И З В Е С Т И Я В Ы С Ш И Х У Ч Е Б Н Ы Х З А В Е Д Е Н И Й

2007 МАТЕМАТИКА № 11 (546)

УДК 517.968

И.В. САПРОНОВ

УРАВНЕНИЕ ВОЛЬТЕРРА С ОСОБЕННОСТЬЮ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Введение

Несмотря на немалое число публикаций, посвященных изучению указанных уравнений, данная тематика остается актуальной и представляет известный интерес. Существенное развитие эта теория получила в серии работ [1]–[3], где изложены основы теории линейных интегральных уравнений I и III рода, скалярные решения ищутся в банаховых пространствах с весами специального вида. В последние годы исследовались уравнения с вещественными коэффициентами, обладающими конечной гладкостью. При этом уравнения рассматривались как в конечномерных, так и в банаховых пространствах [4]–[9].

Целью данной работы является исследование интегрального уравнения Вольтерра I рода с особенностью и достаточно гладким ядром в пространстве суммируемых на $[0,\delta]$ функций со значениями в банаховом пространстве E.

1. Постановка задачи. Формулировка основного результата

В вещественном банаховом пространстве E зафиксируем норму $\|\cdot\|_E$. Эта норма индуцирует в пространстве $L(E)$ всех линейных ограниченных операторов на E операторную норму

$$\|A\|_{L(E)} = \sup_{\|x\|_E=1} \|Ax\|_E.$$

В пространстве $C([0,\delta],E)$ непрерывных в норме E на $[0,\delta]$ функций со значениями в E, норма, как обычно, определяется по формуле

$$\|\psi\|_{C([0,\delta],E)} = \max_{0\le x\le\delta} \|\psi(x)\|_E.$$

Наконец, в пространстве C, состоящем из всех непрерывных в норме $L(E)$ на треугольнике $0\le t\le x\le\delta$ функций со значениями в $L(E)$, вводится норма

$$\|\,|Q|\,\|_C = \max_{0\le t\le x\le\delta} \|Q(x,t)\|_{L(E)}.$$

Рассматривается интегральное уравнение Вольтерра I рода вида

$$\int_0^x K(x,t)u(t)dt = 0 \quad (0\le x\le\delta) \tag{1}$$

в $L_1([0,\delta],E)$, где $K(x,t)$ — заданная функция со значениями в $L(E)$, имеющая непрерывные частные производные до порядка $N+m+1$ (N, m — натуральные числа) включительно, причем все частные производные до порядка $m-1$ равны нулю в точке $(0,0)$, а частные производные m-го порядка не все равны нулю в точке $(0,0)$, $u(x)$ — искомая суммируемая функция на $[0,\delta]$ со значениями в E.

Представим $K(x,t)$ по формуле Тейлора

$$K(x,t) = \sum_{\alpha+\beta=m}^{\alpha+\beta=N+m} K^{\alpha\beta} x^\alpha t^\beta + \sum_{\alpha+\beta=N+m+1} \widetilde{K}^{\alpha\beta}(x,t) x^\alpha t^\beta, \tag{2}$$

где

$$K^{\alpha\beta} = \frac{\partial K^{\alpha+\beta}(0,0)}{\partial x^\alpha \partial t^\beta} \frac{1}{\alpha!} \frac{1}{\beta!} \ \ (\alpha+\beta = m, \dots, \alpha+\beta = N+m).$$

Введем операторный пучок

$$Q_\lambda = \sum_{\substack{\alpha+\beta=m \\ \alpha>0}} K^{\alpha\beta} \alpha \int_0^1 s^{\beta+\lambda-1} ds + A_m, \tag{3}$$

где $A_m = \sum\limits_{\alpha+\beta=m} K^{\alpha\beta}$.

Напомним, что если вектор e является собственным для операторного пучка $B(\lambda)$, отвечающим характеристическому числу λ_0, то векторы $e_1, e_2, \dots, e_q$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} B(\lambda_0)e_1 + B'(\lambda_0)e = 0, \\ B(\lambda_0)e_2 + B'(\lambda_0)e_1 + \frac{1}{2!}B''(\lambda_0)e = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ B(\lambda_0)e_q + B'(\lambda_0)e_{q-1} + \dots + \frac{1}{q!}B^{(q)}(\lambda_0)e = 0, \end{cases}$$

образуют цепочку присоединенных векторов к собственному вектору e.

Теорема. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) *пучок* (3) *имеет характеристическое число* $\lambda = \nu + i\mu$ ($\nu > 0$), *а числа* $(\nu + k) + i\mu$ ($k = 1, 2, \dots, N$) *не являются характеристическими для него*;
2) *характеристическому числу* $\nu + i\mu$ *соответствует собственный вектор* $e = e_1 + ie_2$ *и цепочка присоединенных векторов* $e_k = e_1^k + ie_2^k$ ($k = 1, 2, \dots, q$);
3) *оператор* $A_m = \lim\limits_{x\to 0} \frac{K(x,x)}{x^m}$ *имеет ограниченный обратный*;
4) *натуральное число* N *такое, что*

$$2\| \, |K'_x(x,t)x^{1-m}| \, \|_C \max_{0\le x\le\delta} \left\| \left[\frac{K(x,x)}{x^m} \right]^{-1} \right\|_{L(E)} \int_0^1 s^{\nu+N} ds < 1. \tag{4}$$

Тогда для уравнения (1) *существует* $(q+1)$*-параметрическое семейство решений вида*

$$u_l(x) = x^{\nu-1} \Bigg[\sum_{r=0}^{l} \Bigg(\sum_{i=0}^{N} a_i^{rl} x^i \sin(\mu \ln x) + \sum_{i=0}^{N} b_i^{rl} x^i \cos(\mu \ln x) \Bigg) \ln^r x +$$
$$+ \sum_{r=0}^{l} (a_{N+1}^{rl}(x) x^{N+1} \sin(\mu \ln x) + b_{N+1}^{rl}(x) x^{N+1} \cos(\mu \ln x)) \ln^r x \Bigg], \tag{5}$$

где a_i^{rl} *и* b_i^{rl} ($l = 0, \dots, q$, $i = 0, \dots, N$, $r = 0, \dots, l$) — *искомые коэффициенты в* E, *функции* $a_{N+1}^{rl}(x)$, $b_{N+1}^{rl}(x)$ *являются непрерывными на* $[0, \delta]$ *со значениями в банаховом пространстве* E.

