ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 6 (457)

УДК 517.984

*Ю.А. КОНЯЕВ*

# МЕТОД РАСЩЕПЛЕНИЯ В ТЕОРИИ РЕГУЛЯРНЫХ И СИНГУЛЯРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Предлагается нетрадиционный спектральный метод решения (который можно также назвать методом расщепления) некоторых классов задач теории регулярных и сингулярных возмущений и в отличие от известного [1]–[10] более удобный для численной реализации. С его помощью получены новые алгоритмы решения задачи о регулярном возмущении конечномерных операторов простой и произвольной жордановой структуры, некоторых задач теории ветвления [11] (не требующие построения диаграмм Ньютона [4], [5]) сингулярно возмущенных начальных и краевых задач [12], [13] при наличии экспоненциальных и степенных пограничных слоев, а также некоторых спектральных задач для линейных дифференциальных операторов произвольного порядка (напр., для операторов Штурма–Лиувилля и Дирака [10], имеющих приложение в квантовой механике).

## 1. Решение некоторых задач теории регулярных возмущений и теории ветвления

Рассмотрим алгоритм решения классической задачи теории возмущений в $R^n$

$$A(\varepsilon)S_j(\varepsilon) = \lambda_j(\varepsilon)S_j(\varepsilon) \quad \Big(A(\varepsilon) = \sum_{|k|\geq 0} A_k\varepsilon^k, \ \ |\varepsilon| < \varepsilon^0\Big), \tag{$*$}$$

который в отличие от известного [1]–[3] позволяет находить (без построения диаграмм Ньютона) сразу все собственные значения $\lambda_j(\varepsilon)$ и собственные векторы $S_j(\varepsilon)$ с заданной и равномерной по $\varepsilon$ точностью (включая случай многомерного возмущения $\varepsilon \in R^m$).

Для удобства дальнейшего изложения для произвольной квадратной матрицы $A$ введем следующие обозначения: $A = \{a_{jk}\}_1^n = \{A_{jk}\}_1^p$, $\overline{A} = \operatorname{diag}\{a_{11}, \dots, a_{nn}\}$, $\overline{\overline{A}} = A - \overline{A}$, $\widehat{A} = \operatorname{diag}\{A_{11}, \dots, A_{pp}\}$, $\hat{\hat{A}} = A - \widehat{A}$ $(2 \leq p < n)$. При наличии у матрицы $A_0$ простого спектра $\{\lambda_{0j}\}_1^n$ соотношение $(*)$ эквивалентно матричному уравнению $A(\varepsilon)S(\varepsilon) = S(\varepsilon)\Lambda(\varepsilon)$, где $\Lambda(\varepsilon) = \operatorname{diag}\{\lambda_1(\varepsilon), \dots, \lambda_n(\varepsilon)\}$, а матрица $S(\varepsilon) = \{S_1(\varepsilon), \dots, S_n(\varepsilon)\}$ состоит из собственных векторов матрицы $A(\varepsilon)$. Замена $S(\varepsilon) = S_0H(\varepsilon)$, где $S_0^{-1}A_0S_0 = \Lambda(0) = \Lambda_0$, позволяет перейти к уравнению

$$B(\varepsilon)H(\varepsilon) = H(\varepsilon)\Lambda(\varepsilon) \quad \Big(B(\varepsilon) = S_0^{-1}A(\varepsilon)S_0 = \Lambda_0 + \sum_{|k|\geq 1} B_k\varepsilon^k\Big), \tag{$**$}$$

решение которого может быть представлено [11] в виде сходящихся степенных рядов $H(\varepsilon) = E + \sum\limits_{|k|\geq 1} \overline{\overline{H}}_k\varepsilon^k$, $\Lambda(\varepsilon) = \sum\limits_{|k|\geq 0} \Lambda_k\varepsilon^k$. Действительно, приравнивая коэффициенты в $(**)$ при одинаковых степенях $\varepsilon$, получим набор матричных уравнений

$$\Lambda_0\overline{\overline{H}}_k - \overline{\overline{H}}_k\Lambda_0 = \Lambda_k - P_k \quad (|k| \geq 1, \ \ P_k = A_k, \ \ |k| = 1),$$
$$P_k = B_k + \sum_{|j|\geq 1}(B_j\overline{\overline{H}}_{k-j} - \overline{\overline{H}}_{k-j}\Lambda_j) = \{p_{jmk}\} \quad (|k| \geq 2),$$

откуда последовательно и однозначно все диагональные $\Lambda_k$ и “бездиагональные” $\overline{\overline{H}}_k$ ($|k| \geq 1$) матрицы и соответствующие степенные ряды

$$\Lambda_k = \overline{P}_k, \quad \overline{\overline{H}}_k = \{h_{jmk}\}; \quad h_{jmk} = P_{jmk}(\lambda_{0j} - \lambda_{0m})^{-1}.$$

Обоснование приводится в [11].

