_j(x)]^2 \right| > \varepsilon \right\}. \tag{14}$$

Таким образом, последовательность нормированных сумм $\frac{1}{k} \sum\limits_{j=1}^{k} [f_j(x)]^2$, $k = 1, 2, \dots$, фундаментальна почти наверное по мере γ_σ.

Покажем ее фундаментальность почти наверное по мере μ. Зафиксируем n. Нетрудно показать, что $A \in \mathcal{E}(X)$, представив A в виде счетной суммы цилиндрических множеств.

Ввиду (1)

$$\mu(A) = \int_0^\infty \gamma_\sigma(A)\, \nu(d\sigma), \tag{15}$$

где A задано равенством (14). Ясно, что $0 \leq \gamma_\sigma(A) \leq 1$ и $\int\limits_0^\infty \nu(d\sigma) = 1$, поэтому, используя (13) и теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, из (15) получаем $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(A) = 0$. Таким образом, последовательность нормированных сумм $\frac{1}{k} \sum\limits_{j=1}^{k} [f_j(x)]^2$, $k = 1, 2, \dots$, фундаментальна почти наверное по мере μ. Следовательно ([10], с. 275), существует измеримая (относительно $\mathcal{E}(X)$) случайная величина $s_\infty^2(x)$ и множество сходимости $\Gamma \in \mathcal{E}(X)$ такие, что $\mu\{\Gamma\} = 1$ и

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} [f_j(x)]^2 = s_\infty^2(x), \quad x \in \Gamma.$$

Рассмотрим вспомогательные случайные величины ($k > m$) $s_{m,k}^2(x) = \frac{1}{k} \sum\limits_{j=m+1}^{k} [f_j(x)]^2$. Покажем, что $\forall x \in \Gamma$ и $\forall m \in N$ $\lim\limits_{k\to\infty} s_{m,k}^2(x) = s_\infty^2(x)$. Действительно, зафиксируем x и m. Тогда при $k \to \infty$

$$s_{0,k}^2(x) - s_{m,k}^2(x) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{m} [f_j(x)]^2 \to 0, \quad s_\infty^2(x) - s_{0,k}^2(x) \to 0,$$
$$|s_\infty^2(x) - s_{m,k}^2(x)| \leq |s_\infty^2(x) - s_{0,k}^2(x)| + |s_{0,k}^2(x) - s_{m,k}^2(x)| \to 0.$$

Поэтому $\forall m \in N$ функционал $s_\infty^2(x)$ $\mathcal{F}_{m,\infty}$-измерим как предел почти наверное последовательности $\mathcal{F}_{m,\infty}$-измеримых случайных величин, а $\Gamma \in \mathcal{F}_{m,\infty}$. Следовательно, $\Gamma \in \mathcal{F}_\infty$, а $s_\infty^2(x)$ $\mathcal{F}_\infty$-измерим.

Доказательство пп. 2^0 и 3^0 теоремы аналогично [3]. А именно, в п. 3^0 имеем

$$\mu\left\{ f_1(x) \leq u_1; \dots; \frac{f_{i_1}(x)}{s_\infty(x)} \leq u_{i_1}; \dots; \frac{f_{i_k}(x)}{s_\infty(x)} \leq u_{i_k}; \dots; f_n(x) \leq u_n \right\} =$$
$$= \prod_{l=1}^{k} \Phi(u_{i_l}) \int_0^\infty \prod_{l=1}^{n-k} \Phi\left(\frac{u_{j_l}}{t}\right) \nu'(t) dt. \quad \square$$

Доказательство теоремы 2. Зафиксируем $x \in \Gamma$, $k \in N$. Воспользуемся леммой 2 и положим[1]

$$m = n - k, \quad C = \frac{1}{2}, \quad \beta_m = \frac{\rho^2_{j,k,m+k}(x)}{m}, \quad \beta = s^2_\infty(x).$$

Здесь $\rho^2_{j,k,n}(x)$ задано формулой (10), $s^2_\infty(x)$ — формулой (2). Покажем, что $\lim\limits_{m\to\infty} \beta_m = \beta$. Действительно, $\lim\limits_{m\to\infty} \beta_m = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\rho^2_{j,k,n}(x)}{n-k}$. Далее покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\rho^2_{j,k,n}(x)}{n-k} = s^2_\infty(x)$. Имеем

$$\left|\frac{\rho^2_{j,k,n}(x)}{n-k} - s^2_\infty(x)\right| \le \left|\frac{\rho^2_{j,k,n}(x)}{n-k} - s^2_{0,n}(x)\right| + |s^2_{0,n}(x) - s^2_\infty(x)|.$$

Рассмотрим первое слагаемое в правой части

$$\left|\frac{\rho^2_{j,k,n}(x)}{n-k} - s^2_{0,n}(x)\right| = \left|\frac{1}{n-k}\sum_{l=1}^{n-k}[f_{j_l}(x)]^2 - \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}[f_l(x)]^2\right| =$$

$$= \left|\left(\frac{1}{n-k} - \frac{1}{n}\right)\sum_{l=1}^{n-k}[f_{j_l}(x)]^2 - \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{k}[f_{i_l}(x)]^2\right| \le \left|\frac{k}{n-k}\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n-k}[f_{j_l}(x)]^2\right| + \left|\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{k}[f_{i_l}(x)]^2\right| \le$$

$$\le \left|\frac{k}{n-k}s^2_{0,n}(x)\right| + \left|\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{k}[f_{i_l}(x)]^2\right| \to 0, \quad n \to \infty,$$

т. к. k фиксировано. Второе слагаемое стремится к нулю по определению функционала $s^2_\infty(x)$.

