ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2004 МАТЕМАТИКА № 3 (502)

УДК 517.940

С.П. ПАВЛОВ, В.А. КРЫСЬКО

СМЕШАННАЯ ВАРИАЦИОННАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ О ПЛАСТИНЕ, СВОБОДНО ОПЕРТОЙ ПО КРИВОЛИНЕЙНОМУ КОНТУРУ

В [1] доказана сходимость итерационного метода решения нелинейной системы уравнений Кармана, на каждом шаге которого решаются лишь линейные уравнения. Естественное стремление — свести решение этих задач к решению задач второго порядка с использованием смешанной вариационной формулировки, которая позволяет это сделать естественным образом. В ([2], с. 372) подобный подход использован для пластины, защемленной по всему контуру. В случае свободного опирания пластины на полигональный контур соответствующая итерационная процедура состоит всего из двух шагов, на каждом из которых решается задача второго порядка. Эта процедура известна как метод мембранной аналогии [3].

Однако при попытке применить метод конечных элементов для расчета свободно опертых пластин с криволинейным контуром возникает так называемый парадокс О.М. Сапонджяна ([4], с. 226): невозможность получить решение для пластинки с криволинейным контуром как предел решений для пластинок с полигональными контурами, аппроксимирующими криволинейный контур.

В данной работе предлагается новая итерационная процедура, основанная на смешанной вариационной формулировке для свободной опертой пластины, когда ее контур считается в общем случае криволинейным. Это обстоятельство порождает существенное отличие метода мембранной аналогии от итерационной процедуры, рассматриваемой ниже.

1. Постановка задачи. Определение пространств. Рассмотрим пластину, занимающую в плане ограниченную выпуклую область $\Omega \in R^2$, свободно опертую по кусочно-гладкой границе Г. Напряженно-деформированное состояние пластины описывается уравнением

$$\Delta^2 w = q, \quad q = Q/D, \tag{1.1}$$

с граничными условиями

$$w|_\Gamma = 0, \quad \Delta w - (1-\eta)\chi \frac{\partial w}{\partial n}\Big|_\Gamma = 0, \tag{1.2}$$

где w — прогиб пластинки, Q — интенсивность поперечной нагрузки, $D = Eh^3/12(1-\eta^2)$ — цилиндрическая жесткость, η – коэффициент Пуассона, E — модуль упругости, h — толщина пластины и χ — кривизна границы Г.

Определим множество

$$E = \{v \in \rho^\infty(\Omega) \,|\, v|_\Gamma = 0\}, \tag{1.3}$$

где $\rho^\infty(\Omega)$ — множество функций, бесконечно дифференцируемых на $\overline{\Omega} \in R^2$. Замыкание множества (1.3) в норме $H^2(\Omega)$ является подпространством в $H^2(\Omega)$. Обозначим его через $V(\Omega)$. Очевидно, $V(\Omega) = H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega)$.

Известно [5], что решение задачи (1.1), (1.2) эквивалентно минимизации на $V(\Omega)$ функционала

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} |\Delta v|^2 d\Omega - \int_{\Omega} dv\, d\Omega - \frac{1-\eta}{2}\int_{\Gamma} \chi \left|\frac{\partial v}{\partial n}\right|^2 ds. \tag{1.4}$$

2. Смешанная вариационная формулировка задачи. Будем считать, что вместо функционала (1.4) минимизируется функционал

$$\Phi(v,\psi,\alpha) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} |\psi|^2 d\Omega - \int_{\Omega} qv\, d\Omega - \frac{1-\eta}{2}\int_{\Gamma} \chi|\alpha|^2 ds \tag{2.1}$$

на таких тройках $(v,\psi,\alpha) \in V(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma)$, элементы которых связаны равенствами $-\Delta v = \psi$, $\frac{\partial v}{\partial n}\big|_{\Gamma} = \alpha$.

