ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2007 МАТЕМАТИКА № 7 (542)

УДК 511.361

П.Л. ИВАНКОВ

О ЗНАЧЕНИЯХ НЕКОТОРЫХ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С ИРРАЦИОНАЛЬНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Известно (см., напр., [1], с. 186, лемма 2), что если хотя бы одно из чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_u$ рационально, то общий наименьший знаменатель дробей

$$\frac{1}{l!}\prod_{j=1}^{u}\prod_{x=1}^{l}(\lambda_j + x), \quad l = 0, 1, \dots, n, \tag{1}$$

оценивается сверху величиной порядка $e^{O(n)}$. Если все числа λ_j иррациональны, то эта оценка в общем случае не выполняется (см. [2]), но она справедлива для некоторых наборов таких чисел. Можно доказать, например, что эта оценка будет верна, если положить

$$u = 8, \quad \lambda_{1,2} = \pm i, \quad \lambda_{3,4} = \pm\sqrt{2}, \quad \lambda_{5,6} = \pm\sqrt{3}, \quad \lambda_{7,8} = \pm\sqrt{6}. \tag{2}$$

Последнее обстоятельство позволяет получить новые результаты об арифметической природе значений гипергеометрических функций с иррациональными параметрами.

Теорема 1. *Пусть*

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2-2)(x^2-3)(x^2-6)}. \tag{3}$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ и для любого нетривиального набора $h_0, h_1, \dots, h_8$, целых чисел из некоторого мнимого квадратичного поля при всех достаточно больших значениях H, $H = \max(|h_1|, \dots, |h_8|)$, выполняется неравенство

$$\left| h_0 + \sum_{j=1}^{8} h_j f^{(j-1)}(1) \right| > H^{-26-\varepsilon}.$$

Заметим, что для доказательства теоремы 1 нельзя применить теорему 1 из [3], т. к. пришлось бы потребовать, чтобы многочлен от x, стоящий в знаменателе в правой части равенства (3), имел по крайней мере два рациональных корня.

Сформулируем более общую теорему, следствием которой является теорема 1.

Пусть I — мнимое квадратичное поле или поле рациональных чисел; $\varphi_k(x)$, $\psi_k(x)$, $\psi(x)$ — многочлены из кольца $I[x]$, коэффициенты при старших степенях которых равны единице. Степени этих многочленов суть соответственно v_k, u_k и u, причем разность $d = u_k - v_k$ не зависит от k и отрицательна; $m_k = u + u_k > v_k$, $k = 1, \dots, t$; корни многочленов $\varphi_k(x)$ и $\psi_k(x)$ рациональны, а $\psi(x) = (x + \lambda_1)\cdots(x + \lambda_u)$, где $\lambda_1, \dots, \lambda_u$ — алгебраические числа степеней соответственно $\varkappa_1, \dots, \varkappa_u$;

$$\tau = 1 - \frac{1}{u}\sum_{i=1}^{u}\frac{1}{\varkappa_i}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Программы “Развитие научного потенциала высшей школы (2006–2007)” (проект РНП 2.1.1.2381).

Пусть, далее, $\varphi_k(x)\psi_k(x)\psi(x) \neq 0$ при $x = 1, 2, 3 \ldots$; $\omega_1, \ldots, \omega_t$ — отличные от нуля числа из поля I,

$$\Phi_k(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^\nu \omega_k^\nu \prod_{x=1}^{\nu} \frac{\varphi_k(x)}{\psi_k(x)\psi(x)}, \quad k = 1, \ldots, t.$$

Обозначим $m = m_1 + \cdots + m_t$, и пусть существует γ, зависящее лишь от чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_u$,

$$0 \le \gamma < \frac{u(1-\tau)+d}{m} \tag{4}$$

такое, что для любого $\varepsilon > 0$ при $n \ge n_1$ (через $n_1 \le n_2 \le \cdots$ будем обозначать натуральные числа, зависящие от параметров функций $\Phi_k(z)$ и от ε) найдется отличное от нуля целое число Q_n из поля I такое, что все числа