Положим также в (7) в качестве плотности $f(z)$ функцию $\nu'(\sqrt{z})\frac{1}{\sqrt{z}}$. Тогда в силу формулы (9) можно утверждать, что

$$h^\mu_{n-k}\left(\frac{\rho^2_{j,k,n}(x)}{n-k}; z\right) = h_m(\beta_m, z).$$

Далее в силу (8)

$$F^\mu_{nk} = \int_0^\infty \prod_{l=1}^{k}\Phi\left(\frac{x_{i_l}}{\sqrt{z}}\right)h^\mu_{n-k}\left(\frac{\rho^2_{j,k,n}(x)}{n-k}; z\right)dz =$$

$$= \int_{U(\beta_m)}\prod_{l=1}^{k}\Phi\left(\frac{x_{i_l}}{\sqrt{z}}\right)h_m(\beta_m, z)dz + \int_{U^c(\beta_m)}\prod_{l=1}^{k}\Phi\left(\frac{x_{i_l}}{\sqrt{z}}\right)h_m(\beta_m, z)dz.$$

Так как функция $\Phi(\cdot)$ ограничена на всей числовой оси, то в силу пп. 1^0 и 3^0 леммы 2 второе слагаемое стремится к нулю при $m \to \infty$. Ввиду непрерывности и ограниченности $\Phi(\cdot)$, а также в силу п. 2^0 леммы 2, используя теорему о среднем, получим

$$\int_{U(\beta_m)}\prod_{l=1}^{k}\Phi\left(\frac{x_{i_l}}{\sqrt{z}}\right)h_m(\beta_m, z)dz = \prod_{l=1}^{k}\Phi\left(\frac{x_{i_l}}{\sqrt{\xi_m}}\right)\int_{U(\beta_m)}h_m(\beta_m, z)dz,$$

где $\xi_m \in U(\beta_m)$. Так как $\xi_m \to \beta = s^2_\infty(x)$, $m \to \infty$, $\Phi(\cdot)$ непрерывна, то в силу п. 3^0 леммы 2 получим

$$\lim_{n\to\infty} F^\mu_{nk} = \lim_{m\to\infty}\prod_{l=1}^{k}\Phi\left(\frac{x_{i_l}}{\sqrt{\xi_m}}\right)\int_{U(\beta_m)}h_m(\beta_m, z)dz = \prod_{l=1}^{k}\Phi\left(\frac{x_{i_l}}{s_\infty(x)}\right). \quad \square$$

Доказательство теоремы 3. Утверждения теоремы являются простыми следствиями п. 2^0 и 3^0 теоремы 1 и равенства (11). $\square$

Доказательство теоремы 4. Утверждения теоремы являются простыми следствиями теоремы 2 и равенств (2) и (11). $\square$

[1]Для того чтобы воспользоваться леммой 2, исключаем случай, когда $s^2_\infty(x) = e^{-1}$. Отметим, что $\mu\{s^2_\infty(x) = e^{-1}\} = 0$.

Замечание. Отметим, что приведенные результаты сводятся к случаю гильбертова пространства, рассмотренного в [3] для устойчивых мер. С помощью теоремы 3.4.3 из [1] об изоморфизме можно сразу получить результаты работы для базисов пространства X_γ^*, состоящих из функционалов, обладающих необходимыми свойствами разделения точек ([1], с. 108–109).

Выражаю благодарность С.Я. Шатских за постановку задач и внимание к работе. Благодарю рецензента за ценные замечания.

Литература

1. Богачев В.И. *Гауссовские меры.* – М.: Наука, Физматлит, 1997. – 352 с.
2. Лифшиц М.А. *Гауссовские случайные функции.* – Киев: ТВ і МС, 1995. – 246 с.
3. Шатских С.Я. *Устойчивые эллиптически контурированные меры в гильбертовом пространстве*: *асимптотические свойства условных распределений* // Изв. РАЕН. Сер. МММИУ. – 1999. – Т. 3. – № 3. – С. 43–81.
4. Кнутова Е.М. *Асимптотические свойства стьюдентовских условных распределений в гильбертовом пространстве* // Вестн. Самарск. ун-та. – 2001. – № 4. – С. 42–55.
5. Шатских С.Я. *Некоторые свойства логарифмических производных эллиптически контурированных мер* // Вестн. Самарск. ун-та. – 2001. – № 4. – С. 109–114.
6. Шатских С.Я., Кнутова Е.М. *Асимптотические свойства условных квантилей устойчивого сферически-симметричного распределения с показателем* $\alpha = 2/3$ // Вестн. Самарск. ун-та. – 1998. – № 4. – С. 102–119.
7. Золотарев В.М. *Одномерные устойчивые распределения.* – М.: Наука, 1983. – 304 с.
8. Феллер В. *Введение в теорию вероятностей и ее приложения.* Т. 2. – М.: Мир, 1984. – 738 с.
9. Норин Н.В., Смолянов О.Г. *Несколько результатов о логарифмических производных мер на локально выпуклом пространстве* // Матем. заметки. – 1993. – Т. 54. – № 6. – С. 135–138.
10. Ширяев А.Н. *Вероятность.* – М.: Наука, 1989. – 640 с.

Самарский государственный университет

Поступили
первый вариант 03.10.2002
окончательный вариант 26.12.2003