Определим пространство функций

$$P(\Omega) = \{(v,\psi,\alpha) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma) \mid \forall \mu \in H^1(\Omega),\ \beta[(v,\psi,\alpha),\mu] = 0\}, \tag{2.2}$$

где билинейная форма $\beta[\cdot,\cdot]$ задается выражением

$$\beta[(v,\psi,\alpha),\mu] = \int_{\Omega} \nabla v \nabla \mu\, d\Omega - \int_{\Omega} \psi\mu\, d\Omega - \int_{\Gamma} \alpha\mu\, ds.$$

Теорема 1. *Пусть область Ω выпукла и имеет непрерывную по Липшицу границу Γ, тогда*

1) *отображение $(v,\psi,\alpha) \in P(\Omega) \to |\psi|_{0,\Omega}^2$* [1] *является нормой на пространстве $P(\Omega)$, эквивалентной естественной норме произведения $(v,\psi,\alpha) \in P(\Omega) \to (|v|_{1,\Omega}^2 + |\psi|_{0,\Omega}^2 + |\alpha|_{0,\Gamma}^2)^{1/2}$ и превращающей $P(\Omega)$ в гильбертово пространство*;

2) *если $(v,\psi,\alpha) \in P(\Omega)$, то*

$$(v,\psi,\alpha) \in V(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma), \quad -\Delta v = \psi, \quad \frac{\partial v}{\partial n}\Big|_{\Gamma} = \alpha; \tag{2.3}$$

если выполнено (2.3), то $(v,\psi,\alpha) \in P(\Omega)$.

Доказательство начнем со второго утверждения. Так как Ω имеет непрерывную границу, то справедлива формула Грина

$$\int_{\Omega} \nabla v \nabla \mu\, d\Omega = -\int_{\Omega} \Delta v \mu\, d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial n}\mu\, ds \quad \forall v \in H^2(\Omega), \quad \forall \mu \in H^1(\Omega). \tag{2.4}$$

Пусть $(v,\psi,\alpha) \in P(\Omega)$. Тогда $v \in H_0^1(\Omega)$, $\psi \in L^2(\Omega)$, $\alpha \in L^2(\Gamma)$ и $\beta[(v,\psi,\alpha),\mu] = 0 \quad \forall \mu \in H^1(\Omega)$. Из последнего условия, в частности, для любого $\mu \in H_0^1(\Omega)$ имеем

$$\int_{\Omega} \nabla v \nabla \mu\, d\Omega = \int_{\Omega} \psi\mu\, d\Omega. \tag{2.5}$$

Из (2.5) следует, что v появляется как решение задачи Дирихле для оператора $-\Delta$ при $v|_{\Gamma} = 0$. Так как область Ω выпукла, то $v \in H^2(\Omega)$ ([2], с. 373), а следовательно, $v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Используя (2.4) для $\mu \in H_0^1(\Omega)$, получим $-\Delta v = \psi$. А используя ту же формулу Грина для $\mu \in H^1(\Omega)$, найдем $\frac{\partial v}{\partial n}\big|_{\Gamma} = \alpha$.

Пусть верно (2.3). Покажем, что $(v,\psi,\alpha) \in P(\Omega)$. Так как $v \in V(\Omega) \subset H^2(\Omega)$ и $-\Delta v = \psi$, $\frac{\partial v}{\partial n}\big|_{\Gamma} = \alpha$, то непосредственно из (2.4) получаем

$$\int_{\Omega} \nabla v \nabla \mu\, d\Omega = \int_{\Omega} \psi\mu\, d\Omega + \int_{\Gamma} \alpha\mu\, ds \quad \forall \mu \in H^1(\Omega),$$

т. е. $\beta[(v,\psi,\alpha),\mu] = 0 \quad \forall \mu \in H^1(\Omega)$. Кроме того, $v \in V(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$.

[1] Здесь и далее $|v|_{m,\Omega} = \Big(\sum\limits_{|k|=m}\int\limits_{\Omega} |\partial^k v|^2 d\Omega\Big)^{1/2}$, а $\|v\|_{m,\Omega} = \Big(\sum\limits_{|k|\le m}\int\limits_{\Omega} |\partial^k v|^2 d\Omega\Big)^{1/2}$.