$$Q_n(l!)^d \prod_{x=1}^{l} \psi(a+x), \quad l = 0, 1, \ldots, n, \tag{5}$$

являются целыми в указанном поле при любом целом рациональном a, причем

$$|Q_n| \le n^{(\gamma+\varepsilon)n}. \tag{6}$$

Теорема 2. *Пусть выполнены все перечисленные выше предположения относительно функций $\Phi_k(z)$, функции 1, $\Phi_k^{(j_k-1)}(z)$, $k = 1, \ldots, t$; $j_k = 1, \ldots, m_k$, линейно независимы над $\mathbb{C}(z)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ и для любого нетривиального набора целых чисел из поля I, h_0, h_{kj_k}, $k = 1, \ldots, t$; $j_k = 1, \ldots, m_k$, при всех достаточно больших значениях H, $H = \max(|h_{kj_k}|$, $k = 1, \ldots, t$; $j_k = 1, \ldots, m_k)$, выполняется неравенство*

$$\left| h_0 + \sum_{k=1}^{t} \sum_{j_k=1}^{m_k} h_{kj_k} \Phi_k^{(j_k-1)}(1) \right| > H^{-\frac{m(u+d)+u\tau+\gamma m}{u(1-\tau)+d-\gamma m} - \varepsilon}.$$

Доказательство теоремы мало чем отличается от доказательства теоремы 1 из [3].

Пусть $N_\varepsilon = \left[\frac{(1-\varepsilon)n}{m}\right]$, где $0 < \varepsilon < 1$.

Лемма 1. *Для любого ε, $0 < \varepsilon < 1$, при $n \ge n_2$ существует нетривиальный набор y_s, $s = 0, 1, \ldots, n$, целых чисел из поля I, по модулю не превосходящих $n^{\varepsilon n}$, такой, что*

$$\sum_{s=0}^{n} \frac{y_s}{(s!)^d \omega_k^s} \prod_{x_1=1}^{n+1-s} \varphi_k(x_1) \prod_{x_2=N_\varepsilon+1}^{N_\varepsilon+n-s} \frac{1}{\psi_k(x_2)} \frac{s(s-1)\cdots(s-\mu_k+1)}{\mu_k!} = 0$$

при $k = 1, \ldots, t$; $\mu_k = 0, 1, \ldots, [m_k(1-\varepsilon)n/m]$.

Эта лемма почти полностью совпадает с леммой 1 статьи [3]. Отличие состоит в том, что здесь $d < 0$; на ходе доказательства это отличие не отражается.

С помощью леммы 1 определим числа $p_s = y_s\left(\frac{n!}{s!}\right)^d \prod_{x=N_\varepsilon+1}^{N_\varepsilon+n-s} \psi(x)$, $s = 0, 1, \ldots, n$, и многочлен $P(z) = \sum_{s=0}^{n} p_s z^s$.

Далее, пусть

$$\Phi_{k1}(z) = \Phi_k(z), \quad \Phi_{kj_k}(z) = z\frac{d}{dz}\Phi_{k,j_k-1}(z), \quad k = 1, \ldots, t; \quad j_k = 2, \ldots, m_k;$$

$$P(z)\Phi_{kj_k}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{kj_k\nu} z^\nu, \quad k = 1, \ldots, t; \quad j_k = 1, \ldots, m_k.$$

Лемма 2 ([3]). *Справедливы равенства $c_{kj_k\nu} = 0$, $k = 1, \ldots, t$; $j_k = 1, \ldots, m_k$; $\nu = n+1, \ldots, n+N_\varepsilon$.*

Занумеруем функции $\Phi_{kj_k}(z)$ в произвольном порядке и обозначим их через $f_1(z), \dots, f_m(z)$. Подберем многочлены $P_1(z), \dots, P_m(z)$ степени не выше n так, чтобы функции

$$L_i(z) = P(z) f_i(z) - P_i(z), \quad i = 1, \dots, m,$$

имели при $z = 0$ порядок нуля по крайней мере $n + N_\varepsilon$ В силу леммы 2 это можно сделать.

