ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2007 МАТЕМАТИКА № 9 (544)

УДК 514.764:517.925

А.К. РЫБНИКОВ

ТЕОРИЯ СВЯЗНОСТЕЙ, ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КОУЛА–ХОПФА И ПОТЕНЦИАЛЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Данная статья посвящена построению геометрической теории преобразований Коула–Хопфа для дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка. Эти преобразования представляют собой особый вид преобразований Бэклунда и непосредственным образом связаны с понятием о потенциалах. Преобразования Коула–Хопфа, как и преобразования Бэклунда, являются одной из дифференциально-геометрических структур, порождаемых дифференциальными уравнениями. В данной работе теория преобразований Коула–Хопфа представлена как специальная глава теории связностей.

В статье выписаны в явном виде уравнения, задающие преобразования Коула–Хопфа. Найдены необходимые условия существования таких преобразований. Выведены условия существования преобразований Коула–Хопфа (и соответственно потенциалов) для некоторых видов дифференциальных уравнений.

1. Введение

1.1. *Понятие преобразования Бэклунда в трактовке Бианки–Ли–Бэклунда и в трактовке Пирани–Робинсона.*

Впервые преобразования Бэклунда возникли как преобразования поверхностей постоянной отрицательной кривизны в 3-мерном евклидовом пространстве R^3. В 1879 г. в работах Л. Бианки [1] и С. Ли [2] было рассмотрено соответствие между двумя поверхностями S и S' в R^3, заданное системой уравнений

$$\begin{aligned} (x^1 - x^{1'})^2 + (x^2 - x^{2'})^2 + (z-y)^2 &= a^2, \\ z_1(x^1 - x^{1'}) + z_2(x^2 - x^{2'}) - (z-y) &= 0, \\ y_{1'}(x^1 - x^{1'}) + y_{2'}(x^2 - x^{2'}) - (z-y) &= 0, \\ z_1 y_{1'} + z_2 y_{2'} + 1 &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

связывающих координаты x^1, x^2, z точки $M \in S$ и координаты $x^{1'}$, $x^{2'}$, y точки $M' \in S'$. Здесь $z = z(x^1, x^2)$, $y = y(x^{1'}, x^{2'})$, $z_i = \frac{\partial z}{\partial x^i}$, $y_{i'} = \frac{\partial y}{\partial x^{i'}}$ $(i = 1, 2;\ i' = 1', 2')$. При этом предполагается, что поверхность S является поверхностью постоянной отрицательной кривизны $-\frac{1}{a^2}$ и, следовательно, функция $z(x^1, x^2)$ является одним из решений уравнения Монжа–Ампера

$$z_{11} z_{22} - (z_{12})^2 + \frac{(z_1)^2 + (z_2)^2 + 1}{a^2} = 0. \tag{2}$$

Система (1) определяет переменную y как функцию от $x^{1'}$, $x^{2'}$, соответствующую заранее заданной функции $z = z(x^1, x^2)$. Можно доказать, что функция $y(x^{1'}, x^{2'})$ также удовлетворяет уравнению Монжа–Ампера

$$y_{1'1'} y_{2'2'} - (y_{1'2'})^2 + \frac{(y_{1'})^2 + (y_{2'})^2 + 1}{a^2} = 0$$

и, следовательно, поверхность S' также является поверхностью постоянной отрицательной кривизны $-\frac{1}{a^2}$. Систему (1) можно рассматривать как систему, определяющую соответствие между двумя поверхностями с одной и той же постоянной отрицательной кривизной $-\frac{1}{a^2}$. Одновременно система (1) определяет отображение каждого из решений уравнения Монжа–Ампера в другое решение того же уравнения. Соответствие, заданное системой (1), получило название *преобразование Бианки–Ли* [3], [4].