Если матрица $A_0$ имеет полупростую структуру, т. е. существует невырожденная матрица $S_0$ такая, что

$$S_0^{-1} A_0 S_0 = \Lambda_0 = \operatorname{diag}\{\Lambda_{01}, \ldots, \Lambda_{0p}\}; \quad \Lambda_{0j} = \lambda_{0j} E$$
$$(\lambda_{0j} \neq \lambda_{0k}, \;\; j \neq k, \;\; k = \overline{1,p}, \;\; 2 \leq p \leq n-1),$$

то вводится матрица

$$Q(\varepsilon) = S_0^{-1} A(\varepsilon) S_0 = \Lambda_0 + \sum_1^\infty Q_k \varepsilon^k.$$

Аналогично предыдущему с помощью невырожденного при достаточно малых $|\varepsilon|$ преобразования $H(\varepsilon) = E + \sum\limits_1^\infty \hat{\hat{H}}_k \varepsilon^k$ матрица $Q(\varepsilon)$ может быть приведена к блочно-диагональному виду

$$B(\varepsilon) = H^{-1}(\varepsilon) Q(\varepsilon) H(\varepsilon) = \operatorname{diag}\{F_1(\varepsilon), \ldots, F_p(\varepsilon)\} = \Lambda_0 + \sum_1^\infty \widehat{B}_k \varepsilon^k.$$

Далее, каждая из матриц $F_j(\varepsilon) = \lambda_{0j} E + \sum\limits_1^\infty F_{jk} \varepsilon^k$ ($\varepsilon \in R_t^1$) приводится к диагональному виду, если матрица $F_{j1}$ имеет простой (некратный) спектр. Если же матрица $F_{1j}$ имеет полупростой спектр, тогда необходимо произвести дальнейшее блочное расщепление матрицы $F_j(\varepsilon)$. Случай, когда матрица $F_{1j}$ имеет произвольную жорданову структуру, может быть исследован по следующей схеме.

Пусть матрица $A_0$ имеет жорданову структуру вида

$$S_0^{-1} A_0 S_0 = J_0 = \operatorname{diag}\{J_{01}, \ldots, J_{0p}\},$$

где $J_{0j} = \lambda_{0j} E + M_j$ ($1 \leq p \leq n-1$), $M_j$ — известные нильпотентные матрицы ($j = \overline{1,p}$). Тогда, как и выше, можно перейти от матрицы $A(\varepsilon)$ к более простой матрице

$$Q(\varepsilon) = S_0^{-1} A(\varepsilon) S_0 = J_0 + \sum_1^\infty Q_k \varepsilon^k \quad (\varepsilon \in R_*^1).$$

С помощью так называемого “срезающего преобразования”, определяемого матрицей

$$U(\varepsilon) = \operatorname{diag}\{U_1(\varepsilon_1), \ldots, U_p(\varepsilon_p)\} \quad (\varepsilon_k^{m_k} = \varepsilon),$$

где

$$U_k(\varepsilon_k) = \operatorname{diag}\{1, \varepsilon_k, \varepsilon_k^2, \ldots, \varepsilon_k^{m_k - 1}\}, \quad m_k = \dim J_{0k} \;\; (0 < \varepsilon_k < \delta_1, \;\; k = \overline{1,p}),$$

матрица $Q(\varepsilon)$ приводится к виду

$$B(\varepsilon) = U^{-1}(\varepsilon) Q(\varepsilon) U(\varepsilon) = \Lambda_0 + \sum_1^\infty B_k \nu^k \quad (\nu = \underset{k}{\text{НОД}}(\varepsilon_k)),$$
$$\Lambda_0 = \operatorname{diag}\{\Lambda_{01}, \ldots, \Lambda_{0p}\}, \quad \Lambda_{0k} = \lambda_{0k} E \quad (k = \overline{1,p}),$$

когда примени́м описанный выше алгоритм.