Заметим, что $\int\limits_0^1 s^{\nu+N} ds \to 0$ при $N \to \infty$. Следовательно, при достаточно большом N неравенство (4) выполняется.

2. Построение решений

Уравнение (1) дифференцированием сводится к интегральному уравнению Вольтерра II рода

$$K(x,x)u(x) = -\int_0^x K'_x(x,t)u(t)dt,$$

которое, используя (2), можно записать в виде

$$\Big(\sum_{k=m}^{N+m} A_k x^k + A_{N+m+1}(x)x^{N+m+1}\Big)u(x) = -\int_0^x \Big\{ \sum_{\substack{\alpha+\beta=m \\ \alpha>0}}^{N+m} K^{\alpha\beta}\alpha x^{\alpha-1}t^\beta + \\ + \sum_{\alpha+\beta=m+N} R^{\alpha\beta}(x,t)x^\alpha t^\beta\Big\}u(t)dt, \quad (6)$$

где

$$A_k = \sum_{\alpha+\beta=k} K^{\alpha\beta}, \quad A_{N+m+1}(x) = \sum_{\alpha+\beta=N+m+1} \widetilde{K}^{\alpha\beta}(x,x),$$

$$\sum_{\alpha+\beta=m+N} R^{\alpha\beta}(x,t)x^\alpha t^\beta = \Big[\sum_{\alpha+\beta=N+m+1} \widetilde{K}^{\alpha\beta}(x,t)x^\alpha t^\beta\Big]'_x.$$

Подставляя (5) в (6), в левой части получаем

$$\Big(\sum_{k=m}^{N+m} A_k x^{k+\nu-1} + A_{N+m+1}(x)x^{N+m+\nu}\Big)\Big[\sum_{r=0}^{l}\Big(\sum_{i=0}^{N} a_i^{rl}x^i\sin(\mu\ln x) + \\ + \sum_{i=0}^{N} b_i^{rl}x^i\cos(\mu\ln x)\Big)\ln^r x + \sum_{r=0}^{l}(a_{N+1}^{rl}(x)x^{N+1}\sin(\mu\ln x) + b_{N+1}^{rl}(x)x^{N+1}\cos(\mu\ln x))\ln^r x\Big]. \quad (7)$$

В полученной правой части

$$-\int_0^x \Big[\sum_{\substack{\alpha+\beta=m \\ \alpha>0}}^{N+m} K^{\alpha\beta}\alpha x^{\alpha-1}t^\beta + \sum_{\alpha+\beta=m+N} R^{\alpha\beta}(x,t)x^\alpha t^\beta\Big]t^{\nu-1}\Big[\sum_{r=0}^{l}\Big(\sum_{i=0}^{N} a_i^{rl}t^i\sin(\mu\ln t) + \\ + \sum_{i=0}^{N} b_i^{rl}t^i\cos(\mu\ln t)\Big)\ln^r t + \sum_{r=0}^{l}(a_{N+1}^{rl}(t)t^{N+1}\sin(\mu\ln t) + b_{N+1}^{rl}(t)t^{N+1}\cos(\mu\ln t))\ln^r(t)\Big]dt \quad (8)$$

делаем замену $t = xs$. Тогда (8) преобразуется к виду

$$-\int_0^1 \Big\{\sum_{\substack{\alpha+\beta=m \\ \alpha>0}}^{N+m} K^{\alpha\beta}\alpha x^{\alpha+\beta-1}s^\beta + \sum_{\alpha+\beta=m+N} R^{\alpha\beta}(x,xs)x^{\alpha+\beta}s^\beta\Big\}x^\nu s^{\nu-1} \times \\ \times \Big\{\sum_{r=0}^{l}\Big[\Big(\sum_{i=0}^{N} a_i^{rl}(xs)^i\cos(\mu\ln s) - \sum_{i=0}^{N} b_i^{rl}(xs)^i\sin(\mu\ln s)\Big)\sin(\mu\ln x) + \\ + \Big(\sum_{i=0}^{N} a_i^{rl}(xs)^i\sin(\mu\ln s) + \sum_{i=0}^{N} b_i^{rl}(xs)^i\cos(\mu\ln s)\Big)\cos(\mu\ln x)\Big] \times \\ \times \Big(\sum_{k=0}^{r} C_r^k\ln^k x\ln^{r-k}s\Big) + \sum_{r=0}^{l}[(a_{N+1}^{rl}(xs)(xs)^{N+1}\cos(\mu\ln s) - \\ - b_{N+1}^{rl}(xs)(xs)^{N+1}\sin(\mu\ln s))\sin(\mu\ln x) + (a_{N+1}^{rl}(xs)(xs)^{N+1}\sin(\mu\ln s) + \\ + b_{N+1}^{rl}(xs)(xs)^{N+1}\cos(\mu\ln s))\cos(\mu\ln x)]\Big(\sum_{k=0}^{r} C_r^k\ln^k x\ln^{r-k}s\Big)\Big\}ds. \quad (9)$$

Приравнивая коэффициенты при $x^{m+\nu-1}\ln^l x\sin(\mu\ln x)$, $x^{m+\nu-1}\ln^l x\cos(\mu\ln x)$ в (7) и (9), получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} A_m a_0^{ll} &= -\sum_{\substack{\alpha+\beta=m\\ \alpha>0}} K^{\alpha\beta}\alpha\int_0^1 s^{\beta+\nu-1}(a_0^{ll}\cos(\mu\ln s)-b_0^{ll}\sin(\mu\ln s))ds,\\ A_m b_0^{ll} &= -\sum_{\substack{\alpha+\beta=m\\ \alpha>0}} K^{\alpha\beta}\alpha\int_0^1 s^{\beta+\nu-1}(a_0^{ll}\sin(\mu\ln s)+b_0^{ll}\cos(\mu\ln s))ds. \end{aligned}\tag{10}$$

Покажем, что из соотношений (10) следует равенство в комплексификации банахова пространства E

$$Q_{\nu+i\mu}(a_0^{ll}+ib_0^{ll})=0,$$

которое означает, что вектор $a_0^{ll}+ib_0^{ll}$ является собственным вектором для операторного пучка Q_λ, отвечающим характеристическому числу $\nu+i\mu$. Именно,

$$Q_{\nu+i\mu}=\sum_{\substack{\alpha+\beta=m\\ \alpha>0}} K^{\alpha\beta}\alpha\int_0^1 s^{\beta+\nu+i\mu-1}ds+A_m=\sum_{\substack{\alpha+\beta=m\\ \alpha>0}} K^{\alpha\beta}\alpha\int_0^1 s^{\beta+\nu-1}\times$$
$$\times[\cos(\mu\ln s)+i\sin(\mu\ln s)]ds+A_m.$$

