ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1997 МАТЕМАТИКА № 10 (425)

УДК 517.518

В.Э. ГЕЙТ

ОБ АППРОКСИМАЦИОННЫХ СВОЙСТВАХ ВЫСШИХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Каждая монотонно убывающая к нулю последовательность $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ задает класс F_C непрерывных на $(-\infty,+\infty)$ периода 2π функций f, наилучшие тригонометрические приближения которых удовлетворяют условию $E_n(f)\le F_n$ $(n=0,1,\dots)$. Будем говорить, что порядок величины α_n есть β_n и писать $\alpha_n\sim\beta_n$, если $\alpha_n=O(\beta_n)$ и $\beta_n=O(\alpha_n)$.

Теорема 1. *Для произвольно заданного r $(=1,2,\dots)$ и любой последовательности $F_n\downarrow 0$ $(n\uparrow\infty)$ по функциям $f\in F_C$ имеем*

$$\sup E_n(f^{(r)})\sim n^rF_n+\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{r-1}F_\nu$$

в предположении сходимости указанного ряда.

Доказательство. Пусть $f\in F_C$ и ряд $\sum\nu^{r-1}E_\nu(f)<+\infty$ сходится, тогда (напр., [1], с. 488) r-я производная $f^{(r)}$ непрерывна, причем

$$E_n(f^{(r)})=O\Big(n^rE_n(f)+\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{r-1}E_\nu(f)\Big). \tag{1}$$

Отсюда по функциям f класса F_C имеем с очевидностью

$$\sup E_n(f^{(r)})=O\Big(n^rF_n+\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{r-1}F_\nu\Big). \tag{2}$$

Обратное к (2) O-соотношение докажем следующим образом. По данному r $(=1,2,\dots)$ и последовательности $F_n\downarrow 0$, полагая $\Delta F_{\nu-1}=F_{\nu-1}-F_\nu$ $(\nu=1,2,\dots)$, рассмотрим функцию вида

$$f(x)=f_{r,F}(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\Delta F_{\nu-1}\cos\Big(\nu x+r\frac{\pi}{2}\Big). \tag{3}$$

Так как уклонение функции (3) от ее частичной суммы $S_n(f,x)$ есть

$$f(x)-S_n(f,x)=\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\Delta F_{\nu-1}\cos\Big(\nu x+r\frac{\pi}{2}\Big),$$

то из-за предположения $F_\nu\downarrow 0$ будем иметь

$$E_n(f)\le\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\Delta F_{\nu-1}=F_n\quad (n=0,1,\dots). \tag{4}$$

В силу сходимости ряда (3) к $f\in F_C$ нетрудно видеть, что r-я производная функции (3) непрерывна, причем

$$f^{(r)}(x)=(-1)^r\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu^r\Delta F_{\nu-1}\cos\nu x. \tag{5}$$

Поскольку коэффициенты из (5) неотрицательны, то по теореме Ченя [2] будем иметь

$$\|f^{(r)} - S_n(f^{(r)})\|_C = O(E_n(f^{(r)})).$$

Отсюда ввиду (5)

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^r \Delta F_{\nu-1} = O(E_n(f^{(r)})). \tag{6}$$

Но для левой части в (6) имеем последовательно

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^r \Delta F_{\nu-1} > \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \Delta F_{\nu-1} \left(\sum_{j=1}^{n} j^{r-1} + \sum_{j=n+1}^{\nu} j^{r-1} \right) = F_n \sum_{j=1}^{n} j^{r-1} + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \Delta F_{\nu-1} \sum_{j=n+1}^{\nu} j^{r-1} >$$
$$> r^{-1} F_n n^r + \sum_{j=n+1}^{\infty} j^{r-1} F_{j-1} \geq r^{-1} \left(n^r F_n + \sum_{j=n+1}^{\infty} j^{r-1} F_j \right).$$

Последнее неравенство совместно с (6), а также с (4) доказывает, что

$$n^r F_n + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{r-1} F_\nu = O(\sup E_n(f^{(r)})) \tag{7}$$

по функциям $f \in F_C$. Теорема 1 ввиду (2) и (7) доказана.