Лемма 3. *Для любых $\varepsilon > 0$ и $n \geq n_4$ найдется такое отличное от нуля число g из поля I, что коэффициенты всех многочленов $P(z), P_1(z), \dots, P_m(z)$ становятся целыми в поле I после умножения их на g; при этом*

$$|g| \leq n^{\left(\frac{u\tau}{m} + \gamma + \varepsilon\right)n}. \tag{7}$$

Доказательство. Пусть $f_i(z)$ соответствует функции $\Phi_{kj_k}(z)$. Обозначим

$$S_1 = \prod_{x=\nu-s+1}^{\nu-s+N_\varepsilon} \psi(x) \prod_{x=1}^{N_\varepsilon} \frac{1}{\psi(x)};$$

$$S_2 = \left((n-\nu)!\right)^d \prod_{x=N_\varepsilon+\nu-s+1}^{N_\varepsilon+n-s} \psi(x);$$

$$S_3 = \omega_k^{\nu-s} \left((n-\nu)!\right)^{-d} \left(\frac{n!}{s!}\right)^d \prod_{x=1}^{\nu-s} \frac{\varphi_k(x)}{\psi_k(x)}.$$

Тогда коэффициент при z^ν многочлена $P_i(z)$ может быть записан в виде

$$\sum_{s=0}^{\nu} y_s (\nu - s)^{j_k - 1} S_1 S_2 S_3.$$

С помощью леммы 3 из [3] подберем отличное от нуля число g_n из поля I, после домножения на которое становится целым число S_1; при этом $|g_n| \leq n^{\left(\frac{u\tau}{m} + \varepsilon\right)n}$, $n \geq n_3$.

Число S_2 станет целым в силу условия (5) после домножения на Q_n. Общий наименьший знаменатель чисел вида S_3 оценивается сверху величиной порядка $e^{O(n)}$. Это следует из рациональности корней многочленов $\varphi_k(x)$ и $\psi_k(x)$ (см. [1], с. 186, лемма 2). Таким образом, коэффициенты многочлена $P_i(z)$ станут целыми в поле I после умножения на число $g = Q_n g_n g'_n$, где $|g'_n| \leq n^{\varepsilon n}$ (при $n \geq n_4$). Нетрудно видеть, что после умножения на это же число станут целыми и коэффициенты многочлена $P(z)$. Оценка (7) непосредственно вытекает из оценок сверху абсолютных величин Q_n, g_n и g'_n. $\square$

Далее рассуждаем по схеме, предложенной в [4]. Краткое описание этой схемы применительно к рассматриваемому случаю см. в ([3], с. 57–58). Сформулируем аналог леммы 5 из [3], отличающийся лишь п. 4.

Лемма 4. *Для любого ε, $0 < \varepsilon < 1$, и для $n \geq n_5$ найдется множество чисел $q_{i0}, q_{i1}, \dots, q_{im}$, $i = 0, 1, \dots, m$, лежащих в поле I и обладающих следующими свойствами:*

1) $\det(q_{il})_{i,l=0,1,\dots,m} \neq 0$;
2) $|q_{i0}| \leq n^{(u+d+\varepsilon)n}$, $i = 0, 1, \dots, m$;
3) $|q_{i0} f_l(1) - q_{il}| \leq n^{-\left(\frac{u+d}{m} - \varepsilon\right)n}$, $i = 0, 1, \dots, m$; $l = 1, \dots, m$;
4) *существует отличное от нуля целое число G из поля I такое, что все числа Gq_{il}, $i = 0, 1, \dots, m$; $l = 1, \dots, m$, целые в поле I, и $|G| \leq n^{\left(\frac{u\tau}{m} + \gamma + \varepsilon\right)n}$.*

При доказательстве (которое является стандартным и потому здесь не приводится) последнего пункта используется лемма 3.

Доказательство теоремы 1 практически не отличается от доказательства теоремы 1 работы [3].

Пусть $h_0, h_1, \ldots, h_m$ — произвольный нетривиальный набор целых чисел из поля I. Согласно лемме 4 $\det(q_{il})_{i,l=0,1,\ldots,m} \neq 0$. Поэтому при некотором $i \in [0, m]$ $\sum\limits_{l=0}^{m} h_l q_{il} \neq 0$. В силу п. 4) леммы 4 в этом случае

$$\left| \sum_{l=1}^{m} h_l q_{il} \right| \geq n^{-\left(\frac{u\tau}{m}+\gamma+\varepsilon\right)n}.$$

Легко проверить, что левую часть этого неравенства можно записать в виде

$$\left| q_{i0}\left(h_0 + \sum_{l=1}^{m} h_l f_l(1)\right) + \sum_{l=1}^{m} h_l \bigl(q_{il} - q_{i0} f_l(1)\bigr) \right|.$$

Отсюда следует, что при всех достаточно больших n выполняется неравенство

$$n^{(u+d+\varepsilon)n} \left| h_0 + \sum_{l=1}^{m} h_l f_l(1) \right| + H n^{-\left(\frac{u+d}{m}-\varepsilon\right)n} \geq n^{-\left(\frac{u\tau}{m}+\gamma+\varepsilon\right)n},$$

где $H = \max(|h_1|, \ldots, |h_m|)$. Отсюда легко следует утверждение теоремы.