Докажем первое утверждение. Гильбертово пространство $P(\Omega)$ снабжено нормой произведения. Если $(v,\psi,\alpha)\in P(\Omega)$, то, как было показано выше, $v\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$. Из условия $\beta[(v,\psi,\alpha),\mu]=0$ при $\mu=v$ следует

$$|v|_{1,\Omega}^2\le C_1|\psi|_{0,\Omega}|v|_{0,\Omega}. \tag{2.6}$$

Введем подпространство $M\subset H^1(\Omega)$ такое, что можно записать прямую сумму $H^1(\Omega)=H_0^1(\Omega)\oplus M$. Кроме того, введем оператор $B: H^1(\Omega)\to L^2(\Gamma)$, определяемый следующим образом: $\alpha=B\psi\in L^2(\Gamma)$ для $\psi\in L^2(\Omega)$ является единственным решением уравнения

$$\int_\Gamma \alpha\mu\,ds=\int_\Omega \nabla v\nabla\mu\,d\Omega-\int_\Omega\psi\mu\,d\Omega\ \ \forall\mu\in M \tag{2.7}$$

при условии, что $v\in H_0^1(\Omega)$ удовлетворяет уравнению

$$\int_\Omega \nabla v\nabla\mu\,d\Omega=\int_\Omega\psi\mu\,d\Omega\ \ \forall\mu\in H_0^1(\Omega).$$

Легко проверить, что $B\psi=-B\Delta v=\frac{\partial v}{\partial n}\big|_\Gamma$ в силу условий теоремы, т. е. B является оператором внешней нормальной производной для $v\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$.

Этот оператор ограничен, т. к. $v\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$. Обозначим его норму через $\|B\|$. Тогда $\|B\|=\sup\limits_{v\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)}\frac{\left\|\frac{\partial v}{\partial n}\right\|_{0,\Gamma}}{|\Delta v|_{0,\Omega}}$, где $\|\cdot\|_{0,\Gamma}$ — норма, ассоциируемая со скалярным произведением

$$(\alpha,\beta)_{L^2(\Gamma)}=\int_\Gamma\alpha\beta\,ds.$$

Таким образом, $\|\alpha\|_{0,\Gamma}\le\|B\|\,|\psi|_{0,\Omega}$ для $\psi\in L^2(\Omega)$. Отсюда с учетом (2.6) получаем

$$(\|v\|_{1,\Omega}+\|\psi\|_{0,\Omega}+\|\alpha\|_{0,\Gamma})\le C_2\|\psi\|_{0,\Omega}.\quad\square$$

Этот результат позволяет перейти от минимизации функционала (1.4) на пространстве $V(\Omega)$ к минимизации функционала (2.1) на пространстве $P(\Omega)$.

Теорема 2. *Пусть $w\in V(\Omega)$ — решение задачи (1.4), тогда*

$$\Phi\left(w,-\Delta w,\frac{\partial w}{\partial n}\right)\to\inf_{(v,\psi,\alpha)\in P(\Omega)}\Phi(v,\psi,\alpha). \tag{2.8}$$

При этом тройка $(w,-\Delta w,\frac{\partial w}{\partial n})\in P(\Omega)$ является единственным решением задачи минимизации (2.8).

Доказательство. Докажем, что симметричная билинейная форма

$$a[(v,\psi,\alpha),(u,\varphi,\beta)]=\int_\Omega\psi\varphi\,d\Omega-(1-\eta)\int_\Gamma\chi\,d\beta\,ds,\quad (v,\psi,\alpha),(u,\varphi,\beta)\in P(\Omega)$$

непрерывна и эллиптична на $P(\Omega)$.

Согласно теореме 1, если $(v,\psi,\alpha),(u,\varphi,\beta)\in P(\Omega)$, то $-\Delta v=\psi$, $\frac{\partial v}{\partial n}\big|_\Gamma=\alpha$ и $-\Delta u=\varphi$, $\frac{\partial u}{\partial n}\big|_\Gamma=\beta$. Тогда имеем

$$a[(v,\psi,\alpha),(u,\varphi,\beta)]=\int_\Omega\Delta v\Delta u\,d\Omega-(1-\eta)\int_\Gamma\frac{\partial v}{\partial n}\frac{\partial u}{\partial n}ds. \tag{2.9}$$

При $u=v$, $\varphi=\psi$ и $\beta=\alpha$ из (2.9) получаем ([2], с. 38)

$$a[(v,\psi,\alpha),(v,\psi,\alpha)]=\int_\Omega\left[\left(\frac{\partial^2v}{\partial x^2}\right)^2+2\eta\frac{\partial^2v}{\partial x^2}\frac{\partial^2v}{\partial y^2}+\left(\frac{\partial^2v}{\partial y^2}\right)^2+2(1-\eta)\left(\frac{\partial^2v}{\partial x\partial y}\right)\right]d\Omega\ge\eta|\psi|_{0,\Omega}^2.$$

