ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 1 (452)

УДК 517.518

А.Ю. ПОПОВ, С.А. ТЕЛЯКОВСКИЙ

К ОЦЕНКАМ ЧАСТНЫХ СУММ РЯДОВ ФУРЬЕ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ

В работе [1] было получено следующее усиление теоремы У. Янга о равномерной ограниченности последовательности частных сумм рядов Фурье функций ограниченной вариации.

Теорема А. *Пусть* $n_1 = 1 < n_2 < n_3 < \cdots$ — *возрастающая последовательность натуральных чисел такая, что для некоторого числа* A *выполнено условие*

$$\sum_{j=m}^{\infty} \frac{1}{n_j} \leq \frac{A}{n_m}, \quad m = 1, 2, \dots \tag{1}$$

Тогда для произвольной функции f *ограниченной вариации с рядом Фурье*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

справедлива оценка

$$\sum_{j=1}^{\infty} \Bigl| \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \Bigr| \leq CAV(f), \tag{2}$$

где C — *абсолютная постоянная, а* $V(f)$ — *вариация функции* f *на периоде.*

В [1] приведены некоторые следствия из оценки (2), а также аналогичные ей результаты. Известно ([2], с. 24), что условие (1) равносильно возможности представить последовательность $\{n_j\}$ в виде объединения конечного числа лакунарных последовательностей. В данной статье выясняется, в какой мере условие (1) является существенным для справедливости теоремы А. Будет показано, что это условие не является необходимым и в то же время оно не может быть значительно ослаблено. Эти утверждения составляют содержание теорем 1 и 2 соответственно.

Теорема 1. *Пусть последовательность* $\{n_j\}$ *состоит из всех натуральных чисел* k, *удовлетворяющих условиям* $3^p \leq k \leq 3^p + 2^p$, $p = 0, 1, 2, \dots$ *Для этой последовательности не выполняется условие вида* (1), *но вместе с тем для любой функции* f *ограниченной вариации справедлива оценка*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \Bigl| \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \Bigr| \leq CV(f) \tag{3}$$

с абсолютной постоянной C.

Работа выполнена при финансовой поддержке первого автора Российским фондом фундаментальных исследований (проект 96-01-00378) и второго автора — Российским фондом фундаментальных исследований и Государственным фондом естественных наук Китая (проект 96-01-00036С).

Доказательство. Для рассматриваемой последовательности условие (1) не выполняется, т. к.

$$\sum_{n_j \ge 3^p}^{\infty} \frac{1}{n_j} > \sum_{k=3^p}^{3^p+2^p} \frac{1}{k} > \frac{2^p}{3^p+2^p} > \frac{2^p}{2 \cdot 3^p}.$$

Докажем оценку (3). Обозначив $A_k(x) := a_k \cos kx + b_k \sin kx$, получим

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} A_k(x) \right| = \sum_{p=0}^{\infty} \left(\sum_{k=3^p}^{3^p+2^p-1} |A_k(x)| + \left| \sum_{k=3^p+2^p}^{3^{p+1}-1} A_k(x) \right| \right).$$

Используя известную оценку ([2], с. 81) $|A_k(x)| \le \frac{1}{k} V(f)$, находим

$$\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{k=3^p}^{3^p+2^p-1} |A_k(x)| \le \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{k=3^p}^{3^p+2^p-1} \frac{1}{k} V(f) \le \sum_{p=0}^{\infty} \frac{2^p}{3^p} V(f) = 3V(f). \tag{4}$$

Так как последовательность, составленная из чисел 3^p, $3^p + 2^p$, $p = 0, 1, \ldots$, удовлетворяет условию (1), то согласно теореме A

$$\sum_{p=0}^{\infty} \left| \sum_{k=3^p+2^p}^{3^{p+1}-1} A_k(x) \right| \le CV(f) \tag{5}$$

с некоторой постоянной C. Из (4) и (5) вытекает оценка (3). □

Покажем, что если последовательность $\{n_j\}$ удовлетворяет условию

$$\lim_{j \to \infty} \frac{n_{j+1}}{n_j} = 1, \tag{6}$$

то для нее оценка вида (2) может не иметь места.

Будем рассматривать функцию ограниченной вариации

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}, \quad 0 < x < 2\pi.$$

Введем обозначение $\Delta_\nu := \max_{j \ge \nu} \left(\frac{n_{j+1}}{n_j} - 1 \right)$. В силу (6) $\lim\limits_{\nu \to \infty} \Delta_\nu = 0$.