Рассмотрим два характерных примера.

1. Спектр аналитически возмущенной матрицы жордановой структуры

$$A(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\varepsilon^3 & 3\varepsilon & 0 \end{pmatrix} = A_0 + \varepsilon A_1 + \varepsilon^3 A_3 \tag{1}$$

достаточно просто вычисляется с помощью описанного выше алгоритма

$$\lambda_1 = \frac{\varepsilon^2}{3} + \overline{\overline{O}}(\varepsilon^{7/2}), \quad \lambda_{2,3} = \pm\sqrt{3\varepsilon} - \frac{\varepsilon^2}{6} \mp \frac{\varepsilon^{7/2}}{24\sqrt{3}} + \overline{\overline{O}}(\varepsilon^{7/2}).$$

2. Аналогичным образом определяется спектр возмущенной матрицы

$$A(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon - \varepsilon^2 & \varepsilon^2 - \varepsilon - 1 & 1 + \varepsilon^2 - \varepsilon^3 \end{pmatrix} = \sum_0^3 A_k \varepsilon^k, \tag{2}$$
$$\lambda_1 = \varepsilon^2 + \overline{\overline{O}}(\varepsilon^2), \quad \lambda_2 = \varepsilon + \varepsilon^2 + \overline{\overline{O}}(\varepsilon^2), \quad \lambda_3 = 1 - \varepsilon - \varepsilon^2 + \overline{\overline{O}}(\varepsilon^2).$$

Новый метод оказался весьма эффективным при решении некоторых задач теории ветвления, в частности, при нахождении корней нелинейного уравнения

$$f(x,\varepsilon) = \sum_0^n f_k(\varepsilon) x^k = 0 \quad (\varepsilon, x \in R^1, \;\; f_n = 1), \tag{3}$$

причем без использования традиционного метода диаграмм Ньютона [4], [5], что заметно облегчает ее численное решение. Действительно, уравнение (3) после замены $x = \lambda$ может быть сведено к системе

$$\lambda = \lambda y_0 = y_1, \;\lambda^2 = \lambda y_1 = y_2, \ldots, \;\lambda^n = \lambda y_{n-1} = -\sum_0^{n-1} f_k(\varepsilon) y_k,$$
$$A(\varepsilon) y = \lambda y \quad (y_0 = 1, \;\; y = (y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})^\top),$$

где спектр матрицы $A(\varepsilon)$ совпадает с корнями уравнения (3).

Так, например,

1. решение уравнения $\lambda^3 - 3\varepsilon\lambda + \varepsilon^3 = 0$ с помощью нового алгоритма сводится к нахождению спектра матрицы (1);

2. корни уравнения $\varepsilon\lambda^3 - (1+\varepsilon^2-\varepsilon^3)\lambda^2 + (1+\varepsilon-\varepsilon^2)\lambda + \varepsilon^2 - \varepsilon = 0$ получаются как собственные значения $\varepsilon\lambda y = A(\varepsilon)y$ матрицы (2) (ср. [6], с. 435).

Отметим также, что предложенный алгоритм приспособлен и для решения нелинейных спектральных задач [14] вида $Au + \varepsilon B(u) = \lambda u$ ($u \in R^n$), где $A$ — линейный оператор, $B(u)$ — достаточно гладкий нелинейный оператор.

## 2. Асимптотический анализ некоторых классов сингулярно возмущенных и спектральных задач

Рассмотрим в $R^n$ сингулярно возмущенную многоточечную краевую задачу

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = A(x,\varepsilon)y + f(x), \quad \sum_1^n F_k y(x_k,\varepsilon) = \alpha \quad (a = x_1 < \cdots < x_n = b), \tag{4}$$

где $A(x,\varepsilon) = \sum\limits_0^\infty A_k(x)\varepsilon^k$ ($|\varepsilon| < \varepsilon^0 < 1$, $A_k(x), f(x) \in C^\infty[a,b]$). Сингулярность задачи (4) означает, что ее решение не может быть в общем случае представлено в виде регулярного по $\varepsilon$ ряда, т. к. решение предельной ($\varepsilon = 0$) задачи не удовлетворяет, вообще говоря, краевым условиям. В отличие от известного [6], [7] новый алгоритм [11]–[13] позволяет находить асимптотическое разложение решения (без использования аппарата функций Грина) и структуру пограничного слоя для задач указанного класса в замкнутой аналитической форме.