В 1880 г. А. Бэклунд [5] обнаружил, что преобразование Бианки–Ли можно рассматривать как частный случай преобразований более общего типа, заданных системой вида

$$F_\alpha(x^1, x^2, z, z_1, z_2, x^{1'}, x^{2'}, y, y_{1'}, y_{2'}) = 0 \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4). \tag{3}$$

При этом предполагается, что систему (3) можно разрешить относительно x^1, x^2, $y_{1'}$, $y_{2'}$ и получить, в частности, уравнения

$$\begin{aligned} y_{1'} &= \phi_{1'}(x^{1'}, x^{2'}, y, z, z_1, z_2), \\ y_{2'} &= \phi_{2'}(x^{1'}, x^{2'}, y, z, z_1, z_2). \end{aligned} \tag{4}$$

Предполагается также, что система (4) интегрируема относительно y в том и только том случае, когда функция $z(x^1,\, x^2)$ является решением дифференциального уравнения

$$U(x^1, x^2, z, z_1, z_2, z_{11}, z_{12}, z_{22}) = 0. \tag{5}$$

В этом случае можно рассматривать соответствие между решениями $z(x^1, x^2)$ уравнения (5) и решениями системы (4) (при условии $z = z(x^1, x^2)$). Если при этом любое решение системы (4) является к тому же решением дифференциального уравнения

$$V(x^{1'}, x^{2'}, y, y_{1'}, y_{2'}, y_{1'1'}, y_{1'2'}, y_{2'2'}) = 0, \tag{5bis}$$

то соответствие, определенное системой (4), называют *преобразованием Бэклунда* (точнее *преобразованием Бианки–Ли–Бэклунда*) дифференциального уравнения (5) в дифференциальное уравнение (5bis).

Заметим, что А. Бэклунд трактовал эти преобразования как соответствия между парой поверхностей S и S' в R^3. Г. Дарбу [6] был первым, кто обратил внимание на то, что преобразования Бэклунда можно рассматривать как соответствия между интегральными многообразиями пары дифференциальных уравнений (или одного дифференциального уравнения), приведя в качестве примера автопреобразование Бэклунда для уравнения синус-Гордона

$$z_{12} = \sin z. \tag{6}$$

Такой подход к преобразованиям Бэклунда получил дальнейшее развитие в [7] и [8]. Подробная библиография содержится в [4].

В 1977 г. Ф. Пирани и Д. Робинсон [9] предложили иную трактовку понятия преобразования Бэклунда, в соответствии с которой преобразование Бэклунда является частным случаем более общего понятия *отображения Бэклунда.*

Отображение Бэклунда для заданного дифференциального уравнения с частными производными Ф. Пирани и Д. Робинсон определили как отображение

$$J^k(M, N_1) \times N_2 \xrightarrow{\psi} J^1(M, N_2),$$

удовлетворяющее некоторым дополнительным условиям ([10] или [4]). Здесь $J^k(M, N)$ — многообразие k-струй отображений из M в N; M — многообразие независимых переменных x^1, x^2; N_1 — одномерное многообразие с локальной координатой z (старая зависимая переменная); N_2 — одномерное многообразие с локальной координатой y (новая зависимая переменная).

В локальных координатах отображение Бэклунда ψ для дифференциального уравнения 2-го порядка (5) записывается следующим образом

$$\begin{aligned} y_1 &= y_1(x^i, z, z_j, \dots, z_{j_1 \dots j_k}, y), \\ y_2 &= y_2(x^i, z, z_j, \dots, z_{j_1 \dots j_k}, y), \end{aligned} \tag{7}$$

где $i, j = 1, 2$. При этом предполагается, что система (7) интегрируема в том и только в том случае, когда функция $z(x^1, x^2)$ является решением дифференциального уравнения (5). В дальнейшем мы будем называть систему (7), определяющую отображение Бэклунда, *системой Бэклунда.*