Пользуясь равенствами (10), вычислим

$$A_m(a_0^{ll}+ib_0^{ll})=-\sum_{\substack{\alpha+\beta=m\\ \alpha>0}} K^{\alpha\beta}\alpha\int_0^1 s^{\beta+\nu-1}[(a_0^{ll}\cos(\mu\ln s)-b_0^{ll}\sin(\mu\ln s))+$$
$$+i(a_0^{ll}\sin(\mu\ln s)+b_0^{ll}\cos(\mu\ln s))]ds,$$
$$Q_{\nu+i\mu}(a_0^{ll}+ib_0^{ll})=\sum_{\substack{\alpha+\beta=m\\ \alpha>0}} K^{\alpha\beta}\alpha\int_0^1 s^{\beta+\nu-1}[\cos(\mu\ln s)+i\sin(\mu\ln s)](a_0^{ll}+$$
$$+ib_0^{ll})ds+A_m(a_0^{ll}+ib_0^{ll})=\sum_{\substack{\alpha+\beta=m\\ \alpha>0}} K^{\alpha\beta}\alpha\int_0^1 s^{\beta+\nu-1}[(a_0^{ll}\cos(\mu\ln s)-$$
$$-b_0^{ll}\sin(\mu\ln s))+i(a_0^{ll}\sin(\mu\ln s)+b_0^{ll}\cos(\mu\ln s))]ds+A_m(a_0^{ll}+ib_0^{ll})=0.$$

Нетрудно заметить, что если $\overline{a}_0^{ll}+i\overline{b}_0^{ll}$ является собственным вектором операторного пучка (3), отвечающим характеристическому числу $\nu+i\mu$, то $a_0^{ll}=\overline{a}_0^{ll}$, $b_0^{ll}=\overline{b}_0^{ll}$ будет решением системы уравнений (10). Это означает, что $a_0^{ll}=e_1$, $b_0^{ll}=e_2$ является решением этой системы.

Приравнивая коэффициенты при $x^{m+\nu+\gamma-1}\sin(\mu\ln x)\ln^l x$ и $x^{m+\nu+\gamma-1}\cos(\mu\ln x)\ln^l x$ в (7) и (9), получаем систему уравнений для определения a_γ^{ll} и b_γ^{ll} $(\gamma=1,2,\dots,N)$

$$\sum_{k+i=m+\gamma} A_k a_i^{ll}=-\sum_{\substack{\alpha+\beta+i=m+\gamma\\ \alpha>0}} K^{\alpha\beta}\alpha\int_0^1 [s^{\beta+\nu+i-1}(a_i^{ll}\cos(\mu\ln s)-b_i^{ll}\sin(\mu\ln s))]ds,$$
$$\sum_{k+i=m+\gamma} A_k b_i^{ll}=-\sum_{\substack{\alpha+\beta+i=m+\gamma\\ \alpha>0}} K^{\alpha\beta}\alpha\int_0^1 [s^{\beta+\nu+i-1}(a_i^{ll}\sin(\mu\ln s)+b_i^{ll}\cos(\mu\ln s))]ds,$$

которую можно переписать в виде

$$A_m a_\gamma^{ll}+\sum_{\substack{\alpha+\beta=m\\ \alpha>0}} K^{\alpha\beta}\alpha\int_0^1 [s^{\beta+\nu+\gamma-1}(a_\gamma^{ll}\cos(\mu\ln s)-b_\gamma^{ll}\sin(\mu\ln s))]ds=$$

$$= -\sum_{\substack{k+i=m+\gamma\\ k>m}} A_k a_i^{ll} - \sum_{\substack{\alpha+\beta+i=m+\gamma\\ \alpha+\beta>m\\ \alpha>0}} K^{\alpha\beta}\alpha \int_0^1 [s^{\beta+\nu+i-1}(a_i^{ll}\cos(\mu\ln s) - b_i^{ll}\sin(\mu\ln s))]ds, \tag{11}$$

$$A_m b_\gamma^{ll} + \sum_{\substack{\alpha+\beta=m\\ \alpha>0}} K^{\alpha\beta}\alpha \int_0^1 [s^{\beta+\nu+\gamma-1}(a_\gamma^{ll}\sin(\mu\ln s) + b_\gamma^{ll}\cos(\mu\ln s))]ds =$$

$$= -\sum_{\substack{k+i=m+\gamma\\ k>m}} A_k b_i^{ll} - \sum_{\substack{\alpha+\beta+i=m+\gamma\\ \alpha+\beta>m\\ \alpha>0}} K^{\alpha\beta}\alpha \int_0^1 [s^{\beta+\nu+i-1}(a_i^{ll}\sin(\mu\ln s) + b_i^{ll}\cos(\mu\ln s))]ds.$$

Система уравнений (11) имеет единственное решение. В предположении противного система уравнений

$$\Big[A_m + \sum_{\substack{\alpha+\beta=m\\ \alpha>0}} K^{\alpha\beta}\alpha \int_0^1 s^{\beta+\nu+\gamma-1}\cos(\mu\ln s)ds\Big] f_1 - \Big[\sum_{\substack{\alpha+\beta=m\\ \alpha>0}} K^{\alpha\beta}\alpha \times$$

$$\times \int_0^1 s^{\beta+\nu+\gamma-1}\sin(\mu\ln s)ds\Big] f_2 = 0, \tag{12}$$

$$\Big[\sum_{\substack{\alpha+\beta=m\\ \alpha>0}} K^{\alpha\beta}\alpha \int_0^1 s^{\beta+\nu+\gamma-1}\sin(\mu\ln s)ds\Big] f_1 + \Big[A_m + \sum_{\substack{\alpha+\beta=m\\ \alpha>0}} K^{\alpha\beta}\alpha \times$$

$$\times \int_0^1 s^{\beta+\nu+\gamma-1}\cos(\mu\ln s)ds\Big] f_2 = 0,$$

имеет ненулевое решение $(f_1, f_2)^T$.