Ниже через $\tilde{f}$ обозначается тригонометрически сопряженная с f функция.

Теорема 2. *Пусть задано r $(= 1, 2, \dots)$ и последовательность $F_n \downarrow 0$ при $n \uparrow \infty$, тогда по функциям f класса F_C имеем*

$$\sup E_n(\tilde{f}^{(r)}) \sim n^r F_n + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{r-1} F_\nu \tag{8}$$

в предположении сходимости ряда в (8).

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 1.

Через $\omega_k(f, \delta)$ $(0 < \delta \leq \pi)$ будем далее обозначать k-й модуль непрерывности функции f (см., напр., [1], с. 487).

Теорема 3. *Для произвольно заданных натуральных r, k и последовательности $F_n \downarrow 0$ $(n \uparrow \infty)$ по функциям $f \in F_C$ имеем*

$$\sup \omega_k(f^{(r)}, n^{-1}) \sim \left(n^{-k} \sum_{\nu=1}^{k} \nu^{k+r-1} F_{\nu-1} + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{r-1} F_\nu \right)$$

в предположении сходимости указанного здесь ряда.

Доказательство. Ввиду соотношения (см., напр, [1], с. 490)

$$\omega_k(f^{(r)}, n^{-1}) = O\left(n^{-k} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k+r-1} E_{\nu-1}(f) + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{r-1} E_\nu(f) \right) \tag{9}$$

по функциям $f \in F_C$ имеем

$$\sup \omega_k(f^{(r)}, n^{-1}) = O\left(n^{-k} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k+r-1} F_{\nu-1} + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{r-1} F_\nu \right). \tag{10}$$

Из (7) и обобщенного неравенства Джексона имеем

$$n^r F_n + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{r-1} F_\nu = O(\sup \omega_k(f^{(r)}, n^{-1})). \tag{11}$$

После этого необходимо также показать, что первое слагаемое в (10) есть O от $\sup \omega_k(f^{(r)}, n^{-1})$ по классу F_C. Для этого по заданным k, r $(= 1, 2, \dots)$ и по данной последовательности $F_n \downarrow 0$ $(n \uparrow \infty)$ рассмотрим функцию

$$f(x) = f_{r,F,k}(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \Delta F_{\nu-1} \cos\Big(\nu x - (k+r)\frac{\pi}{2}\Big), \tag{12}$$

очевидно лежащую в классе F_C. Тогда из-за сходимости ряда $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \nu^{r-1} F_\nu$ r-я производная функции (12) непрерывна ([1], с. 488), причем легко видеть, что

$$f^{(r)}(x) = (-1)^r \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^r \Delta F_{\nu-1} \cos\Big(\nu x - k\frac{\pi}{2}\Big). \tag{13}$$

Так что при k нечетном (13) — это синус-ряд, а при k четном — косинус-ряд. В таком случае для оценки снизу k-го модуля непрерывности функции (13) применимо неравенство (23) леммы 3 работы автора ([3], с. 72), по которому

$$n^{-k} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k+r} \Delta F_{\nu-1} = O(\omega_k(f^{(r)}, n^{-1})). \tag{14}$$

Так как $\nu^{k+r} \geq \sum\limits_{j=1}^{\nu} j^{k+r-1}$, то сумма из левой части (14) превосходит величину

$$\sum_{\nu=1}^{n} \Delta F_{\nu-1} \sum_{j=1}^{\nu} j^{k+r-1} = \sum_{j=1}^{n} j^{k+r-1} \sum_{\nu=j}^{n} \Delta F_{\nu-1} = \sum_{j=1}^{n} j^{k+r-1}(F_{j-1} - F_n) > \sum_{j=1}^{n} j^{k+r-1} F_{j-1} - F_n n^{k+r}.$$

Поэтому для функции (12) имеем сначала первое O-соотношение

$$n^{-k} \sum_{j=1}^{n} j^{k+r-1} F_{j-1} = O(\omega_k(f^{(r)}, n^{-1})) + n^r F_n = O\Big(\sup_{f \in F_C} \omega_k(f^{(r)}, n^{-1})\Big),$$

а второе O-соотношение получается с учетом (11). □

Аналогично получается

Теорема 4. *Пусть заданы натуральные k, r и последовательность $F_n \downarrow 0$ $(n \uparrow \infty)$, тогда по функциям f класса F_C имеем*

$$\sup \omega_k(\tilde{f}^{(r)}, n^{-1}) \sim n^{-k} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k+r-1} F_{\nu-1} + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{r-1} F_\nu \tag{15}$$

при условии сходимости ряда в (15).