В 2001 г. мы предложили новую интерпретацию понятия отображения Бэклунда [11], [12]. Задание отображения Бэклунда трактуется как задание специальной связности, определяющей представление нулевой кривизны для заданного дифференциального уравнения (см. п. 6). При таком подходе понятие отображения Бэклунда становится более детерминированным, а система Бэклунда всегда будет интегрируемой в случае, когда $z(x^1, x^2)$ является решением уравнения (5) (и только в этом случае). При этом выясняется, что система Бэклунда не произвольна, но имеет весьма специальный вид. Появляется возможность последовательного, систематического изучения условий существования отображений Бэклунда. Отметим, что в данной работе рассматриваются преобразования Бэклунда как специальная глава теории связностей (с точки зрения практической теории дифференциальных уравнений преобразования Бэклунда — это лишь специфический прием отыскания решений нелинейных дифференциальных уравнений). Возможность такого подхода является с нашей точки зрения наиболее привлекательным обстоятельством, т. к. расширяет область применения теории связностей.

1.2. *Понятие отображения Коула–Хопфа* (CH-*отображения*). *Содержание работы.*

В данной работе изучаются отображения Бэклунда специального вида, для которых систему Бэклунда (7) можно представить в виде

$$\begin{aligned} y_1 &= y_1(x^i, z, z_j, \dots, z_{j_1 \dots j_k}), \\ y_2 &= y_2(x^i, z, z_j, \dots, z_{j_1 \dots j_k}), \end{aligned}$$

которые назовем *отображениями Коула–Хопфа*, т. к. первый пример подобного отображения был построен Коулом и Хопфом (пример 4.1). Задание преобразований Коула–Хопфа равносильно заданию потенциалов дифференциальных уравнений. Потенциалы, таким образом, получают геометрическую интерпретацию с точки зрения теории связностей. Геометрическая теория отображений Коула–Хопфа, хотя они и являются частным случаем отображений Бэклунда, имеет свою специфику. Она весьма интересна, содержательна и отнюдь не элементарна.

Опишем кратко структуру статьи. Предварительно заметим, что изучая дифференциальные уравнения с частными производными 2-го порядка общего вида (5), рассматриваем переменные x^1, x^2, z как адаптированные локальные координаты (2+1)-мерного расслоения H с 2-мерной базой (при этом x^1, x^2 являются локальными координатами на базе). Допустимые преобразования локальных координат имеют вид

$$\widetilde{x}^i = \psi^i(x^1, x^2) \quad (i = 1, 2); \quad \widetilde{z} = \psi^{2+1}(x^1, x^2, z).$$

Обозначим через x^i, z, p_j адаптированные локальные координаты в расслоении 1-струй J^1H. Локальные координаты в расслоении голономных 2-струй J^2H обозначим x^i, z, p_j, p_{kl} $(p_{kl} = p_{lk})$. Для любого сечения $\sigma \subset H$, заданного уравнением $z = z(x^1, x^2)$, можно рассматривать поднятые сечения (поднятия) $\sigma^r \subset J^rH$, заданные уравнениями $z = z(x^1, x^2)$; $p_{j_1 \dots j_k} = z_{j_1 \dots j_k}$ $(k = 1, \dots, r)$. Дифференциальное уравнение (5) можно записать в более общем виде $U(x^1, x^2, z, p_1, p_2, p_{11}, p_{12}, p_{22}) = 0$. На поднятии $\sigma^2 \subset J^2H$ произвольного сечения это уравнение принимает вид (5). Решения $z = z(x^1, x^2)$ уравнения (5) — это сечения $\sigma \subset H$, на поднятиях которых уравнение (5) удовлетворяется тождественно.

В п. 2 данной работы рассматриваются главные расслоения ${}^kr^*H$, ${}^kR^*H$ и ${}^k\Re^*H$ (фактор-многообразия многообразия реперов порядка k) при $k = 1$ и $k = 2$. Многообразие $k-$струй J^kH

является общей базой для каждого из этих расслоений (при фиксированном k). Структурной группой для ${}^k r^* H$ является 1-мерная группа G_1, для ${}^k R^* H$ — группа $SL(2)$, для ${}^k \Re^* H$ — группа $GL(2)$.