Из уравнений (12) следует

$$Q_{(\nu+\gamma)+i\mu}[f_1 + if_2] = \sum_{\substack{\alpha+\beta=m\\ \alpha>0}} K^{\alpha\beta}\alpha \int_0^1 s^{\beta+\nu+\gamma-1}[\cos(\mu\ln s) + i\sin(\mu\ln s)] \times$$

$$\times (f_1 + if_2)ds + A_m(f_1 + if_2) = \sum_{\substack{\alpha+\beta=m\\ \alpha>0}} K^{\alpha\beta}\alpha \int_0^1 s^{\beta+\nu+\gamma-1}[(\cos(\mu\ln s)f_1 -$$

$$-\sin(\mu\ln s)f_2) + i(\sin(\mu\ln s)f_1 + \cos(\mu\ln s)f_2)]ds + A_m f_1 + iA_m f_2 = 0.$$

Следовательно, вектор $f_1 + if_2$ является собственным вектором для операторного пучка Q_λ, отвечающим характеристическому числу $(\nu+\gamma) + i\mu$, что противоречит первому условию теоремы. Таким образом, коэффициенты a_γ^{ll}, b_γ^{ll} $(\gamma = 1, \ldots, N)$ однозначно определяются.

Приравнивая коэффициенты при $x^{m+\nu-1}\ln^{l-1} x\sin(\mu\ln x)$, $x^{m+\nu-1}\ln^{l-1} x\cos(\mu\ln x)$ в (7) и (9), получаем соотношения

$$A_m a_0^{l-1,l} = -\sum_{\substack{\alpha+\beta=m\\ \alpha>0}} K^{\alpha\beta}\alpha \int_0^1 s^{\beta+\nu-1}\Big\{\sum_{r=l-1}^{l}(a_0^{rl}\cos(\mu\ln s) - b_0^{rl}\sin(\mu\ln s))C_r^{l-1}\ln^{r-l+1} s\Big\}ds, \tag{13}$$

$$A_m b_0^{l-1,l} = -\sum_{\substack{\alpha+\beta=m\\ \alpha>0}} K^{\alpha\beta}\alpha \int_0^1 s^{\beta+\nu-1}\Big\{\sum_{r=l-1}^{l}(a_0^{rl}\sin(\mu\ln s) + b_0^{rl}\cos(\mu\ln s))C_r^{l-1}\ln^{r-l+1} s\Big\}ds.$$

Система уравнений (13) эквивалентна уравнению в комплексификации банахова пространства E

$$Q_{\nu+i\mu}(a_0^{l-1,l} + ib_0^{l-1,l}) + lQ'_{\nu+i\mu}e = 0. \tag{14}$$

Следовательно, $a_0^{l-1,l}+ib_0^{l-1,l}=le_1$ будет решением уравнения (14), а $a_0^{l-1,l}=le_1^1$, $b_0^{l-1,l}=le_2^1$ — решением системы уравнений (13).

Приравнивая коэффициенты при $x^{m+\nu-1}\ln^{l-d}x\sin(\mu\ln x)$, $x^{m+\nu-1}\ln^{l-d}x\cos(\mu\ln x)$ $(d=2,3,\dots,l)$, получаем систему уравнений

$$\begin{aligned}A_m a_0^{l-d,l}=&-\sum_{\substack{\alpha+\beta=m\\ \alpha>0}}K^{\alpha\beta}\alpha\int_0^1 s^{\beta+\nu-1}[(a_0^{l-d,l}\cos(\mu\ln s)-b_0^{l-d,l}\sin(\mu\ln s))+\\&+(a_0^{l-d+1,l}\cos(\mu\ln s)-b_0^{l-d+1,l}\sin(\mu\ln s))(l-d+1)\ln s+(a_0^{l-d+2,l}\cos(\mu\ln s)-\\&-b_0^{l-d+2,l}\sin(\mu\ln s))(l-d+1)(l-d+2)\frac{1}{2!}\ln^2 s+\dots+(a_0^{ll}\cos(\mu\ln s)-\\&-b_0^{ll}\sin(\mu\ln s))(l-d+1)(l-d+2)\times\dots\times l\frac{1}{d!}\ln^d s]ds,\end{aligned}\tag{15}$$

$$\begin{aligned}A_m b_0^{l-d,l}=&-\sum_{\substack{\alpha+\beta=m\\ \alpha>0}}K^{\alpha\beta}\alpha\int_0^1 s^{\beta+\nu-1}\Big[(a_0^{l-d,l}\sin(\mu\ln s)+b_0^{l-d,l}\cos(\mu\ln s))+\\&+(a_0^{l-d+1,l}\sin(\mu\ln s)+b_0^{l-d+1,l}\cos(\mu\ln s))(l-d+1)\ln s+\\&+(a_0^{l-d+2,l}\sin(\mu\ln s)+b_0^{l-d+2,l}\cos(\mu\ln s))(l-d+1)(l-d+2)\frac{1}{2!}\ln^2 s+\dots+\\&+(a_0^{ll}\sin(\mu\ln s)+b_0^{ll}\cos(\mu\ln s))(l-d+1)(l-d+2)\times\dots\times l\frac{1}{d!}\ln^d s\Big]ds.\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}Q_{\nu+i\mu}(a_0^{l-d,l}+ib_0^{l-d,l})+(l-d+1)Q'_{\nu+i\mu}(a_0^{l-d+1,l}+ib_0^{l-d+1,l})+\\+(l-d+1)(l-d+2)\frac{1}{2!}Q''_{\nu+i\mu}(a_0^{l-d+2,l}+ib_0^{l-d+2,l})+\dots+\\+(l-d+1)(l-d+2)\times\dots\times l\frac{1}{d!}Q^{(d)}_{\nu+i\mu}(a_0^{ll}+ib_0^{ll})=0.\end{aligned}\tag{16}$$

Нетрудно по индукции доказать, что решением уравнения (16) будет $a_0^{ll}+ib_0^{ll}=e$, $a_0^{l-1,l}+$ $+ib_0^{l-1,l}=le_1$, $a^{l-2,l}+ib_0^{l-2,l}=l(l-1)e_2,\dots$, $a_0^{l-d+1,l}+ib_0^{l-d+1,l}=l(l-1)\times\dots\times(l-d+2)e_{d-1}$, $a_0^{l-d,l}+ib_0^{l-d,l}=l(l-1)\times\dots\times(l-d+1)e_d$.

