ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 6 (457)

УДК 517.54

Л.В. КОВАЛЕВ

О ВНУТРЕННИХ РАДИУСАХ СИММЕТРИЧНЫХ НЕНАЛЕГАЮЩИХ ОБЛАСТЕЙ

Многие экстремальные проблемы для классов аналитических функций сводятся к задачам о неналегающих областях (напр., [1], с. 552–554; [2]; обзор новых результатов в этом направлении имеется в [3]). Пусть D — область комплексной сферы $\overline{\mathbb{C}}$. Обозначим через $g_D(z, z_0)$ функцию Грина области D с полюсом z_0; внутренний радиус D относительно z_0

$$r(D, z_0) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \exp\big[\lim\limits_{z\to z_0}(g_D(z,z_0)+\log|z-z_0|)\big], & z_0\neq\infty; \\ \exp\big[\lim\limits_{z\to z_0}(g_D(z,z_0)-\log|z|)\big], & z_0=\infty. \end{cases}$$

Положим $D^* \stackrel{\text{def}}{=} \{z : 1/\overline{z} \in D\}$.

Работа посвящена решению следующей задачи, поставленной в обзорной статье [4]. Пусть B_k, $k = 0, \dots, n$, — попарно неналегающие области в $\overline{\mathbb{C}}$, $a_k \in B_k$. Найти точную верхнюю грань произведения $\prod\limits_{k=0}^{n} r(B_k, a_k)$ при условиях $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $B_k = B_k^*$, $k = 1, \dots, n$. Данная постановка усиливает задачу Бахтиной [5], где предполагалась односвязность областей B_k и выполнялось условие $B_0 \subset \{z : |z| < 1\}$; при этих предположениях в [5] была получена качественная характеристика экстремальной конфигурации в терминах квадратичных дифференциалов ([6], с. 48).

Теорема. *Пусть $B_0, \dots, B_n$ $(n > 2)$ — неналегающие области в $\overline{\mathbb{C}}$; $a_k \in B_k$, $k = 0, \dots, n$; $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = 1, \dots, n$; $B_k = B_k^*$, $k = 1, \dots, n$. Тогда*

$$\prod_{k=0}^{n} r(B_k, a_k) \le \frac{2^{2n+1/n}}{(n^2-2)^{n/2+1/n}} \left(\frac{n-\sqrt{2}}{n+\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}. \tag{1}$$

Если к тому же области B_k имеют классические функции Грина, то равенство в (1) достигается тогда и только тогда, когда точки a_k и области B_k являются соответственно полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала

$$Q(z)dz^2 = -\frac{(\alpha z)^{2n} + (2n^2-2)(\alpha z)^n + 1}{z^2((\alpha z)^n - 1)^2} dz^2, \quad |\alpha| = 1.$$

Схема доказательства. Пусть $a_k = \exp(i\theta_k)$, $0 = \theta_1 < \dots < \theta_n < \theta_{n+1} = 2\pi$, $\varphi_k = \theta_{k+1} - \theta_k$, $k = 1, \dots, n$. Рассмотрим два случая.

1. Предположим, что $\varphi_k \le \pi\sqrt{2}$, $k = 1, \dots, n$. Пусть $D_i = \{z : |z| < 1,\ \theta_i < \arg z < \theta_{i+1}\}$. Осуществим разделяющее преобразование [7] каждой области B_k относительно подходящего семейства функций, конформно отображающих области D_i, D_i^*, $i = 1, \dots, n$, на полуплоскость.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 99-01-00443) и Международной соросовской программы образования в области точных наук (грант s97-336).

Тем самым нахождение точной верхней грани левой части (1) сводится к оценке n произведений вида $r^a(G_1,\infty)r(G_2,2i)r(G_3,-2i)$, где G_1, G_2 и G_3 — неналегающие области в $\overline{\mathbb{C}}$. Оценивая указанные произведения с помощью теоремы 1 из [8] и исследуя полученное выражение на экстремум, приходим к неравенству (1).

2. Пусть для определенности $\varphi_n > \pi\sqrt{2}$. Повторяя доказательство теоремы 4 из [7] с учетом этого условия, получим для произведения $\prod\limits_{k=0}^{n} r(B_k,a_k)$ верхнюю оценку, строго меньшую правой части (1).

Утверждение о случае равенства нетрудно получить из соответствующего утверждения теоремы 5 из [7].

Литература

1. Голузин Г.М. *Геометрическая теория функций комплексного переменного.* – 2-е изд. – М.: Наука, 1966. – 628 с.
2. Лебедев Н.А. *Принцип площадей в теории однолистных функций.* – М.: Наука, 1975. – 336 с.
3. Кузьмина Г.В. *Методы геометрической теории функций.* II // Алгебра и анализ. – 1997. – Т. 9. – № 5. – С. 1–50.
4. Дубинин В.Н. *Симметризация в теории функций комплексного переменного* // УМН. – 1994. – Т. 49. – Вып. 1. – С. 3–76.
5. Бахтина Г.П. *О конформных радиусах симметричных неналегающих областей* // Современ. вопр. веществен. и комплексн. анализа. – Киев: Ин-т матем. АН УССР. – 1984. – С. 21–27.
6. Дженкинс Дж. *Однолистные функции и конформные отображения.* – М.: Ин. лит., 1962. – 265 с.
7. Дубинин В.Н. *Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении* // Зап. научн. семин. ЛОМИ АН СССР. – 1988. – Т. 168. – С. 48–66.
8. Дубинин В.Н. *Метод симметризации в задачах о неналегающих областях* // Матем. сб. – 1985. – Т. 128. – № 1. – С. 110–123.

Институт прикладной математики
Дальневосточного отделения
Российской Академии наук

Поступила
10.11.1998