Этим P-эллиптичность доказана. Непрерывность билинейной формы очевидна. $\square$

Из теоремы 2 следует, что задача минимизации

$$\Phi(v^*, \psi^*, \alpha^*) = \inf_{(u,\varphi,\beta)\in P(\Omega)} \Phi(u, \varphi, \beta) \tag{2.10}$$

имеет решение и притом единственное. Установим связь между решениями задач (2.10) и (1.1), (1.2). Если $(v^*, \psi^*, \alpha^*) \in P(\Omega)$ — решение задачи (2.10), то должны выполняться следующие условия:

$$\int_\Omega \psi^* \varphi \, d\Omega - \int_\Omega uq \, d\Omega - (1-\eta) \int_\Gamma \chi \alpha^* \beta \, ds = 0 \quad \forall (u, \varphi, \beta) \in P(\Omega). \tag{2.11}$$

Так как $(v^*, \psi^*, \alpha^*) \in P(\Omega)$, то $-\Delta v^* = \psi^*$, $\frac{\partial v^*}{\partial n}\big|_\Gamma = \alpha^*$ и $v^* \in V(\Omega)$. С учетом этого из (2.11) получаем

$$\int_\Omega \Delta v^* \Delta u \, d\Omega - (1-\eta) \int_\Gamma \chi \frac{\partial v^*}{\partial n} \frac{\partial u}{\partial n} ds = \int_\Gamma uq \, ds.$$

Таким образом, v^* совпадает с решением w задачи (1.1), (1.2) и $\psi^* = -\Delta w$, $\alpha^* = \frac{\partial w}{\partial n}\big|_\Gamma$.

Замечание. Так как область выпукла и ее граница регулярна, то при $q \in H^{-1}(\Omega)$ решение w задачи (1.1), (1.2) принадлежит $H^3(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, и $\Delta w \in H^1(\Omega)$.

3. Решение задачи (2.10)**.** Покажем, что решение задачи может быть сведено к решению последовательности задач Дирихле для оператора $-\Delta$.

Для дальнейшего изложения удобно ввести линейное отображение $A : L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ следующим образом: если задана функция $\psi \in L^2(\Omega)$, то функция $v = A\psi \in H_0^1(\Omega)$ — единственное решение уравнения

$$v \in H_0^1(\Omega) \int_\Omega \nabla v \nabla \mu \, d\Omega = \int_\Omega \psi \mu \, d\Omega \quad \forall \mu \in H_0^1(\Omega).$$

С учетом этого пространство $P(\Omega)$, определенное в (2.2), может быть записано в виде

$$P(\Omega) = \{(v, \psi, \alpha) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma) \mid v = A\psi, \ \alpha = B\psi\}.$$

Задача (2.10) теперь эквивалентна следующей задаче оптимального управления:

$$\min_{\psi \in L^2(\Omega)} \left[\frac{1}{2} \int_\Omega |\psi|^2 d\Omega - \int_\Omega qv \, d\Omega - \frac{1-\eta}{2} \int_\Gamma \chi |\alpha|^2 ds \right], \tag{3.1}$$

где состояния v и α связаны с управлением $\psi \in L^2(\Omega)$ посредством уравнений состояния

$$v \in H_0^1(\Omega), \quad v = A\psi; \quad \alpha \in L^2(\Gamma), \quad \alpha = B\psi. \tag{3.2}$$

Как следует из замечания, хотя оптимальное управление ψ ищется на $L^2(\Omega)$, на самом деле его регулярность выше при $q \in H^{-1}(\Omega)$, $\psi \in H^1(\Omega)$. В этом случае определен след $\psi|_\Gamma = \lambda$, $\lambda \in M$.