В п. 3 рассматриваются *специальные связности* [13] в ${}^k r^* H$. Далее наряду с главными расслоениями ${}^k r^* H$, ${}^k R^* H$, ${}^k \Re^* H$ рассматриваются ассоциированные с ними расслоения. Следуя [14], используем следующие обозначения. Главное расслоение с базой B и структурной группой G обозначим $P(B, G)$. Ассоциированное с ним расслоение с типовым слоем $\Im$ ($\Im$ — пространство представления структурной группы G) обозначим $\Im(P(B, G))$. Для нас представляют интерес ассоциированные расслоения с одномерным типовым слоем.

В п. 4 рассматриваются связности в $\Im({}^k r^* H)$ ($\dim \Im = 1$), порожденные специальными связностями в ${}^k r^* H$, определяющими представления нулевой кривизны для заданного дифференциального уравнения (5), которые назовем *связностями Коула–Хопфа класса* k. Уравнение Пфаффа

$$\overset{\mathrm{CH}}{}\underset{\sigma}{\widetilde{\theta}} = 0, \tag{8}$$

где ${}^{\mathrm{CH}}\underset{\sigma}{\widetilde{\theta}}$ — форма связности, соответствующая связности Коула–Хопфа, рассматриваемая над сечением $\sigma \subset H$, вполне интегрируемо в том и только том случае, когда сечение $\sigma \subset H$ является решением уравнения (5). Это уравнение Пфаффа задает отображение, при котором любое решение $\sigma \subset H$ дифференциального уравнения (5) переходит в сечение $\underset{\sigma}{\Sigma} \subset \Im({}^k r^* H)$ ($\dim \Im = 1$), являющееся решением уравнения Пфаффа (8) при заданном $\sigma \subset H$:

$$H \supset \sigma \to \underset{\sigma}{\Sigma} \subset \Im({}^k r^* H) \quad (\dim \Im = 1). \tag{9}$$

Отображение (9) назовем CH-*отображением класса* k, соответствующим дифференциальному уравнению (5), а уравнение (8) — *уравнением Пфаффа, задающим* CH-*отображение*. Существование CH-отображений эквивалентно существованию потенциалов (замечание 4.1). Доказано (теорема 3), что для существования CH-отображений (и, следовательно, потенциалов) дифференциального уравнения (5) необходимо, чтобы уравнение (5) было либо квазилинейным уравнением, либо уравнением типа Монжа–Ампера

$$z_{11} z_{22} - (z_{12})^2 + P z_{11} + Q z_{12} + R z_{22} + S = 0, \tag{10}$$

где P, Q, R, S зависят от x^1, x^2, z, z_1, z_2.

В п. 5 выведены условия существования CH-отображений (и, следовательно, потенциалов) классов 1 и 2 для некоторых типов дифференциальных уравнений 2-го порядка. Найдены, в частности, необходимые и достаточные условия существования CH-отображений класса 1 для уравнений вида $z_{11} + z_{22} + f(x^1, x^2, z, z_1, z_2) = 0$ и уравнений вида $z_{22} - f(x^1, x^2, z, z_1, z_2) = 0$. Доказано существование CH-отображений класса 2 для уравнений вида $z_{11} z_{22} - (z_{12})^2 + g(z) f(z_1, z_2) = 0$.

В п. 6 понятие связности Коула–Хопфа и понятие CH-отображения рассматриваются как частные случаи понятий связности Бэклунда и отображения Бэклунда.

В данной работе систематически используется инвариантный аналитический метод Э. Картана–Г.Ф. Лаптева (см. [14] или работы самого Г.Ф. Лаптева [15]–[19]). Все рассмотрения носят локальный характер.