Далее, имея функцию $\omega(\delta) > 0$ $(0 < \delta \leq \pi)$ с условием $\underline{\lim}\, \omega(\delta) = 0$ при $\delta \to +0$, рассмотрим класс $H_l(\omega)$, состоящий из тех непрерывных на $(-\infty, +\infty)$ периода 2π функций f, у которых $\omega_l(f, \delta) \leq \omega(\delta)$ $(0 < \delta \leq \pi)$. Исправленную мажоранту порядка l функции $\omega(\delta)$ обозначим через $\omega_l^{**}(\delta)$ (см. [4]). Имеет место

Теорема 5. *Пусть заданы натуральные l, r и мажоранта $\omega(\delta)$, при которых сходится ряд*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{r-1} \omega_l^{**}(\nu^{-1}) < +\infty, \tag{16}$$

тогда при $\omega_l^{**}(\delta) \not\equiv 0$ необходимо $l > r$, причем

$$\sup E_n(f^{(r)}) \sim \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{r-1} \omega_l^{**}(\nu^{-1}), \quad f \in H_l(\omega), \tag{17}$$

кроме случая[1]*, когда оба l, r четные.*

Доказательство. Исключив сразу тривиальный случай $\omega_l^{**}(\delta) \equiv 0$ на $(0,\pi]$, согласно [4] будем иметь

$$0 < \omega_l^{**}(\delta) \downarrow 0 \quad (\delta \downarrow +0); \qquad \delta^{-l}\omega_l^{**}(\delta) \downarrow \quad (\delta \uparrow). \tag{18}$$

В частности, последовательность $\nu^l \omega_l^{**}(\nu^{-1})$ возрастает при $\nu \uparrow$, откуда очевидным является факт расходимости ряда (16) при $r \geq l$. Так как согласно ([1], с. 488)

$$E_n(f^{(r)}) = O\Big(n^r E_n(f) + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{r-1} E_\nu(f)\Big),$$

то по обобщенному неравенству Джексона $E_\nu(f) = O(\omega_l(f,\nu^{-1}))$ имеем

$$E_n(f^{(r)}) = O\Big(n^r \omega_l(f,n^{-1}) + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{r-1} \omega_l(f,\nu^{-1})\Big).$$

В силу общих свойств модулей непрерывности ([1], с. 487) нетрудно вывести, что первое слагаемое здесь есть O от второго, так что окончательно

$$E_n(f^{(r)}) = O\Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{r-1} \omega_l(f,\nu^{-1})\Big) \tag{19}$$

в предположении сходимости ряда в (19). Пусть теперь $f \in H_l(\omega)$, тогда, в частности, $\omega_l(f,\nu^{-1}) \leq \omega(\nu^{-1})$ $(\nu = 1,2,\dots)$ и согласно [4] выполнено также соотношение $\omega_l(f,\nu^{-1}) = O(\omega_l^{**}(\nu^{-1}))$. Поэтому в силу (19)

$$\sup E_n(f^{(r)}) = O\Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{r-1} \omega_l^{**}(\nu^{-1})\Big), \quad f \in H_l(\omega). \tag{20}$$

Получим теперь O-соотношение, обратное к (20), кроме случая, когда l, r оба четные. Пусть r нечетное, а l произвольное с условием $l > r \geq 1$. Рассмотрим функцию f_3 из работы автора [3] (см. там (38) при $k = l$ и $\varphi_\nu = \omega_l^{**}(\nu^{-1})$), т. е.