В дальнейшем будем считать

$$\int_\Omega \nabla \psi_\lambda \nabla \mu \, d\Omega = \int_\Omega q\mu \, d\Omega \quad \forall \mu \in H_0^1(\Omega),$$
$$\psi_\lambda - \lambda \in H_0^1(\Omega).$$

Если $v_\lambda = A\psi_\lambda$ и $\alpha_\lambda = B\psi_\lambda$, то из (3.1) следует

$$\min_{\psi \in L^2(\Omega)} \Phi(v, \psi, \alpha) = \min_{\lambda \in M} D(\lambda), \tag{3.3}$$

где

$$D(\lambda) = -\frac{1}{2} \int_\Omega |\psi_\lambda|^2 d\Omega - \int_\Gamma \lambda \alpha_\lambda \, ds - \frac{1-\eta}{2} \int_\Gamma \chi |\alpha_\lambda|^2 ds \quad \forall \lambda \in M.$$

Основная идея предлагаемого в данной статье итерационного процесса состоит в применении градиентного метода к задаче минимизации (3.3).

Пусть, как обычно, M' — двойственное пространство для пространства M, а $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — отношение двойственности между пространствами M и M'. Обозначим через $D' \in M'$ производную функционала $D(\lambda)$. Введем отображение $S : M \to H^1(\Omega)$ следующим образом: для $\lambda \in M$ $\mathring{\varphi}_\lambda = S(\lambda)$ — единственная функция из $H^1(\Omega)$, удовлетворяющая соотношению

$$\int_\Omega \nabla\mathring{\varphi}_\lambda \nabla\mu \, d\Omega = 0 \quad \forall \mu \in H_0^1(\Omega), \tag{3.4}$$
$$\mathring{\varphi}_\lambda - \lambda \in H_0^1(\Omega).$$

Теорема 3. *Для любого $\lambda \in M$ функционал $D(\lambda)$ дифференцируем, и его производная определяется соотношением*

$$\langle D'(\lambda), \mu\rangle = \int_\Omega \mathring{\varphi}_\theta \mathring{\varphi}_\mu d\Omega \quad \forall \mu \in M,$$

где $\mathring{\varphi}_\mu = S(\mu)$, $\mathring{\varphi}_\theta = S(\theta_\lambda)$ и

$$\theta_\lambda = \lambda + (1-\eta)\chi\alpha_\lambda, \quad \theta_\lambda \in M. \tag{3.5}$$

Доказательство. Дифференцируя (3.3), получим

$$\langle D'(\lambda), \mu\rangle = -\int_\Omega \psi_\lambda \mathring{\varphi}_\mu d\Omega - \int_\Gamma \alpha_\lambda \mu \, d\Omega - \int_\Gamma (\lambda + (1-\eta)\chi\alpha_\lambda)\mathring{\beta}_\mu ds, \tag{3.6}$$

где $\mathring{\varphi}_\mu = S(\mu)$, $\mathring{\beta}_\mu = B\mathring{\varphi}_\mu$. Из (3.6) с учетом (2.7) получаем

$$\langle D'(\lambda), \mu\rangle = -\int_\Omega \nabla v_\lambda \nabla\mathring{\varphi}_\mu d\Omega - \int_\Gamma (\lambda + (1-\eta)\chi\alpha_\lambda)\mathring{\beta}_\mu ds. \tag{3.7}$$

Первое слагаемое в (3.7) равно нулю в силу (3.4). Введем функцию $\mathring{\varphi}_\theta = S(\theta_\lambda)$, где θ_λ определяется по (3.5), и обозначим $\mathring{u}_\mu = A\mathring{\varphi}_\mu$. Тогда из (3.7) следует

$$\langle D'(\lambda), \mu\rangle = \int_\Omega \mathring{\varphi}_\theta \mathring{\varphi}_\mu d\Omega - \int_\Omega \nabla\mathring{\varphi}_\theta \nabla\mathring{u}_\mu d\Omega.$$

Однако последнее слагаемое в этом равенстве равно нулю в силу (3.4). □

Градиентный метод для задачи (3.3) состоит в определении последовательности $\{\lambda_n\}_{n=0}^\infty$ функций $\lambda^n \in M$ по итерационной схеме

$$(\lambda^{n+1} - \lambda^n, \mu)_M = -\rho_n \langle D'(\lambda^n), \mu\rangle \quad \forall \mu \in M, \tag{3.8}$$

где $(\cdot,\cdot)_M$ — произвольное скалярное произведение в пространстве M, ρ — положительный параметр, λ^0 — произвольная функция из M.