2. Главные расслоения ${}^k r^* H$, ${}^k R^* H$, ${}^k \Re^* H$ ($k = 1, 2$)

Рассмотрим главные дифференциальные формы ω^1, ω^2, ω^{2+1} расслоенного многообразия H. Они удовлетворяют структурным уравнениям

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j, \quad d\omega^{2+1} = \omega^j \wedge \omega^{2+1}_j + \omega^{2+1} \wedge \omega^{2+1}_{2+1}.$$

В процессе правильного продолжения (см. об этой процедуре в [17]) возникает последовательность структурных форм расслоений реперов порядков $1, 2, \ldots$ (расслоений $R^1 H, R^2 H, \ldots$). При этом формы

$$\omega^i,\ \omega^{2+1},\ \omega^{2+1}_j,\ \omega^i_j,\ \omega^{2+1}_{2+1} \tag{11}$$

представляют собой систему структурных форм расслоения R^1H. На следующем этапе продолжения возникают формы

$$\omega^{2+1}_{jk},\ \omega^i_{jk},\ \omega^i_{j,2+1},\ \omega^{2+1}_{2+1,2+1}. \tag{12}$$

Формы (11) и (12) в совокупности представляют собой систему структурных форм расслоения R^1H. Заметим, что формы ω^i, ω^{2+1}, ω^{2+1}_j одновременно являются главными формами в многообразии 1-струй J^1H, а формы ω^i, ω^{2+1}, ω^{2+1}_j, ω^{2+1}_{kl} — главными формами в многообразии 2-струй J^2H. Можно выделить три фактор-многообразия многообразия R^1H:

- многообразие ${}^1r^*H$ со структурными формами ω^i, ω^{2+1}, ω^{2+1}_j, ϑ, где $\vartheta = \omega^1_1 + \omega^2_2$;
- многообразие ${}^1R^*H$ со структурными формами ω^i, ω^{2+1}, ω^{2+1}_j, ω, ω^2_1, ω^1_2, где $\omega = \omega^1_1 - \omega^2_2$;
- многообразие ${}^1\Re^*H$ со структурными формами ω^i, ω^{2+1}, ω^{2+1}_j, ω^i_j.

Можно выделить также три фактор-многообразия многообразия R^2H:

- многообразие ${}^2r^*H$ со структурными формами ω^i, ω^{2+1}, ω^{2+1}_j, ω^{2+1}_{kl}, ϑ;
- многообразие ${}^2R^*H$ со структурными формами ω^i, ω^{2+1}, ω^{2+1}_j, ω^{2+1}_{kl}, ω, ω^2_1, ω^1_2;
- многообразие ${}^2\Re^*H$ со структурными формами ω^i, ω^{2+1}, ω^{2+1}_j, ω^{2+1}_{kl}, ω^i_j.

Каждое из многообразий

$${}^kr^*H, \quad {}^kR^*H, \quad {}^k\Re^*H \quad (k=1,2) \tag{13}$$

имеет структуру главного расслоения. Многообразие 1-струй J^1H является общей базой расслоений ${}^1r^*H$, ${}^1R^*H$, ${}^1\Re^*H$, а многообразие 2-струй J^2H — общей базой расслоений ${}^2r^*H$, ${}^2R^*H$, ${}^2\Re^*H$. Структурными группами расслоений (13) (как при $k=1$, так и при $k=2$) являются группы G_1, $SL(2)$, $GL(2)$ соответственно. Совокупность слоевых форм в ${}^kr^*H$ состоит из одной формы ϑ; формы ω, ω^2_1, ω^1_2 — слоевые формы в ${}^kR^*H$; формы ω^i_j — слоевые формы в ${}^k\Re^*H$ (как при $k=1$, так и при $k=2$). При фиксации точки базы слоевые формы превращаются в инвариантные структурные формы соответствующей группы.