$$f_3(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^{(l)} \sin \nu x, \quad a_\nu^{(l)} = \varphi_\nu - \Big(1 - \frac{1}{\nu}\Big)^l \varphi_{\nu-1}. \tag{21}$$

В силу возрастания последовательности $\nu^l \varphi_\nu$ все $a_\nu^{(l)} \geq 0$ и $\omega_l(f_3,n^{-1}) = O(\omega_l^{**}(n^{-1}))$ согласно ([3], сс. 75, 76). Отсюда, как известно ([1], с. 487), $\omega_l(f,\delta) = O(\omega_l^{**}(\delta))$ $(0 < \delta \leq \pi)$. Поэтому при некотором $c > 0$ функция $cf_3 \in H_l(\omega)$. Вместе с тем r-я производная функции (21) при нечетном числе r есть

$$f_3^{(r)}(x) = \pm \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^r a_\nu^{(l)} \cos \nu x. \tag{22}$$

Значит, согласно [2] для наилучшего приближения функции (22) ввиду $a_\nu^{(l)} \geq 0$ имеем

$$\|f_3^{(r)} - S_n(f_3^{(r)})\| = O(E_n(f_3^{(r)})), \quad \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^r a_\nu^{(l)} = O(E_n(f_3^{(r)})). \tag{23}$$

Согласно ([3], с. 75, (40)) коэффициенты ряда (21) допускают представление

$$a_\nu^{(l)} = -\Delta\varphi_{\nu-1} + l\varphi_{\nu-1}/\nu + O(\varphi_{\nu-1}/\nu^2).$$

[1]Это ограничение со слов “кроме случая…”, как и в теоремах 6, 7, 8, устраняется леммой 1 [6]. Аналогично можно опустить последнюю строку теорем 9, 10.

Поэтому левая часть (23) имеет вид

$$-\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^r\Delta\varphi_{\nu-1}+l\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{r-1}\varphi_{\nu-1}+O\Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{r-2}\varphi_{\nu-1}\Big). \tag{24}$$

Для третьего слагаемого здесь очевидным является неравенство

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{r-2}\varphi_\nu\le\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{r-1}\varphi_{\nu-1}=o\Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{r-1}\varphi_{\nu-1}\Big). \tag{25}$$

Далее, т.к. $\nu^r\le r\sum\limits_{j=1}^{\nu}j^{r-1}$, то сумма из первых слагаемых в (24) допускает оценку сверху величиной

$$r\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\Delta\varphi_{\nu-1}\Big(\sum_{j=1}^{n}j^{r-1}+\sum_{j=n+1}^{\nu}j^{r-1}\Big)=$$

$$=r\Big(\sum_{j=1}^{n}j^{r-1}\Big)\varphi_n+r\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\Delta\varphi_{\nu-1}\sum_{j=n+1}^{\nu}j^{r-1}\le rn^r\varphi_n+r\sum_{j=n+1}^{\infty}j^{r-1}\varphi_{j-1}.$$

Соединяя (23)–(25), имеем для $l>r\ge 1$

$$(l+o(1)-r)\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{r-1}\varphi_{\nu-1}-rn^r\varphi_n=O(E_n(f_3^{(r)})).$$

Отсюда ввиду $cf_3\in H_l(\omega)$ по функциям $f\in H_l(\omega)$ получаем соотношение

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{r-1}\varphi_{\nu-1}=O(\sup E_n(f^{(r)})+n^r\varphi_n),\quad \varphi_\nu=\omega_l^{**}(\nu^{-1}). \tag{26}$$

Остается доказать, что

$$n^r\varphi_n=O(\sup E_n(f^{(r)})),\quad f\in H_l(\omega). \tag{27}$$

Но это ясно из рассмотрения функции $f_0(x)=\varphi_n\cos(n+1)x$, для которой очевидно имеем $\omega_l(f_0,m^{-1})=O(\varphi_m)$ и $E_n(f_0^{(r)})=n^r\varphi_n$. Сопоставляя (26), (27), где $\varphi_n=\omega_l^{**}(n^{-1})$, из (20) получим теорему 5 при r нечетном.