Следовательно, $a_0^{l-d,l}=\frac{l!}{(l-d)!}e_1^d$, $b_0^{l-d,l}=\frac{l!}{(l-d)!}e_2^d$ $(d=2,3,\dots,l)$ будет решением системы уравнений (15).

Приравнивая коэффициенты при $x^{m+\nu+\gamma-1}\sin(\mu\ln x)\ln^{l-d}x$, $x^{m+\nu+\gamma-1}\cos(\mu\ln x)\ln^{l-d}x$ $(d=1,2,\dots,l,\ \gamma=1,2,\dots,N)$, получаем систему уравнений

$$\begin{aligned}A_m a_\gamma^{l-d,l}=&-\int_0^1\Big[\sum_{\substack{\alpha+\beta=m\\ \alpha>0}}K^{\alpha\beta}\alpha\Big]s^{\beta+\nu+\gamma-1}\Big\{\sum_{r=l-d}^{l}[a_\gamma^{rl}\cos(\mu\ln s)-\\&-b_\gamma^{rl}\sin(\mu\ln s)]C_r^{l-d}\ln^{r-l+d}s\Big\}ds-\int_0^1\Big[\sum_{\substack{\alpha+\beta+i=m+\gamma\\ \alpha+\beta>m\\ \alpha>0}}K^{\alpha\beta}\alpha\Big]s^{\beta+\nu+i-1}\times\\&\times\Big\{\sum_{r=l-d}^{l}[a_i^{rl}\cos(\mu\ln s)-b_i^{rl}\sin(\mu\ln s)]C_r^{l-d}\ln^{r-l+d}s\Big\}ds,\end{aligned}\tag{17}$$

$$A_m b_\gamma^{l-d,l}=-\int_0^1\Big[\sum_{\substack{\alpha+\beta=m\\ \alpha>0}}K^{\alpha\beta}\alpha\Big]s^{\beta+\nu+\gamma-1}\Big\{\sum_{r=l-d}^{l}[a_\gamma^{rl}\sin(\mu\ln s)+$$

$$+ b_\gamma^{rl}\cos(\mu\ln s)]C_r^{l-d}\ln^{r-l+d} s\Big\}ds - \int_0^1\Big[\sum_{\substack{\alpha+\beta+i=m+\gamma\\ \alpha+\beta>m\\ \alpha>0}} K^{\alpha\beta}\alpha\Big]s^{\beta+\nu+i-1}\times$$

$$\times\Big\{\sum_{r=l-d}^{l}[a_i^{rl}\sin(\mu\ln s) + b_i^{rl}\cos(\mu\ln s)]C_r^{l-d}\ln^{r-l+d} s\Big\}ds.$$

В силу первого условия теоремы система уравнений (17) имеет единственное решение. Это означает, что коэффициенты $a_\gamma^{l-d,l}$ и $b_\gamma^{l-d,l}$ $(d = 1, 2, \dots, l,\ \gamma = 1, 2, \dots, N)$ однозначно определяются.

Для того чтобы функция (5) была решением уравнения (6), функции $a_{N+1}^{rl}(x)$ и $b_{N+1}^{rl}(x)$ со значениями в банаховом пространстве E должны удовлетворять уравнению

$$\sum_{k+i\ge m+N+1} A_k x^{k+\nu+i-1}\Big[\sum_{r=0}^{l}(a_i^{rl}\sin(\mu\ln x) + b_i^{rl}\cos(\mu\ln x))\ln^r x\Big] +$$

$$+ A_{N+m+1}(x)x^{N+m+\nu}\Big[\sum_{r=0}^{l}\Big(\sum_{i=0}^{N} a_i^{rl}\sin(\mu\ln x) + \sum_{i=0}^{N} b_i^{rl}\cos(\mu\ln x)\Big)\ln^r x\Big] +$$

$$+\Big(\sum_{k=m}^{N+m} A_k x^{k+\nu-1} + A_{N+m+1}(x)x^{N+m+\nu}\Big)\Big[\sum_{r=0}^{l}(a_{N+1}^{rl}(x)x^{N+1}\sin(\mu\ln x) +$$

$$+ b_{N+1}^{rl}(x)x^{N+1}\cos(\mu\ln x))\ln^r x\Big] = -\int_0^1\Big[\sum_{\substack{\alpha+\beta+i\ge m+N+1\\ \alpha>0}} K^{\alpha\beta}\alpha x^{\alpha+\beta+\nu+i-1}\Big]\times$$

$$\times s^{\beta+\nu+i-1}\Big[\sum_{r=0}^{l}[(a_i^{rl}\cos(\mu\ln s) - b_i^{rl}\sin(\mu\ln s))\sin(\mu\ln x) + (a_i^{rl}\sin(\mu\ln s) +$$

$$+ b_i^{rl}\cos(\mu\ln s))\cos(\mu\ln x)\Big]\Big(\sum_{k=0}^{r} C_r^k\ln^k x\ln^{r-k} s\Big)ds - \int_0^1\Big[\sum_{\alpha+\beta=m+N} R^{\alpha\beta}(x,xs)x^{\alpha+\beta}\times$$

$$\times s^\beta\Big]s^{\nu-1}x^\nu\Big[\sum_{r=0}^{l}\Big[\Big(\sum_{i=0}^{N} a_i^{rl}(xs)^i\cos(\mu\ln s) - \sum_{i=0}^{N} b_i^{rl}(xs)^i\sin(\mu\ln s)\Big)\sin(\mu\ln x) +$$

$$+\Big(\sum_{i=0}^{N} a_i^{rl}(xs)^i\sin(\mu\ln s) + \sum_{i=0}^{N} b_i^{rl}(xs)^i\cos(\mu\ln s)\Big)\cos(\mu\ln x)\Big]\times$$

$$\times\Big(\sum_{k=0}^{r} C_r^k\ln^k x\ln^{r-k} s\Big)\Big]ds - \int_0^1 K'_x(x,xs)x^\nu s^{\nu-1}\Big[\sum_{r=0}^{l}[(a_{N+1}^{rl}(xs)(xs)^{N+1}\times$$

$$\times\cos(\mu\ln s) - b_{N+1}^{rl}(xs)(xs)^{N+1}\sin(\mu\ln s))\sin(\mu\ln x) + (a_{N+1}^{rl}(xs)(xs)^{N+1}\times$$

$$\times\sin(\mu\ln s) + b_{N+1}^{rl}(xs)(xs)^{N+1}\cos(\mu\ln s))\cos(\mu\ln x)]\Big(\sum_{k=0}^{r} C_r^k\ln^k x\ln^{r-k} s\Big)\Big]ds.$$