Следует отметить, что в отличие от регулярного случая задача (4) имеет ограниченное (при $\varepsilon \to +0$) решение только при определенной зависимости действительных частей спектра матрицы $A_0(x)$ от расположения точек $x_k$, в которых заданы краевые условия.

**Теорема 1.** *Если спектр* $\{\lambda_{0j}(x)\}_1^n$ *матрицы* $A_0(x)$ *удовлетворяет условиям*

$$\lambda_{0j}(x) \neq \lambda_{0k}(x), \quad \lambda_{0j}(x) \neq 0 \quad (j \neq k, \ \ j,k = \overline{1,n}, \ \ x \in [a,b]),$$
$$\operatorname{Re}\lambda_{0k}(x) \leq 0, \ \ x \in [x_k, b]; \quad \operatorname{Re}\lambda_{0k}(x) \geq 0, \ \ x \in [a, x_k] \ \ (k = \overline{2, n-1}),$$
$$\operatorname{Re}\lambda_{01}(x) \leq 0, \ \ \operatorname{Re}\lambda_{0n}(x) \geq 0, \ \ x \in [a,b],$$
$$\operatorname{Re}\int_{x_k}^{x} \lambda_{0k}(t)dt < 0, \ \ x \in [a,b] \setminus x_k \ \ (k = \overline{1,n}),$$

*и при этом* $\det T \neq 0$, *где постоянная матрица* $T = (T_{11}, \dots, T_{nn})$ *определяется столбцами матрицы* $T_j = F_j S_0(x_j) = (T_{1j}, \dots, T_{nj})$ $(j = \overline{1,n})$ $(S_0^{-1}(x) A_0(x) S_0(x) = \Lambda_0(x) = \operatorname{diag}\{\lambda_{01}(x), \dots, \lambda_{0n}(x)\})$, *то при достаточно малых* $\varepsilon > 0$ *существует единственное и ограниченное при* $\varepsilon \to +0$ *решение* $y(x,\varepsilon)$ *задачи* (4), *представимое в виде*

$$y(x,\varepsilon) = S_0(x)\Big(E + \sum_1^N \overline{\overline{H}}_k(x)\varepsilon^k\Big)\Phi_{(N)}(x,\varepsilon)C + \sum_0^N v_k(x)\varepsilon^k + O(\varepsilon^{N+1}),$$

*где*

$$\Phi_{(N)}(x,\varepsilon) = \operatorname{diag}\{e^{\alpha_1(x,\varepsilon)}, \dots, e^{\alpha_n(x,\varepsilon)}\},$$
$$\alpha_j(x,\varepsilon) = \varepsilon^{-1}\int_{x_j}^{x} \sum_0^N \lambda_{kj}(t)\varepsilon^k dt \quad (j = \overline{1,n}),$$
$$\Lambda_{(N)}(x,\varepsilon) = \sum_0^N \Lambda_k(x)\varepsilon^k, \quad \Lambda_k(x) = \operatorname{diag}\{\lambda_{k1}(x), \dots, \lambda_{kn}(x)\},$$

*матрицы* $\overline{\overline{H}}_k(x)$, $\Lambda_k(x)$ *и* $v_k(x)$ *однозначно определяются в ходе доказательства* [12].

Дискретный аналог предложенного метода позволяет (в отличие от известного [10]) достаточно просто проводить асимптотический анализ большого класса спектральных задач для линейных дифференциальных операторов (в том числе и при задании многоточечных краевых условий), например, для оператора Штурма–Лиувилля

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad y(0) = y(\pi) = 0 \tag{5}$$

или для оператора Дирака

$$\begin{gathered} \dot{y} - p(t)x = \lambda x, \quad \dot{x} + r(t)y = -\lambda y, \\ x(0)\sin\alpha + y(0)\cos\alpha = 0, \quad x(\pi)\sin\beta + y(\pi)\cos\beta = 0 \end{gathered} \tag{6}$$

(имеющих приложение в квантовой механике) путем свед́ения указанных задач к сингулярно возмущенным однородным краевым задачам вида (4), имеющим нетривиальное решение лишь при дискретных значениях малого параметра $\varepsilon$. Действительно, обозначив $\lambda = \varepsilon^{-2}$, запишем задачу (5) в векторной форме

$$\varepsilon\frac{dz}{dx} = (A_0 + \varepsilon^2 A_2(x))z, \quad F_1 z(0,\varepsilon) + F_2 z(\pi,\varepsilon) = 0,$$