Таким образом, одна итерация (3.8) равносильна последовательному решению следующих задач:

а) для заданной функции $\lambda^n \in M$ найти (единственную) функцию $\psi^n \in H^1(\Omega)$, удовлетворяющую соотношениям

$$\psi^n - \lambda^n \in H_0^1(\Omega), \tag{3.9}$$
$$\int_\Omega \nabla\psi^n \nabla\mu \, d\Omega = \int_\Omega q\mu \, d\Omega \quad \forall \mu \in H_0^1(\Omega); \tag{3.10}$$

б) найти функцию $v^n \in H_0^1(\Omega)$, удовлетворяющую соотношению

$$\int_\Omega \nabla v^n \nabla\mu \, d\Omega = \int_\Omega \psi^n \mu \, d\Omega \quad \forall \mu \in H_0^1(\Omega); \tag{3.11}$$

в) найти функцию $\alpha^n \in L^2(\Gamma)$, удовлетворяющую соотношению

$$\int_\Gamma \alpha^n \mu \, ds = \int_\Omega \nabla v^n \nabla \mu \, d\Omega - \int_\Omega \psi^n \mu \, d\Omega \quad \forall \mu \in M; \tag{3.12}$$

г) найти функцию $\lambda^{n+1} \in M$, удовлетворяющую соотношению

$$(\lambda^{n+1} - \lambda^n, \mu)_M = -\rho \int_\Omega \mathring{\varphi}_\theta^n \mathring{\varphi}_\mu d\Omega \quad \forall \mu \in M, \tag{3.13}$$

где $\mathring{\varphi}_\theta^n = S\theta_\lambda^n$, $\theta_\lambda^n = \lambda^n - (1-\eta)\chi B\psi^n$ и $\mathring{\varphi}_\mu = S\mu$. □

Покажем, что при соответствующем выборе параметра $\rho > 0$ итерационный процесс (3.9)–(3.13) является сходящимся для любого начального приближения. Сначала определим отображение $C : H^1(\Omega) \to M$ следующим образом: для всякой функции $\psi \in H^1(\Omega)$ функция $C\psi \in M$ — единственная функция, удовлетворяющая соотношению

$$(C\psi, \mu)_M = \int_\Omega \psi \mathring{\varphi}_\mu d\Omega \ \ \forall \mu \in M. \tag{3.14}$$

Положим

$$\|C\| = \sup_{\psi \in H^1(\Omega)} \frac{|C\psi|_\mu}{|\psi|_{0,\Omega}},$$

где $|\cdot|_M$ — норма, ассоциируемая со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_M$. Ясно, что эта норма существует, т. к. отображение $\mu \in M \to \mathring{\varphi}_\mu \in H^1(\Omega)$ ограничено.

Теорема 4. *Если параметр ρ удовлетворяет условию*

$$0 < \rho < \frac{2\eta}{\|C\|^2(1-(1-\eta)|\chi|_{L^\infty(\Omega)}\|S\|\,\|B\|)^2}, \tag{3.15}$$

то итерационный процесс (3.9)–(3.13) является сходящимся в том смысле, что

$$\lim_{n\to\infty} \psi^n = \psi \quad \text{в} \quad L^2(\Omega),$$
$$\lim_{n\to\infty} v^n = v \quad \text{в} \quad H_0^1(\Omega),$$
$$\lim_{n\to\infty} \alpha^n = \alpha \quad \text{в} \quad L^2(\Gamma).$$

Доказательство. Достаточно показать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \psi^n = 0$ в $L^2(\Omega)$ в частном случае, когда $q = 0$. Если использовать определение (3.14) отображения C, то рекуррентное соотношение (3.13) дает

$$\lambda^{n+1} = \lambda^n - \rho C\mathring{\varphi}_\theta^n,$$

где $\mathring{\varphi}_\theta^n = S\theta_\lambda^n$, $\theta_\lambda^n = \lambda^n + (1-\eta)\chi B\psi^n$. Отсюда получаем

$$|\lambda^{n+1}|_M^2 = |\lambda^n|_M^2 - 2\rho(C\mathring{\varphi}_\theta^n, \lambda^n)_M + \rho^2 |C\mathring{\varphi}_\theta^n|_M^2. \tag{3.16}$$