Приравнивая выражения при $x^{m+N+\nu}\sin(\mu\ln x)\ln^l x$ и $x^{m+N+\nu}\cos(\mu\ln x)\ln^l x$, получаем равенства

$$\sum_{k+i\ge m+N+1} A_k x^{k+i-m-N-1}a_i^{ll} + A_{N+m+1}(x)\sum_{i=0}^{N} a_i^{ll}x^i +$$

$$+\Big(\sum_{k=m}^{m+N} A_k x^{k-m} + A_{N+m+1}(x)x^{N+1}\Big)a_{N+1}^{ll}(x) =$$

$$= -\int_0^1 \Big[\sum_{\substack{\alpha+\beta+i\geq m+N+1\\ \alpha>0}} K^{\alpha\beta}\alpha x^{\alpha+\beta+i-m-N-1} \Big] s^{\beta+\nu+i-1} [a_i^{ll}\cos(\mu\ln s) -$$

$$- b_i^{ll}\sin(\mu\ln s)]ds - \int_0^1 \Big[\sum_{\alpha+\beta=m+N} R^{\alpha\beta}(x,xs) x^{\alpha+\beta-m-N} \Big] s^{\beta+\nu-1} \times$$

$$\times [\sum_{i=0}^N a_i^{ll}(xs)^i \cos(\mu\ln s) - \sum_{i=0}^N b_i^{ll}(xs)^i \sin(\mu\ln s)]ds - \int_0^1 K'_x(x,xs)x^{1-m}s^{\nu+N} \times$$

$$\times [a_{N+1}^{ll}(xs)\cos(\mu\ln s) - b_{N+1}^{ll}(xs)\sin(\mu\ln s)]ds,$$

$$\sum_{k+i\geq m+N+1} A_k x^{k+i-m-N-1} b_i^{ll} + A_{N+m+1}(x)\sum_{i=0}^N b_i^{ll}x^i +$$

$$+ \Big(\sum_{k=m}^{N+m} A_k x^{k-m} + A_{N+m+1}(x)x^{N+1} \Big) b_{N+1}^{ll}(x) =$$

$$= -\int_0^1 \Big[\sum_{\substack{\alpha+\beta+i\geq m+N+1\\ \alpha>0}} K^{\alpha\beta}\alpha x^{\alpha+\beta+i-m-N-1} \Big] s^{\beta+\nu+i-1} [a_i^{ll}\sin(\mu\ln s) +$$

$$+ b_i^{ll}\cos(\mu\ln s)]ds - \int_0^1 \Big[\sum_{\alpha+\beta=m+N} R^{\alpha\beta}(x,xs) x^{\alpha+\beta-m-N} \Big] s^{\beta+\nu-1} \times$$

$$\times \Big[\sum_{i=0}^N a_i^{ll}(xs)^i \sin(\mu\ln s) + \sum_{i=0}^N b_i^{ll}(xs)^i \cos(\mu\ln s) \Big] ds - \int_0^1 K'_x(x,xs)x^{1-m}s^{\nu+N} \times$$

$$\times [a_{N+1}^{ll}(xs)\sin(\mu\ln s) + b_{N+1}^{ll}(xs)\cos(\mu\ln s)]ds. \quad (18)$$

Приравнивая выражения при $x^{m+N+\nu}\sin(\mu\ln x)\ln^\gamma x$ и $x^{m+N+\nu}\cos(\mu\ln x)\ln^\gamma x$, получаем систему уравнений

$$\sum_{k+i\geq m+N+1} A_k x^{k+i-m-N-1} a_i^{\gamma l} + A_{N+m+1}(x)\sum_{i=0}^N a_i^{\gamma l}x^i + \Big(\sum_{k=m}^{N+m} A_k x^{k-m} +$$

$$+ A_{N+m+1}(x)x^{N+1} \Big) a_{N+1}^{\gamma l}(x) = -\int_0^1 \Big[\sum_{\substack{\alpha+\beta+i\geq m+N+1\\ \alpha>0}} K^{\alpha\beta}\alpha x^{\alpha+\beta+i-m-N-1} \Big] \times$$

$$\times s^{\beta+\nu+i-1} \Big[\sum_{r=\gamma}^{l} (a_i^{rl}\cos(\mu\ln s) - b_i^{rl}\sin(\mu\ln s)) C_r^\gamma \ln^{r-\gamma} s \Big] ds -$$

$$- \int_0^1 \Big[\sum_{\alpha+\beta=m+N} R^{\alpha\beta}(x,xs) x^{\alpha+\beta-m-N} \Big] s^{\beta+\nu-1} \Big[\sum_{r=\gamma}^{l} \Big(\sum_{i=0}^N (a_i^{rl}\cos(\mu\ln s) -$$

$$- \sum_{i=0}^N b_i^{rl}(xs)^i \sin(\mu\ln s)) \Big) C_r^\gamma \ln^{r-\gamma} s \Big] ds - \int_0^1 K'_x(x,xs)x^{1-m}s^{\nu+N} \times$$

$$\times \Big[\sum_{r=\gamma}^{l} (a_{N+1}^{rl}(xs)\cos(\mu\ln s) - b_{N+1}^{rl}(xs)\sin(\mu\ln s)) C_r^\gamma \ln^{r-\gamma} s \Big] ds,$$

$$\sum_{k+i\geq m+N+1} A_k x^{k+i-m-N-1} b_i^{\gamma l} + A_{N+m+1}(x)\sum_{i=0}^N b_i^{\gamma l}x^i + \Big(\sum_{k=m}^{N+m} A_k x^{k-m} +$$

$$+ A_{N+m+1}(x)x^{N+1}\Big) b^{\gamma l}_{N+1}(x) = -\int_0^1 \Big[\sum_{\substack{\alpha+\beta+i\geq m+N+1\\ \alpha>0}} K^{\alpha\beta}\alpha x^{\alpha+\beta+i-m-N-1}\Big] \times$$

$$\times\, s^{\beta+\nu+i-1}\Big[\sum_{r=\gamma}^{l}(a_i^{rl}\sin(\mu\ln s)+b_i^{rl}\cos(\mu\ln s))C_r^\gamma \ln^{r-\gamma} s\Big]ds -$$

