ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2007 МАТЕМАТИКА № 11 (546)

УДК 517.956

Л.Х. РАХМАНОВА

РЕШЕНИЕ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ СПЕКТРАЛЬНЫМ МЕТОДОМ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

1. Постановка задачи. Рассмотрим уравнение смешанного параболо-гиперболического типа

$$Lu \equiv \begin{cases} u_y - u_{xx} + b^2 u = 0, & y > 0; \\ u_{yy} - u_{xx} + b^2 u = 0, & y < 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $b = \text{const} \geq 0$, в прямоугольной области $D = \{(x, y) \mid 0 < x < 1, -\alpha < y < \beta\}$, α и β — заданные положительные действительные числа.

Задача. *Найти в области D функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условиям*

$$u(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D \cup \{x = 0\} \cup \{x = 1\}) \cap C^2(D_-) \cap C^{2;1}_{x,y}(D_+ \cup \{y = \beta\}), \tag{2}$$

$$Lu(x, y) \equiv 0, \quad (x, y) \in D_- \cup D_+ \cup \{y = \beta\}, \tag{3}$$

$$u(0, y) = u(1, y), \quad -\alpha \leq y \leq \beta, \tag{4}$$

$$u_x(0, y) = u_x(1, y), \quad -\alpha \leq y \leq \beta, \tag{5}$$

$$u(x, -\alpha) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \tag{6}$$

$\psi(x)$ — заданная достаточно гладкая функция, $\psi(0) = \psi(1)$, $\psi'(0) = \psi'(1)$.

Отметим, что задача Трикоми для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа изучалась многими авторами [1]–[8]. Более полную библиографию работ, посвященных данной теме, можно найти в [6], [7]. Задача Трикоми и другие задачи на сопряжения для уравнений параболо-гиперболического типа имеют многочисленные приложения. Так в [1] была рассмотрена задача о движении газа в канале, окруженном пористой средой, при этом в канале движение газа описывалось волновым уравнением, а вне его — уравнением диффузии. В [2]–[4] показаны другие применения этих задач.

В данной работе установлен критерий единственности и существования решения существенно нелокальной задачи (2)–(6) на основе спектрального анализа. Ранее аналогичные задачи были изучены для вырождающихся эллиптических и гиперболических уравнений в работах [9]–[12].

2. Поиск частных решений. Частные решения уравнения (1), не равные нулю в области D, будем искать в виде $u(x, y) = X(x)Y(y)$ с граничными условиями (4) и (5). Тогда получим

$$X''(x) + \mu X(x) = 0, \quad 0 < x < 1, \tag{7}$$

$$X(0) = X(1), \quad X'(0) = X'(1), \tag{8}$$

$$Y'(y) + (b^2 + \mu)Y(y) = 0, \quad 0 < y < \beta, \tag{9}$$

$$Y''(y) + (b^2 + \mu)Y(y) = 0, \quad -\alpha < y < 0. \tag{10}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, конкурс “Агидель”, грант № 05.01.97913.

Спектральная задача (7) и (8) имеет решение

$$X_0(x) = 1, \quad X_k(x) = \{\cos 2\pi kx,\ \sin 2\pi kx\}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{11}$$

Тогда дифференциальные уравнения (9) и (10) имеют соответственно решения

$$Y_k(y) = \begin{cases} c_k e^{-\lambda_k^2 y}, & y > 0; \\ a_k \cos \lambda_k y + b_k \sin \lambda_k y, & y < 0, \end{cases} \tag{12}$$

где a_k, b_k и c_k — произвольные постоянные, $\lambda_k = \sqrt{b^2 + \mu_k} = \sqrt{b^2 + (2\pi k)^2}$.

Поскольку решения $u_k(x, y) = X_k(x)Y_k(y)$ должны удовлетворять условию (2), то постоянные a_k, b_k и c_k подберем так, чтобы выполнялись условия

$$Y_k(0 + 0) = Y_k(0 - 0), \quad Y_k'(0 + 0) = Y_k'(0 - 0). \tag{13}$$

Функции (12) удовлетворяют условиям (13) только тогда, когда $a_k = c_k$ и $b_k = -c_k \lambda_k$. С учетом последних равенств функции (12) принимают вид

$$Y_k(y) = \begin{cases} c_k e^{-\lambda_k^2 y}, & y > 0; \\ c_k \cos \lambda_k y - c_k \lambda_k \sin \lambda_k y, & y < 0. \end{cases} \tag{14}$$

3. Единственность решения. Пусть $u(x, y)$ — решение задачи (2)–(6). Рассмотрим функции

$$u_k(y) = 2\int_0^1 u(x, y) \sin 2\pi kx \, dx, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{15}$$

$$v_k(y) = 2\int_0^1 u(x, y) \cos 2\pi kx \, dx, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{16}$$