Теорема 2. *Пусть для последовательности* $\{n_j\}$ *выполняется условие* (6). *Тогда для*

$$x \in \left(\frac{\pi}{n_{\nu+1}}, \frac{\pi}{n_\nu} \right] \tag{7}$$

справедлива равномерная относительно всех параметров оценка

$$F(x) := \sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} \frac{\sin kx}{k} \right| \ge \frac{1}{12} \log \frac{1}{\Delta_\nu} + O(1). \tag{8}$$

Доказательство. Зафиксируем значение x, удовлетворяющее условию (7), и положим $N_\nu := [1/(6\Delta_\nu)]$. Оценку (8) достаточно доказать при условиях $N_\nu > 1$ и

$$x \in (0, \pi/6]. \tag{9}$$

В дальнейшем будем считать эти условия выполненными.

Если натуральное число $m < N_\nu$, то существуют j такие, что

$$\left(m + \frac{1}{6} \right) \pi \le n_j x \le \left(m + \frac{1}{3} \right) \pi, \tag{10}$$

и такие, что

$$\left(m+\frac{2}{3}\right)\pi \le n_j x \le \left(m+\frac{5}{6}\right)\pi. \tag{11}$$

Действительно, если бы оценки (10) не выполнялись ни для одного числа j, то существовало бы j такое, что

$$n_j x < \left(m+\frac{1}{6}\right)\pi, \quad n_{j+1}x > \left(m+\frac{1}{3}\right)\pi,$$

откуда

$$(n_{j+1}-n_j)x > \frac{\pi}{6}. \tag{12}$$

Но из цепочки неравенств

$$\left(m+\frac{1}{3}\right)\pi < n_{j+1}x \le \frac{n_{j+1}}{n_\nu}\pi$$

следует, что $j \ge \nu$. Кроме того, по предположению $n_j x < \left(m+\frac{1}{6}\right)\pi < N_\nu \pi$. Поэтому $(n_{j+1} - n_j)x = n_j x\left(\frac{n_{j+1}}{n_j}-1\right) < N_\nu \pi \Delta_\nu \le \frac{\pi}{6}$, что противоречит оценке (12). Точно так же обосновывается существование j, для которых справедливы неравенства (11).

Для каждого $m = 1, 2, \ldots, N_\nu - 1$ обозначим через E_m множество тех j, для которых

$$\left(m+\frac{1}{6}\right)\pi \le n_j x < n_{j+1}x \le \left(m+\frac{5}{6}\right)\pi. \tag{13}$$

Тогда

$$F(x) \ge \sum_{m=1}^{N_\nu-1} \sum_{j\in E_m} \left| \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} \frac{\sin kx}{k} \right|.$$

В силу (13) для всех k таких, что $n_j \le k \le n_{j+1}-1$, знаки $\sin kx$ одинаковы и $|\sin kx| \ge 1/2$. Поэтому

$$F(x) \ge \sum_{m=1}^{N_\nu-1} \sum_{j\in E_m} \sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} \frac{1}{2k} \ge \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{N_\nu-1} \sum_{k} \frac{1}{k}, \tag{14}$$

где для каждого m суммирование ведется по всем таким k, что

$$\left(m+\frac{1}{3}\right)\frac{\pi}{x} \le k \le \left(m+\frac{2}{3}\right)\frac{\pi}{x}.$$

Так как для любых положительных a и b

$$\sum_{a\le k\le b} \frac{1}{k} \ge \int_{a+1}^{b} \frac{du}{u} = \log\frac{b}{a+1},$$

то из (14) с учетом (9) следует оценка

$$F(x) \ge \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{N_\nu-1} \log\frac{(m+\frac{2}{3})\frac{\pi}{x}}{(m+\frac{1}{3})\frac{\pi}{x}+1} \ge \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{N_\nu-1} \log\frac{(m+\frac{2}{3})\pi}{(m+\frac{1}{3})\pi+\frac{\pi}{6}} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{N_\nu-1} \log\frac{m+\frac{2}{3}}{m+\frac{1}{2}} = \frac{1}{12}\log N_\nu + O(1) = \frac{1}{12}\log\frac{1}{\Delta_\nu} + O(1). \quad \square$$