$$-\int_0^1\Big[\sum_{\alpha+\beta=m+N} R^{\alpha\beta}(x,xs)x^{\alpha+\beta-m-N}\Big]s^{\beta+\nu-1}\Big[\sum_{r=\gamma}^{l}\Big(\sum_{i=0}^{N} a_i^{rl}(xs)^i\sin(\mu\ln s)+$$

$$+\sum_{i=0}^{N} b_i^{rl}(xs)^i\cos(\mu\ln s)\Big)C_r^\gamma\ln^{r-\gamma} s\Big]ds - \int_0^1 K'_x(x,xs)x^{1-m}s^{\nu+N}\times$$

$$\times\Big[\sum_{r=\gamma}^{l}(a^{rl}_{N+1}(xs)\sin(\mu\ln s)+b^{rl}_{N+1}(xs)\cos(\mu\ln s))C_r^\gamma\ln^{r-\gamma} s\Big]ds. \quad (19)$$

Соотношения (18) и (19) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}\frac{K(x,x)}{x^m}a^{\gamma l}_{N+1}(x) &= \int_0^1[K'_x(x,xs)x^{1-m}]s^{\nu+N}[-a^{\gamma l}_{N+1}(xs)\cos(\mu\ln s)+\\ &\quad + b^{\gamma l}_{N+1}(xs)\sin(\mu\ln s)]ds + f_1^\gamma(x),\\ \frac{K(x,x)}{x^m}b^{\gamma l}_{N+1}(x) &= \int_0^1[K'_x(x,xs)x^{1-m}]s^{\nu+N}[-a^{\gamma l}_{N+1}(xs)\sin(\mu\ln s)-\\ &\quad - b^{\gamma l}_{N+1}(xs)\cos(\mu\ln s)]ds + f_2^\gamma(x),\end{aligned} \quad (20)$$

где $f_1^\gamma(x)$ и $f_2^\gamma(x)$ — известные непрерывные на $[0,\delta]$ функции со значениями в банаховом пространстве E, которые определяются из (18) и (19) ($\gamma = l, l-1, \dots, 0$).

Оператор-функция $\frac{K(x,x)}{x^m}$ непрерывна по норме в нуле и имеет ограниченный обратный, тогда при $0 \le x \le \delta$ достаточно малом существует ограниченный обратный оператор $\left[\frac{K(x,x)}{x^m}\right]^{-1}$, который непрерывен по норме на $[0,\delta]$.

Следовательно, система уравнений (20) при $x\in[0,\delta]$ может быть переписана в виде

$$\begin{aligned}a^{\gamma l}_{N+1}(x) &= \left[\frac{K(x,x)}{x^m}\right]^{-1}\int_0^1[K'_x(x,xs)x^{1-m}]s^{\nu+N}[-a^{\gamma l}_{N+1}(xs)\cos(\mu\ln s)+\\ &\quad + b^{\gamma l}_{N+1}(xs)\sin(\mu\ln s)]ds + \left[\frac{K(x,x)}{x^m}\right]^{-1} f_1^\gamma(x),\\ b^{\gamma l}_{N+1}(x) &= \left[\frac{K(x,x)}{x^m}\right]^{-1}\int_0^1[K'_x(x,xs)x^{1-m}]s^{\nu+N}[-a^{\gamma l}_{N+1}(xs)\sin(\mu\ln s)-\\ &\quad - b^{\gamma l}_{N+1}(xs)\cos(\mu\ln s)]ds + \left[\frac{K(x,x)}{x^m}\right]^{-1} f_2^\gamma(x).\end{aligned} \quad (21)$$

Рассмотрим банахово пространство $E\times E = \{z : z = (u,v)^T,\ u\in E,\ v\in E;\ \|z\|_{E\times E} = \|u\|_E + \|v\|_E\}$. Обозначим через $C([0,\delta], E\times E)$ пространство непрерывных на $[0,\delta]$ в норме банахова пространства $E\times E$ функций с нормой $\|z(x)\|_{C([0,\delta],E\times E)} = \max\limits_{0\le x\le\delta}\|z(x)\|_{E\times E}$.

Пусть

$$z^\gamma(x) = (z_1^\gamma(x), z_2^\gamma(x))^T = (a^{\gamma l}_{N+1}(x), b^{\gamma l}_{N+1}(x))^T \in C([0,\delta], E\times E),$$

$$f^\gamma(x) = \left(\left[\frac{K(x,x)}{x^m}\right]^{-1} f_1^\gamma(x), \left[\frac{K(x,x)}{x^m}\right]^{-1} f_2^\gamma(x)\right)^T \in C([0,\delta], E\times E).$$

Тогда систему уравнений (21) можно переписать в операторной форме

$$z^\gamma(x) = (Bz^\gamma)(x) + f^\gamma(x), \tag{22}$$

где оператор B действует на непрерывную на $[0,\delta]$ в норме банахова пространства $E\times E$ функцию $z^\gamma(x)$ со значениями в $E\times E$ по формуле

$$(Bz^\gamma)(x) = \int_0^1 s^{\nu+N}\overline{K}(x,s)z^\gamma(xs)ds,$$

где

$$\overline{K}(x,s) = \begin{pmatrix} -\left[\frac{K(x,x)}{x^m}\right]^{-1}\frac{K'_x(x,xs)}{x^{m-1}}\cos(\mu\ln s) & \left[\frac{K(x,x)}{x^m}\right]^{-1}\frac{K'_x(x,xs)}{x^{m-1}}\sin(\mu\ln s) \\ -\left[\frac{K(x,x)}{x^m}\right]^{-1}\frac{K'_x(x,xs)}{x^{m-1}}\sin(\mu\ln s) & -\left[\frac{K(x,x)}{x^m}\right]^{-1}\frac{K'_x(x,xs)}{x^{m-1}}\cos(\mu\ln s)\end{pmatrix}.$$