На основании (15) и (16) введем функции

$$\omega_\varepsilon(t) = u_k^\varepsilon(t) = 2\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} u(x, y) \sin 2\pi kx \, dx, \tag{17}$$

$$\sigma_\varepsilon(t) = v_k^\varepsilon(t) = 2\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} u(x, y) \cos 2\pi kx \, dx, \tag{18}$$

где $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число. Дифференцируя равенства (17) и (18) по y при $y > 0$ один раз, а при $y < 0$ — два раза и учитывая уравнение (1), получим

$$\begin{aligned} \omega_\varepsilon'(y) &= 2\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} u_y \sin 2\pi kx \, dx = 2\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} (u_{xx} - b^2 u) \sin 2\pi kx \, dx = \\ &= -b^2 \omega_\varepsilon(y) + 2\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} u_{xx} \sin 2\pi kx \, dx, \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned} \omega_\varepsilon''(y) &= 2\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} u_{yy} \sin 2\pi kx \, dx = 2\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} (u_{xx} - b^2 u) \sin 2\pi kx \, dx = \\ &= -b^2 \omega_\varepsilon(y) + 2\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} u_{xx} \sin 2\pi kx \, dx, \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} \sigma_\varepsilon'(y) &= 2\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} u_y \cos 2\pi kx \, dx = 2\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} (u_{xx} - b^2 u) \cos 2\pi kx \, dx = \\ &= -b^2 \sigma_\varepsilon(y) + 2\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} u_{xx} \cos 2\pi kx \, dx, \end{aligned} \tag{21}$$

$$\sigma_\varepsilon''(y) = 2\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} u_{yy} \cos 2\pi kx \, dx = 2\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} (u_{xx} - b^2 u) \cos 2\pi kx \, dx =$$

$$= -b^2\sigma_\varepsilon(y) + 2\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} u_{xx}\cos 2\pi kx\,dx. \tag{22}$$

В интегралах (19)–(22) интегрируя два раза по частям и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ с учетом условий (4) и (5), найдем уравнения

$$u'_k(y) + (b^2 + (2\pi k)^2)u_k(y) = 0, \quad y > 0, \tag{23}$$

$$u''_k(y) + (b^2 + (2\pi k)^2)u_k(y) = 0, \quad y < 0, \tag{24}$$

$$\upsilon'_k(y) + (b^2 + (2\pi k)^2)\upsilon_k(y) = 0, \quad y > 0, \tag{25}$$

$$\upsilon''_k(y) + (b^2 + (2\pi k)^2)\upsilon_k(y) = 0, \quad y < 0. \tag{26}$$

Дифференциальные уравнения (23) и (24), (25) и (26) совпадают соответственно с уравнениями (9) и (10) при $\mu = \mu_k$. Тогда $u_k(y) \equiv Y_k(y)$, $\upsilon_k(y) \equiv Y_k(y)$ при $-\alpha \le y \le \beta$.

Для нахождения постоянных c_k воспользуемся граничным условием (6) и формулами (15) и (16)

$$u_k(-\alpha) = 2\int_0^1 u(x,-\alpha)\sin 2\pi kx\,dx = 2\int_0^1 \psi(x)\sin 2\pi kx\,dx = \psi_k, \tag{27}$$

$$\upsilon_k(-\alpha) = 2\int_0^1 u(x,-\alpha)\cos 2\pi kx\,dx = 2\int_0^1 \psi(x)\cos 2\pi kx\,dx = \widetilde{\psi}_k. \tag{28}$$

Тогда из (14) и (27) имеем

$$c_k d_\alpha(k) = \psi_k, \quad d_\alpha(k) = \cos\lambda_k\alpha + \lambda_k\sin\lambda_k\alpha. \tag{29}$$

Аналогично из (14) и (28)

$$\widetilde{c}_k d_\alpha(k) = \widetilde{\psi}_k. \tag{30}$$

Отсюда при условии

$$d_k(\alpha) \ne 0 \tag{31}$$

найдем $c_k = \frac{\psi_k}{d_\alpha(k)}$, $\widetilde{c}_k = \frac{\widetilde{\psi}_k}{d_\alpha(k)}$.