Пусть теперь r четное, тогда по предположению теоремы 5 данное l должно быть нечетным. В этом случае по заданной мажоранте $\omega(\delta)$ с $\omega_l^{**}(\delta)\not\equiv 0$ рассмотрим функцию f_0, которая получается из (3) доказательства теоремы 1 при $r=0$ и с заменой там F_ν на $\omega_l^{**}(\nu^{-1})$. Так как l нечетное, то по лемме 2 ([3], с. 71) имеем $\omega_l(f_0,n^{-1})=O(\omega_l^{**}(n^{-1}))$. С другой стороны, производная $f_0^{(r)}$ в силу четности r будет cos-рядом, для которого имеет место соотношение (6). Значит, поскольку $F_\nu=\omega_l^{**}(\nu^{-1})$,

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{r-1}\omega_l^{**}(\nu^{-1})=O(E_n(f_0^{(r)}))$$

(см. текст, сопровождающий (6) в доказательстве теоремы 1). Теорема 5 доказана.

Отправляясь теперь от неравенства (1.7) из ([1], с. 488) и привлекая соответствующим образом средства, уже использованные при доказательстве оценок снизу в теореме 5, получим ее аналог для сопряженных функций в следующем виде.

Теорема 6. *Пусть заданы натуральные $l>r$ и мажоранта $\omega(\delta)$ с $\omega_l^{**}(\delta)\not\equiv 0$, тогда кроме случая четного l при r нечетном имеем*

$$\sup E_n(\tilde f^{(r)})\sim\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{r-1}\omega_l^{**}(\nu^{-1}),\quad f\in H_l(\omega),$$

в предположении сходимости указанного здесь ряда.

Теорема 7. *Пусть заданы натуральные k, l, r и мажоранта $\omega(\delta)$ с $\omega_l^{**}(\delta)\not\equiv 0$, причем $k+r>l>r$, тогда кроме случая, когда r, l оба четные, имеем*

$$\sup\omega_k(f^{(r)},n^{-1})\sim\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{r-1}\omega_l^{**}(\nu^{-1}),\quad f\in H_l(\omega),\tag{28}$$

при условии сходимости ряда в (28).

Доказательство. Сопоставляя на этот раз обобщенное неравенство Джексона $E_\nu(f)=O(\omega_l(f,\nu^{-1}))$ с соотношением (9), получим

$$\omega_k(f^{(r)},n^{-1})=O\Big(n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k+r-1}\omega_l(f,\nu^{-1})+\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{r-1}\omega_l(f,\nu^{-1})\Big).\tag{29}$$

Пусть $f\in H_l(\omega)$, тогда $\omega_l(f,\nu^{-1})=O(\omega_l^{**}(\nu^{-1}))$ [4], поэтому для таких f имеем

$$\omega_k(f^{(r)},n^{-1})=O\Big(n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k+r-1}\omega_l^{**}(\nu^{-1})+\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{r-1}\omega_l^{**}(\nu^{-1})\Big).\tag{30}$$

Так как по (18) последовательность $\nu^l\omega_l^{**}(\nu^{-1})$ не убывает при возрастании $\nu\uparrow\infty$, то для первого слагаемого в (30) при $k+r>l$ будем иметь последовательно

$$n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k+r-l-1}\nu^l\omega_l^{**}(\nu^{-1})\le n^{-k}n^l\omega_l^{**}(n^{-1})\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k+r-l-1}=O(n^r\omega_l^{**}(n^{-1})).$$

Нетрудно показать далее, что величина $n^r\omega_l^{**}(n^{-1})$ есть O от второго слагаемого в (30)[1]. Поэтому при $k+r>l$

$$\sup\omega_k(f^{(r)},n^{-1})=O\Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{r-1}\omega_l^{**}(\nu^{-1})\Big),\quad f\in H_l(\omega),\tag{31}$$

в предположении сходимости этого ряда и независимо от четности r, l.