где $z = (y, \varepsilon\dot{y})^\top$,

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2(x) = q(x)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

решение которой изложенным методом имеет вид

$$z = S_0\Big(E + \sum_1^\infty \overline{\overline{H}}_k(x)\varepsilon^k\Big)\exp\Big(\varepsilon^{-1}\int_0^x \Lambda(t,\varepsilon)dt\Big)C \equiv Z(x,\varepsilon)C \quad (C \neq 0),$$

где матрицы $\Lambda_k(x)$ и $\overline{\overline{H}}_k(x)$ определяются по описанной выше схеме

$$\overline{\overline{H}}_k(x) = -\frac{1}{2}\Lambda_0^{-1}\overline{\overline{P}}_k(x), \quad P_1 = 0, \quad P_2 = \frac{i}{2}q(x)\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}, \quad P_3 = -\frac{d\overline{\overline{H}}_2}{dx},$$

$$P_k = B_2\overline{\overline{H}}_{k-2} - \frac{d\overline{\overline{H}}_{k-1}}{dx} - \sum_{j=1}^{k-1}\overline{\overline{H}}_j\Lambda_{k-j} \quad (k \geq 4),$$

$$\Lambda_0 = \begin{pmatrix}-i & 0\\ 0 & i\end{pmatrix}, \quad \Lambda_k = \overline{P}_k(x), \quad \Lambda_1 = \Lambda_3 = 0, \quad \Lambda_2 = \frac{i}{2}q(x)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},$$

$$\overline{\overline{H}}_1 = 0, \quad \overline{\overline{H}}_2 = \frac{q(x)}{4}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \quad S_0 = \begin{pmatrix}1 & 1\\ -i & i\end{pmatrix},$$

при этом

$$F(\varepsilon) = F_1Z(0,\varepsilon) + F_2Z(\pi,\varepsilon) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}4-\varepsilon^2q(0) & 4-\varepsilon^2q(0)\\ e^{-i\delta}(4-\varepsilon^2q(\pi)) & e^{i\delta}(4-\varepsilon^2q(\pi))\end{pmatrix} + \overline{\overline{O}}(\varepsilon^2),$$

где $\delta = \frac{\pi}{\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{2}\int\limits_0^\pi q(t)dt$. Уравнение $\det F(\varepsilon) = 0$ $(\pi - \varepsilon\pi n - \varepsilon^2 a + \overline{\overline{O}}(\varepsilon^2) = 0)$ позволяет найти дискретные значения малого параметра

$$\varepsilon(n) = \frac{1}{n} - \frac{a}{\pi n^3} + \overline{\overline{O}}\Big(\frac{1}{n^3}\Big) \quad \Big(a = \frac{1}{2}\int_0^\pi q(t)dt\Big)$$

(при которых существуют нетривиальные решения задачи (4)) и соответствующие собственные значения и собственные функции

$$\lambda(n) = n^2(1 + 2a\pi^{-1}n^{-2} + \overline{\overline{O}}(n^{-2})), \quad \varphi(\lambda,x) = \Big(1 + \frac{q(x)}{4\lambda} + \overline{\overline{O}}\Big(\frac{1}{\lambda}\Big)\Big)\sin\Big(\sqrt{\lambda}x - \frac{1}{2\sqrt{x}}\int_0^x q(t)dt\Big).$$

Аналогичным образом задача (6) после замены $\lambda = \varepsilon^{-1}$ может быть записана в векторной форме

$$\varepsilon\frac{dz}{dt} = (A_0 + \varepsilon A_1(t))z, \quad F_1z(0,\varepsilon) + F_2z(\pi,\varepsilon) = 0,$$

где

$$z = \begin{pmatrix}y\\ x\end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}, \quad A_1(t) = \begin{pmatrix}0 & p(t)\\ -r(t) & 0\end{pmatrix},$$

$$F_1 = \begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \quad F_2 = \begin{pmatrix}0 & 0\\ \cos\beta & \sin\beta\end{pmatrix},$$

и дискретные значения малого параметра $\varepsilon = \varepsilon(n)$ определяются далее по уже известной схеме.