Подставляя значения c_k и $\widetilde{c}_k$ в формулу (14), окончательно получим

$$u_k(y) = \begin{cases} A_k\psi_k e^{-\lambda_k^2 y}, & y > 0; \\ A_k(\cos\lambda_k y - \lambda_k\sin\lambda_k y)\psi_k, & y < 0, \end{cases} \tag{32}$$

$$\upsilon_k(y) = \begin{cases} A_k\widetilde{\psi}_k e^{-\lambda_k^2 y}, & y > 0; \\ A_k(\cos\lambda_k y - \lambda_k\sin\lambda_k y)\widetilde{\psi}_k, & y < 0, \end{cases} \tag{33}$$

где $A_k = 1/d_\alpha(k)$. Пусть теперь $\psi(x) \equiv 0$, тогда $\psi_k = \widetilde{\psi}_k \equiv 0$ и из формул (15), (16) и (32), (33) следует

$$\int_0^1 u(x,y)\sin\pi kx\,dx = 0, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

$$\int_0^1 u(x,y)\cos\pi kx\,dx = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Отсюда $u(x,y) \equiv 0$ для всех $x \in [0,1]$ и $y \in [-\alpha,\beta]$ в силу полноты системы $\{1, \cos 2\pi kx, \sin 2\pi kx\}$, $k = 1, 2, \ldots$, в пространстве $L_2[0,1]$. Итак, справедлива следующая

Теорема 1. *Если существует решение $u(x,y)$ задачи (2)–(6), то оно единственно только тогда, когда выполнены условия $d_\alpha(k) \ne 0$ при всех $k \in N$.*

Действительно, если выполнены условия $d_\alpha(k) \neq 0$ и существует решение задачи (2)–(6), то оно единственно.

Пусть при некоторых α и $k = p$ $d_\alpha(p) = 0$, тогда однородная задача (2)–(6) при $\psi(x) \equiv 0$ имеет нетривиальное решение

$$u_p(x,y) = X_p(x)Y_p(y), \tag{34}$$

где $X_p(x) : \{1, \cos 2\pi px, \sin 2\pi px\}$, $Y_p(y) = \begin{cases} e^{-\lambda_p^2 y}, & y > 0; \\ \cos\lambda_p y - \lambda_p \sin\lambda_p y, & y < 0. \end{cases}$

Из представления

$$d_\alpha(k) = \sqrt{1+\lambda_k^2}\ \sin(\lambda_k\alpha + \varphi_k),$$

где $\varphi_k = \arcsin\left(1/\sqrt{1+\lambda_k^2}\right) \to 0$ при $k \to +\infty$, видно, что выражение $d_\alpha(k) = 0$ только в том случае, когда $\alpha = \pi n/\lambda_k - \varphi_k/\lambda_k$, $n \in N$.

Отметим, что существуют $\alpha > 0$ и постоянная $C_0 > 0$ такие, что при достаточно больших k справедлива оценка

$$\inf_k |d_\alpha(k)| \geq C_0 > 0. \tag{35}$$

4. Существование решения. Если выполнены условия (31) и (35), то на основании частных решений (11), (32) и (33) решение задачи (2)–(6) можно представить в виде суммы ряда

$$u(x,y) = \frac{v_0(y)}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} v_k(y)\cos 2\pi kx + \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(y)\sin 2\pi kx. \tag{36}$$

Далее покажем, что при определенных условиях относительно функции $\psi(x)$ сумма $u(x,y)$ ряда (35) удовлетворяет условиям (2).

Заметим, что при достаточно больших k справедливы оценки $|u_k(y)| \leq Ak|\psi_k|$, $|u_k'(y)| \leq Ak^2|\psi_k|$ и $|v_k(y)| \leq Ak|\widetilde{\psi}_k|$, $|v_k'(y)| \leq Ak^2|\widetilde{\psi}_k|$ для любого $y \in [-\alpha, \beta]$, $|u_k''(y)| \leq Ak^3|\psi_k|$ и $|v_k''(y)| \leq Ak^3|\widetilde{\psi}_k|$, $y \in [-\alpha, 0]$, где A — положительная постоянная, зависящая от α. Тогда из теории рядов Фурье известно ([13], § 10), что если $\psi(x) \in C^3[0,1]$ и на сегменте $[0,1]$ имеет кусочно-непрерывную производную четвертого порядка и $\psi(0) = \psi(1)$, $\psi'(0) = \psi'(1)$, $\psi''(0) = \psi''(1)$, $\psi'''(0) = \psi'''(1)$, то

$$\psi_k = -\left(\frac{1}{\pi}\right)^4 \frac{p_k}{k^4} \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} p_k^2 \leq 4\int_0^1 [\psi^{\mathrm{IV}}(x)]^2 dx,$$

$$\widetilde{\psi}_k = -\left(\frac{1}{\pi}\right)^4 \frac{q_k}{k^4} \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} q_k^2 \leq 4\int_0^1 [\psi^{\mathrm{IV}}(x)]^2 dx.$$

Тогда обычным образом доказывается равномерная сходимость ряда (36) и рядов из производных первого порядка членов этого ряда в $\overline{D}$ и возможность его почленного дифференцирования по переменным x и y дважды при $y \leq 0$ и любое число раз при $y > 0$.