Оценим норму оператора B в пространстве $C([0,\delta],E\times E)$

$$\begin{aligned}
\|(Bz^\gamma)(x)\|_{C([0,\delta],E\times E)} &= \max_{0\le x\le\delta}\left\|\int_0^1 s^{\nu+N}\overline{K}(x,s)z^\gamma(xs)ds\right\|_{E\times E}\le \\
&\le \max_{0\le x\le\delta}\int_0^1 \|s^{\nu+N}\overline{K}(x,s)z^\gamma(xs)\|_{E\times E}ds = \max_{0\le x\le\delta}\int_0^1 s^{\nu+N}\times \\
&\times\left\{\left\| -\left[\frac{K(x,x)}{x^m}\right]^{-1}K'_x(x,xs)x^{1-m}\cos(\mu\ln s)z_1^\gamma(xs)+\right.\right. \\
&\left.+\left[\frac{K(x,x)}{x^m}\right]^{-1}K'_x(x,xs)x^{1-m}\sin(\mu\ln s)z_2^\gamma(xs)\right\|_E+ \\
&+\left\| -\left[\frac{K(x,x)}{x^m}\right]^{-1}K'_x(x,xs)x^{1-m}\sin(\mu\ln s)z_1^\gamma(xs)-\right. \\
&\left.\left.-\left[\frac{K(x,x)}{x^m}\right]^{-1}K'_x(x,xs)x^{1-m}\cos(\mu\ln s)z_2^\gamma(xs)\right\|_E\right\}ds\le \\
&\le \max_{0\le x\le\delta}\int_0^1 s^{\nu+N}\left\{\left\|\left[\frac{K(x,x)}{x^m}\right]^{-1}K'_x(x,xs)x^{1-m}\cos(\mu\ln s)z_1^\gamma(xs)\right\|_E+\right. \\
&+\left\|\left[\frac{K(x,x)}{x^m}\right]^{-1}K'_x(x,xs)x^{1-m}\sin(\mu\ln s)z_2^\gamma(xs)\right\|_E+ \\
&+\left\|\left[\frac{K(x,x)}{x^m}\right]^{-1}K'_x(x,xs)x^{1-m}\sin(\mu\ln s)z_1^\gamma(xs)\right\|_E+ \\
&\left.+\left\|\left[\frac{K(x,x)}{x^m}\right]^{-1}K'_x(x,xs)x^{1-m}\cos(\mu\ln s)z_2^\gamma(xs)\right\|_E\right\}ds\le \\
&\le \max_{0\le x\le\delta}\left\|\left[\frac{K(x,x)}{x^m}\right]^{-1}\right\|_{L(E)}\times\max_{0\le x\le\delta}\int_0^1 2s^{\nu+N}\|K'_x(x,xs)x^{1-m}\|_{L(E)}\times \\
&\times(\|z_1^\gamma(xs)\|_E+\|z_2^\gamma(xs)\|_E)ds\le\max_{0\le x\le\delta}\left\|\left[\frac{K(x,x)}{x^m}\right]^{-1}\right\|_{L(E)}\times \\
&\times 2\|\,|K'_x(x,t)x^{1-m}|\,\|_C\int_0^1 s^{\nu+N}ds\|z^\gamma(x)\|_{C([0,\delta],E\times E)}.
\end{aligned}$$

Следовательно, в силу неравенства (4)

$$\|B\|_{C([0,\delta],E\times E)\to C([0,\delta],E\times E)}\le 2\|\,|K'_x(x,t)x^{1-m}|\,\|_C\times\max_{0\le x\le\delta}\left\|\left[\frac{K(x,x)}{x^m}\right]^{-1}\right\|_{L(E)}\times\int_0^1 s^{\nu+N}ds<1.$$

Это означает, что поэтапно каждое уравнение в (22) при $\gamma = l, \dots, 0$ однозначно разрешимо методом последовательных приближений. $\square$

Для уравнения (6) можно построить еще одно семейство решений $\{v_l(x)\}_{l=0}^q$ вида (5), если вместо собственного вектора $e = e_1 + ie_2$ и цепочки присоединенных к нему векторов $e_k = e_1^k + ie_2^k$ взять собственный вектор $ie = -e_2 + ie_1$ и цепочку присоединенных векторов $ie_k = -e_2^k + ie_1^k$ операторного пучка (3). Нетрудно доказать, что решения $\{u_l(x)\}_{l=0}^q$ и $\{v_l(x)\}_{l=0}^q$ будут линейно независимы в совокупности.

Замечание. Если операторный пучок (3) имеет характеристическое число $\lambda = \nu > 0$, которому соответствует собственный вектор e и цепочка присоединенных векторов $\{e_k\}_{k=1}^q$, то для уравнения (1) существует $(q+1)$-параметрическое семейство решений вида

$$u_l(x) = x^{\nu-1} \sum_{r=0}^{l} \left(\sum_{i=0}^{N} a_i^{rl} x^i + a_{N+1}^{rl}(x) x^{N+1} \right) \ln^r x, \quad l = 0, \dots, q.$$

Литература

1. Магницкий Н.А. *О существовании многопараметрических семейств решений интегрального уравнения Вольтерра 1-го рода* // ДАН СССР. – 1977. – Т. 235. – № 4. – С. 772–774.
2. Магницкий Н.А. *Многопараметрические семейства решений интегральных уравнений Вольтерра* // ДАН СССР. – 1978. – Т. 240. – № 2. – С. 268–271.
3. Магницкий Н.А. *Линейные интегральные уравнения Вольтерра* I *и* III *рода* // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. – 1979. – Т. 19. – № 4. – С. 970–988.
4. Крейн С.Г., Сапронов И.В. *О полноте системы решений интегрального уравнения Вольтерра с особенностью* // Докл. РАН. – 1997. – Т. 355. – № 4. – С. 450–452.
5. Крейн С.Г., Сапронов И.В. *Об интегральных уравнениях Вольтерра с особенностями* // УМН. – 1995. – Т. 50. – Вып. 4. – С. 140.
6. Krein S.G. *Singular integral Volterra equations* // Abstracts. Internat. Congress of Math. Zurich. 3–11 August. – 1994. – 125 p.
7. Krein S.G., Sapronov I.V. *One class of solutions of Volterra equation with regular singularity* // Укр. матем. журн. – 1997. – Т. 49. – № 3. – С. 424–432.
8. Сапронов И.В. *Об одном классе решений уравнения Вольтерра* II *рода с регулярной особенностью в банаховом пространстве* // Изв. вузов. Математика. – 2004. – № 6. – С. 48–58.
9. Сапронов И.В. *Многопараметрическое семейство решений интегрального уравнения Вольтерра с особенностью в банаховом пространстве* // Изв. вузов Математика. – 2005. – № 2. – С. 81–83.

Воронежская государственная лесотехническая академия

Поступила 31.05.2006