Если же исключить случай, когда r, l оба четные, то по теореме 5 и благодаря обобщенному неравенству Джексона имеем обратное к (31) соотношение. □

Отправляясь на этот раз от неравенства (1.19) из ([1], с. 492), имеем

$$\omega_k(\tilde f^{(r)},n^{-1})=O\Big(n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k+r-1}\omega_l(f,\nu^{-1})+\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{r-1}\omega_l(f,\nu^{-1})\Big),\tag{32}$$

где $l>r$. Как и выше (см. сноску), преобразуем (32) при $k+r>l$ к виду

$$\omega_k(\tilde f^{(r)},n^{-1})=O\Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{r-1}\omega_l(f,\nu^{-1})\Big).\tag{33}$$

Отсюда и при помощи приведенной выше теоремы 6 получается следующая теорема для сопряженных функций.

Теорема 8. *Пусть заданы натуральные k, l, r и мажоранта $\omega(\delta)$ с $\omega_l^{**}(\delta)\not\equiv 0$, причем $k+r>l>r$. Тогда, кроме случая, когда l четное, а r нечетное, имеем*

$$\sup\omega_k(\tilde f^{(r)},n^{-1})\sim\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{r-1}\omega_l^{**}(\nu^{-1}),\quad f\in H_l(\omega),$$

в предположении сходимости указанного здесь ряда.

[1] Аналогично устраняется первое слагаемое и в (29) для $k+r>l$.

Условия на k, l, r в нижеследующих теоремах таковы, что доказательства не потребуют привлечения новых средств, кроме уже использованных выше. Поэтому уместно ограничиться здесь одними лишь формулировками теорем.

Теорема 9. *Пусть заданы натуральные* k, l, r *и мажоранта* $\omega(\delta)$, *причем* $k + r \le l$ *и сходится ряд в* (34), *тогда*

$$\sup \omega_k(f^{(r)}, n^{-1}) \sim n^{-k} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k+r-1} \omega_l^{**}(\nu^{-1}) + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{r-1} \omega_l^{**}(\nu^{-1}), \quad f \in H_l(\omega), \tag{34}$$

в случаях: (a) *оба числа* l, k *четные при* r *нечетном*; (b) l *нечетное, а* $k + r$ *четное.*

Теорема 10. *Пусть заданы натуральные* k, l, r *и мажоранта* $\omega(\delta)$, *причем* $k + r < l$ *и сходится ряд в* (35), *тогда*

$$\sup \omega_k(\tilde{f}^{(r)}, n^{-1}) \sim n^{-k} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k+r-1} \omega_l^{**}(\nu^{-1}) + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{r-1} \omega_l^{**}(\nu^{-1}), \quad f \in H_l(\omega), \tag{35}$$

в случаях: (a) *числа* l, r, k *все четные*; (b) *оба числа* l, $k + r$ *нечетные.*

Замечание. Задача о порядке рассматривавшихся здесь величин имеет отчасти смысл и при $r = 0$. Соответствующие случаи подробно изучались автором в работе [5], где излагается также история данного вопроса.

Литература

1. Бари Н.К., Стечкин С.Б. *Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций* // Тр. Моск. матем. о-ва. – 1956. – Т. 5. – С. 483–522.
2. Чень Тянь-Пинь. *О тригонометрических рядах со знакоопределенными коэффициентами* // Acta scient. natur. Univ. Fudan. – 1966. – V. 11. – № 1. – P. 1–6.
3. Гейт В.Э. *Теоремы вложения для некоторых классов периодических непрерывных функций* // Изв. вузов. Математика. – 1972. – № 4. – С. 67–77.
4. Стечкин С.Б. *Об абсолютной сходимости рядов Фурье* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1955. – Т. 19. – № 4. – С. 221–246.
5. Гейт В.Э. *Структурные и конструктивные свойства функции и ее сопряженной*: Дис. ... канд. физ.-матем. наук. – Свердловск, 1970. – 148 с.
6. Гейт В.Э. *Об условиях вложения классов* $H^{\omega}_{k,R}$ *и* $\widetilde{H}^{\omega}_{k,R}$ // Матем. заметки. – 1973. – Т. 13. – № 2. – С. 169–178.

Челябинский государственный университет

Поступила
24.01.1995