Проиллюстрируем оценку (8) на примере последовательности

$$n_j := 2^{j^\alpha}, \quad j = 1, 2, \ldots, \quad 0 < \alpha < 1. \tag{15}$$

Для этой последовательности числа n_j не являются целыми. Нетрудно видеть, что это несущественно, если условиться понимать в (8) символ $\sum\limits_{j=a}^{b}$ с произвольными положительными a и b как сумму по всем натуральным j таким, что $a \le j \le b$. Для последовательности (15) $\frac{n_{j+1}}{n_j} - 1 = 2^{(j+1)^\alpha - j^\alpha} - 1$. Так как с ростом j разность $(j+1)^\alpha - j^\alpha$ убывает, то $\Delta_\nu = 2^{(\nu+1)^\alpha - \nu^\alpha} - 1$. Пользуясь дважды формулой конечных приращений Лагранжа, находим $\Delta_\nu = 2^{\alpha/(\nu+\theta)^{1-\alpha}} - 1 < 2^{1/\nu^{1-\alpha}} - 1 < \frac{2}{\nu^{1-\alpha}}$. Значит,

$$\log\frac{1}{\Delta_\nu} > (1-\alpha)\log\nu - \log 2. \tag{16}$$

Если x удовлетворяет условию (7), то $\pi/x < 2^{(\nu+1)^\alpha} \le 2^{(2\nu)^\alpha}$, откуда

$$\nu \ge \frac{1}{2}\left(\log\frac{\pi}{x}\right)^{1/\alpha}. \tag{17}$$

Объединив оценки (16) и (17), получим $\log\frac{1}{\Delta_\nu} > \frac{1-\alpha}{\alpha}\log\log\frac{\pi}{x} - 2\log 2$.

Таким образом, для последовательности (15) имеем

$$F(x) \ge \frac{1-\alpha}{12\alpha}\log\log\frac{\pi}{x} + O(1)$$

равномерно относительно $\alpha \in (0,1)$ и $x \in (0, \pi/6]$.

В теореме 2 функция, для которой не выполнялась оценка (2), имела точку разрыва.

Заметим, что для любой последовательности $\{n_j\}$, удовлетворяющей условию (6), существует непрерывная функция ограниченной вариации, для которой оценка (2) не имеет места.

Действительно, для каждой сходящейся к нулю последовательности существует мажорирующая ее выпуклая сходящаяся к нулю последовательность ([2], с. 653).

Пусть числа N_ν и Δ_ν те же, что и в доказательстве теоремы 2, и $\{\varepsilon_k\}$ — выпуклая сходящаяся к нулю последовательность такая, что для $p = N_\nu n_{\nu+1}$

$$\varepsilon_p \ge \left(\log\frac{1}{\Delta_\nu}\right)^{-1/2}.$$

Положим $b_k := \varepsilon_k/k$ и $g(x) := \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$. Тогда функция $g(x)$ непрерывна и имеет ограниченную вариацию, т. к. ее производная суммируема (в силу выпуклости последовательности $\{\varepsilon_k\}$).

Проведя для функции

$$G(x) := \sum_{j=1}^{\infty}\left|\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} b_k \sin kx\right|$$

те же рассуждения, что и для функции $F(x)$ при доказательстве теоремы 2, получим для x, удовлетворяющих условию (7), аналог оценки (14)

$$G(x) \ge \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{N_\nu-1}\sum_k b_k, \tag{18}$$

где сумма по k имеет тот же смысл, что и в (14).

Так как для всех k, участвующих в оценке (18), $k \le p = N_\nu n_{\nu+1}$, то из (18) вытекает оценка

$$G(x) \ge \frac{1}{2}\varepsilon_p\sum_{m=1}^{N_\nu-1}\sum_k\frac{1}{k} \ge \frac{1}{12}\varepsilon_p\log\frac{1}{\Delta_\nu} + O(1) \ge \frac{1}{12}\left(\log\frac{1}{\Delta_\nu}\right)^{1/2} + O(1),$$

доказывающая наше утверждение.

Литература

1. Теляковский С.А. *О частных суммах рядов Фурье функций ограниченной вариации* // Тр. МИАН. – 1997. – Т. 219. – С. 378–386.
2. Бари Н.К. *Тригонометрические ряды.* – М.: Физматгиз, 1961. – 936 с.

Московский государственный
университет им. М.В. Ломоносова

Поступила
15.06.1998