С помощью предложенного метода были изучены сингулярно возмущенные начальные и краевые задачи при наличии степенного погранслоя. В частности, имеет место

**Теорема 2.** *Точное решение задачи Коши*

$$(x+\varepsilon)\frac{dy}{dx} = A(x)y, \quad y(0,\varepsilon) = \alpha \quad (x \in [0,1], \;\; y \in R^n),$$

*где ряд* $A(x) = \sum\limits_0^\infty A_kx^k$ *сходится при* $|x| < 1 + 2\delta$ $(\delta > 0)$ *и спектр* $\{\lambda_{0j}(0)\}_1^n$ *матрицы* $A(0)$ *удовлетворяет неравенствам*

$$\lambda_{0j}(0) - \lambda_{0k}(0) \neq 0, 1, 2, \dots; \quad \operatorname{Re}\lambda_{0j}(0) \leq 0 \quad (j \neq k; \;\; j,k = \overline{1,n}),$$

*может быть при достаточно малых* $\varepsilon > 0$ *представлено в виде*

$$y = S(\varepsilon)P(x+\varepsilon,\varepsilon)\left(1+\frac{x}{\varepsilon}\right)^{\Lambda_0(\varepsilon)} P^{-1}(\varepsilon,\varepsilon)S^{-1}(\varepsilon)\alpha,$$

*где*

$$P(x+\varepsilon,\varepsilon) = \sum_0^\infty P_k(\varepsilon)(x+\varepsilon)^k, \quad |x+\varepsilon| < 1+\delta, \quad |\varepsilon| < \delta,$$

$$\left(1+\frac{x}{\varepsilon}\right)^{\Lambda_0(\varepsilon)} = \operatorname{diag}\left\{\left(1+\frac{x}{\varepsilon}\right)^{\lambda_{01}(\varepsilon)}, \dots, \left(1+\frac{x}{\varepsilon}\right)^{\lambda_{0n}(\varepsilon)}\right\}, \quad \Lambda_0(\varepsilon) = \operatorname{diag}\{\lambda_{01}(\varepsilon), \dots, \lambda_{0n}(\varepsilon)\},$$

*а матрицы* $P(x+\varepsilon,\varepsilon)$*,* $S(\varepsilon)$*,* $\Lambda_0(\varepsilon)$ *и* $P(\varepsilon,\varepsilon)$*, однозначно определяемые в ходе доказательства, аналитичны при* $|x+\varepsilon| < 1+\delta$ *и* $|\varepsilon| < \delta$ *соответственно.*

## Литература


1. Като Т. *Теория возмущений линейных операторов.* – М.: Мир, 1972. – 740 с.
2. Воеводин В.В. *Вычислительные основы линейной алгебры.* – М.: Наука, 1977. – 303 с.
3. Ланкастер П. *Теория матриц.* – М.: Наука, 1978. – 280 с.
4. Вайнберг М.М., Треногин В.А. *Теория ветвления решений нелинейных уравнений.* – М.: Наука, 1969. – 527 с.
5. Треногин В.А. *Функциональный анализ.* – М.: Наука, 1980. – 496 с.
6. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. *Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений.* – М.: Высш. школа, 1990. – 208 с.
7. Ломов С.А. *Введение в общую теорию сингулярных возмущений.* – М.: Наука, 1981. – 398 с.
8. Вазов В. *Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений.* – М.: Мир, 1968. – 464 с.
9. Федорюк М.В. *Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.* – М.: Наука, 1983. – 352 с.
10. Левитан Б.М., Саргсян И.С. *Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака.* – М.: Наука, 1988. – 432 с.
11. Коняев Ю.А. *Об одном методе исследования некоторых задач теории возмущений* // Матем. сб. – 1993. – № 12. – С. 133–144.
12. Коняев Ю.А. *Конструктивные методы исследования многоточечных краевых задач* // Изв. вузов. Математика. – 1992. – № 2. – С. 57–61.
13. Коняев Ю.А. *Сингулярно возмущенные задачи с двойной особенностью* // Матем. заметки. – 1997. – Т. 62. – № 4. – С. 494–501.
14. Коняев К.Ю. *Об одной нелинейной спектральной задаче* // Тез. докл. вторых матем. чтений МГСУ. – 1994. – С. 41.



*Московский энергетический институт*



*Поступили*
*первый вариант* 24.02.1997
*окончательный вариант* 27.04.1998