Пусть $d_\alpha(k) = 0$ при некоторых α и $k = n_1, \ldots, n_m$, где $1 \leq n_1 < n_2 < \cdots < n_m$; n_l, $l = \overline{1,m}$, m — фиксированные натуральные числа. Тогда для разрешимости уравнений (29) и (30) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия ортогональности

$$\psi_k = 2\int_0^1 \psi(x)\sin 2\pi kx\, dx = 0, \quad k = n_1, \ldots, n_m, \tag{37}$$

$$\widetilde{\psi}_k = 2\int_0^1 \psi(x)\cos 2\pi kx\, dx = 0, \quad k = n_1, \ldots, n_m. \tag{38}$$

В этом случае решение задачи (2)–(6) определяется в виде суммы ряда

$$u(x,y) = \frac{v_0(y)}{2} + \left(\sum_{k=1}^{n_1-1} + \sum_{k=n_1+1}^{n_2-1} + \cdots + \sum_{k=n_m+1}^{+\infty} \right) u_k(y) \sin 2\pi kx +$$
$$+ \left(\sum_{k=1}^{n_1-1} + \sum_{k=n_1+1}^{n_2-1} + \cdots + \sum_{k=n_m+1}^{+\infty} \right) v_k(y) \cos 2\pi kx + \sum_p C_p u_p(x,y), \quad (39)$$

где в последней сумме p принимает значения $n, n_1, \ldots, n_m$, C_p — произвольные постоянные, функции $u_p(x,y)$ определяются по формуле (34). Таким образом, доказана

Теорема 2. *Пусть $\psi(x) \in C^3[0,1]$ и на $[0,1]$ имеет кусочно-непрерывную производную четвертого порядка и $\psi(0) = \psi(1)$, $\psi'(0) = \psi'(1)$, $\psi''(0) = \psi''(1)$, $\psi'''(0) = \psi'''(1)$. Тогда задача* (2)–(6) *однозначно разрешима только тогда, когда выполнены условия* (31) *и* (35). *Это решение определяется рядом* (36). *Если $d_\alpha(k) = 0$ при некоторых α и $k = n_1, \ldots, n_m$ и выполнено условие* (35), *то задача* (2)–(6) *разрешима только тогда, когда выполнены условия ортогональности* (37) *и* (38) *и решение определяется рядом* (39).

Литература

1. Гельфанд И.М. *Некоторые вопросы анализа и дифференциальных уравнений* // УМН. – 1959. – Т. 14. – № 3. – С. 3–19.
2. Стручина Г.М. *Задача о сопряжении двух уравнений* // Инж.-физ. журн. – 1961. – Т. 4. – № 11. – С. 99–104.
3. Уфлянд Я.С. *К вопросу о распространении колебаний в составных электрических линиях* // Инж.-физ. журн. – 1964. – Т. 7. – № 1. – С. 89–92.
4. Золина Л.А. *О краевой задаче для модельного уравнения гиперболо-параболического типа* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1966. – Т. 6. – № 6. – С. 991–1001.
5. Нахушев А.М., Бжихатлов Х.Г. *Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа* // ДАН СССР. – 1968. – Т. 183. – № 2. – С. 261–264.
6. Джураев Т.Д. *Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов.* – Ташкент: ФАН, 1979. – 238 с.
7. Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажанов А. *Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа.* – Ташкент: ФАН, 1986. – 220 с.
8. Сабитов К.Б. *К теории уравнений смешанного параболо-гиперболического типа со спектральным параметром* // Дифференц. уравнения. – 1989. – Т. 25. – № 1. – С. 117–126.
9. Лернер М.Е., Репин О.А. *Об одной задаче с двумя нелокальными краевыми условиями для уравнения смешанного типа* // Сиб. матем. журн. – 1999. – Т. 40. – № 6. – С. 1260–1275.
10. Моисеев Е.И. *О разрешимости одной нелокальной краевой задачи* // Дифференц. уравнения. – 2001. – Т. 37. – № 11. – С. 1565–1567.
11. Сабитов К.Б., Сидоренко О.Г. *Нелокальная задача для вырождающегося гиперболического уравнения* // Тр. Всероссийск. науч. конф. “Современные проблемы физики и математики”. Стерлитамак. – Уфа: Гилем, 2004. – Т. 1. – С. 80–86.
12. Сабитов К.Б., Сидоренко О.Г. *Об однозначной разрешимости нелокальной задачи для вырождающегося эллиптического уравнения спектральным методом* // Тр. международн. науч. конф. “Спектральная теория дифференциальных операторов и родственные проблемы”. Стерлитамак. – Уфа: Гилем, 2003. – Т. 1. – С. 213–219.
13. Сабитов К.Б. *Уравнения математической физики.* – М.: Высш. школа, 2003. – 256 с.

Стерлитамакская государственная
педагогическая академия

Поступили
первый вариант 16.06.2005
окончательный вариант 09.11.2005