Чтобы доказать теорему 1, достаточно проверить, что в условиях этой теоремы выполняются соотношения (4)–(6). Покажем, что в этих соотношениях можно взять $\gamma = 0$.

Лемма 5. *Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_8$ определены равенством (2). Тогда для любого положительного ε найдется отличное от нуля целое число Q_n из поля I такое, что*

$$Q_n (l!)^{-2} \prod_{j=1}^{8} \prod_{x=1}^{l} (a + \lambda_j + x) \in \mathbb{Z}_I, \quad l = 0, 1, \ldots, n,$$

при любом целом рациональном a; при этом для $n \geq n_6$ выполняется неравенство $|Q_n| \leq n^{\varepsilon n}$.

Доказательство. Применим теорему 1 ([5], с. 264). В соответствии с этой теоремой простое $p \equiv 1 \pmod 4$ разлагается в поле $\mathbb{Q}(i)$ в произведение двух различных простых идеалов $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{p}'$, норма каждого из которых равна p. Поэтому в произведение $\prod\limits_{x=1}^{l} (a + i + x)(a - i + x)$ простые идеалы $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{p}'$ входят в степени, не меньшей $2[\frac{l}{p}]$. Следовательно, указанное произведение делится на главный идеал $(p)^{2[\frac{l}{p}]}$. Далее, аналогичный закон разложения справедлив в поле $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ для простых чисел p, $p > 3$, $p \equiv -1 \pmod 8$; в поле $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ для простых чисел $p \equiv -1 \pmod{12}$ и в поле $\mathbb{Q}(\sqrt{6})$ для $p \equiv 19 \pmod{24}$. Легко проверить, что каждое простое число, не делящее 24, входит в один из указанных выше классов. Поэтому для всякого такого простого числа p числитель дроби

$$(l!)^{-2} \prod_{j=1}^{8} \prod_{x=1}^{l} (a + \lambda_j + x), \quad 0 \leq l \leq n, \tag{8}$$

делится на $p^{2[\frac{l}{p}]}$. Делителями числа 24 являются простые числа 2 и 3, поэтому в качестве общего знаменателя дробей (8) при всевозможных значениях l можно взять число $Q_n = 6^{2n} \prod\limits_{p \leq n} p^{2([\frac{n}{p^2}]+[\frac{n}{p^3}]+\cdots)}$, которое оценивается сверху величиной порядка $e^{O(n)}$ (см. [1], с. 186, доказательство леммы 2). $\square$

Таким образом, в условиях теоремы 2 соотношения (4)–(6) выполняются с $\gamma = 0$. Поэтому теорема 1 является следствием теоремы 2. С помощью аналогичных рассуждений доказывается и утверждение относительно дробей (1), приведенное перед формулировкой теоремы 1.

Литература

1. Шидловский А.Б. *Трансцендентные числа.* – М.: Наука, 1987. – 447 с.
2. Галочкин А.И. *О критерии принадлежности гипергеометрических функций Зигеля классу E-функций* // Матем. заметки. – 1980. – Т. 29. – № 1. – С. 3–14.
3. Иванков П.Л. *О линейной независимости значений целых гипергеометрических функций с иррациональными параметрами* // Сиб. матем. журн. – 1993. – Т. 34. – № 5. – С. 53–62.
4. Chudnovsky D.V., Chudnovsky G.V. *Applications of Pade approximation to diofantine inequalities in values of G-functions* // Lect. Notes in Math. – 1985. – V. 1135. – P. 9–51.
5. Боревич З.И., Шафаревич И.Р. *Теория чисел.* – М.: Наука, 1985. – 503 с.

Московский государственный технический университет

Поступила 18.10.2005