Оценим

$$(C\mathring{\varphi}_\theta^n, \lambda^n)_M = \int_\Omega \mathring{\varphi}_\theta^n \psi^n d\Omega = -\int_\Gamma (\lambda^n + (1-\eta)\chi B\psi^n) B\psi^n ds =$$
$$= \int_\Omega |\psi^n|^2 d\Omega - (1-\eta)\int_\Gamma \chi |B\psi^n|^2 ds \geq v|\psi^n|_{0,\Omega}^2.$$

Оценим далее

$$|\mathring{\varphi}_\theta^n|_{0,\Omega} = |S(\lambda_n + (1-\eta)\chi B\psi^n)|_{0,\Omega} \leq |\psi^n|_{0,\Omega} + (1-\eta)\|S\|\,|\chi|_{L^\infty(\Omega)}\|B\|\,|\psi^n|_{0,\Omega} \leq$$
$$\leq (1 + (1-\eta)|\chi|_{L^\infty(\Omega)}\|S\|\,\|B\|)|\psi^n|_{0,\Omega}.$$

С учетом этих неравенств из (3.16) получаем

$$|\lambda^{n+1}|^2_M - |\lambda^n|^2_M \leq -\rho[2\eta - \|C\|^2(1 + (1-\eta)|\chi|_{L^\infty(\Omega)}\|S\|\,\|B\|)^2\rho]|\psi^n|^2_{0,\Omega}.$$

Отсюда, в частности, следует $\lim\limits_{n\to\infty} |\psi^n|^2_{0,\Omega} = 0$, если ρ удовлетворяет неравенствам (3.15). Кроме того, имеем $\lim\limits_{n\to\infty} v^n = \lim\limits_{n\to\infty} A\psi^n = 0$ в $H^1_0(\Omega)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha^n = \lim\limits_{n\to\infty} B\psi^n = 0$ в $L^2(\Gamma)$. $\square$

Сходимость рассматриваемого метода гарантируется, таким образом, для всякого выбора подпространства M, удовлетворяющего условию $H^1(\Omega) = H^1_0(\Omega) \oplus M$ и всякого выбора скалярного произведения $(\cdot,\cdot)_M$ на пространстве M. Однако от их выбора зависит как величина ρ, так и объем вычислений на каждой итерации.

В заключение приведем несколько замечаний относительно практического вычисления $\lambda^{n+1} \in M$.

Если скалярное произведение в M определить по формуле

$$(\lambda,\mu)_M = \int_\Omega S\lambda \cdot S\mu\, d\Omega,$$

то в качестве λ^{n+1} может быть взята любая функция из M, удовлетворяющая условию

$$\lambda^{n+1}|_\Gamma = (\lambda^n - \rho\theta^n_\lambda)|_\Gamma. \tag{3.17}$$

Равенство (3.17) следует понимать в смысле равенства следов на границе. Действительно, если выполнено (3.17), то

$$(\lambda^{n+1} - \lambda^n, \mu)_M = -\rho\int_\Omega S\theta^n S\mu\, d\Omega = -\rho\int_\Omega \mathring{\varphi}^n_\theta \mathring{\varphi}_\mu d\Omega,$$

т. е. выполнены условия теоремы 3.

В качестве скалярного произведения могут быть выбраны также $(\lambda,\mu)_M = \int\limits_\Omega \nabla\lambda\nabla\mu\, d\Omega$ или $(\lambda,\mu)_M = \int\limits_\Omega \lambda\mu\, d\Omega$. Однако в этом случае необходимо вычислить на каждом шаге градиент $\langle D'(\lambda),\mu\rangle$, что связано с дополнительными вычислительными затратами.

Литература

1. Крысько В.А., Павлов С.П. *Об одном итерационном методе решения уравнений гибких пологих оболочек* // Тр. 16-й Межд. конф. по теории оболочек и пластин. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1996, – С. 157–162.
2. Сьярле Ф. *Метод конечных элементов для эллиптических задач.* – М.: Мир, 1980. – 512 с.
3. Babuska I., Rozenzweid M.B. *A finite element scheme for domains with corners* // Numer. Math. – 1972. – № 20. – P. 1–21.
4. Стренг Г., Фикс Дж. *Теория метода конечных элементов.* – М.: Мир, 1977. – 349 с.
5. Михлин С.Г. *Вариационные методы в математической физике.* – М.: Наука, 1970. – 512 с.

Саратовский государственный технический университет

Поступила 07.03.2002