В дальнейшем будем рассматривать связности в расслоениях (13), *определяющие представления нулевой кривизны для заданного дифференциального уравнения* 2*-го порядка* (5), т. е. связности, у которых формы кривизны обращаются в нуль на решениях уравнения (5) (и только на решениях).

3. Специальные связности в ${}^kr^*H$ $(k=1,2)$

В главных расслоениях ${}^kr^*H$ $(k=1,2)$ можно задавать *специальные связности*, т. е. связности, у которых все коэффициенты связности, кроме коэффициентов при ω^1, ω^2, равны нулю (класс специальных связностей выделяется инвариантным образом [13]). Если связность специальная, то как в случае $k=1$, так и в случае $k=2$, совокупность форм связности состоит из одной формы $\widetilde{\vartheta}$, которая имеет вид $\widetilde{\vartheta} = \vartheta + h_1\omega^1 + h_2\omega^2$. Компоненты объекта связности (коэффициенты связности) h_1 и h_2 зависят от x^i, z, p_j, если $k=1$, и от x^i, z, p_j, p_{kl}, если $k=2$. Они удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned} &dh_1 - \frac{1}{2}h_1\vartheta - \frac{1}{2}h_1\omega - h_2\omega^2_1 - \omega^1_{11} - \omega^2_{12} = 0,\\ &dh_2 - \frac{1}{2}h_2\vartheta + \frac{1}{2}h_2\omega - h_1\omega^1_2 - \omega^1_{12} - \omega^2_{12} = 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Здесь равенство нулю имеет место по модулю главных форм.

Форма связности $\widetilde{\vartheta}$ удовлетворяет структурному уравнению

$$d\widetilde{\vartheta} = \Omega,$$

где $\Omega = R\omega^1 \wedge \omega^2 + \cdots$ — форма кривизны (здесь многоточием обозначена сумма слагаемых, содержащая произведения главных форм, отличные от $\omega^1 \wedge \omega^2$).

Выберем в качестве главных форм контактные формы

$$\omega^i = dx^i, \quad \omega^{2+1} = dz - p_i dx^i, \quad \omega_j^{2+1} = dp_j - p_{jk}dx^k, \quad \omega_{jk}^{2+1} = dp_{jk} - p_{jkl}dx^l.$$

В этом случае $\omega_j^i = 0$ (и, следовательно, $\vartheta = 0$) и форма связности $\widetilde{\vartheta}$ имеет вид

$$\widetilde{\vartheta} = h_1\omega^1 + h_2\omega^2. \tag{15}$$

Если при этом $k = 1$, то

$$R = \frac{\partial h_2}{\partial p_1}p_{11} + \left(\frac{\partial h_2}{\partial p_2} - \frac{\partial h_1}{\partial p_1}\right)p_{12} - \frac{\partial h_1}{\partial p_2}p_{22} + \frac{\partial h_2}{\partial z}p_1 - \frac{\partial h_1}{\partial z}p_2 + \frac{\partial h_2}{\partial x^1} - \frac{\partial h_1}{\partial x^2} \tag{16}$$

(напомним, что в этом случае коэффициенты связности зависят от x^i, z, p_j). Если $k = 2$, то

$$R = \frac{\partial h_2}{\partial p_{11}}p_{111} + \left(\frac{\partial h_2}{\partial p_{12}} - \frac{\partial h_1}{\partial p_{11}}\right)p_{112} + \left(\frac{\partial h_2}{\partial p_{22}} - \frac{\partial h_1}{\partial p_{12}}\right)p_{122} - \frac{\partial h_1}{\partial p_{22}}p_{222} + \\ + \frac{\partial h_2}{\partial p_1}p_{11} + \left(\frac{\partial h_2}{\partial p_2} - \frac{\partial h_1}{\partial p_1}\right)p_{12} - \frac{\partial h_1}{\partial p_2}p_{22} + \frac{\partial h_2}{\partial z}p_1 - \frac{\partial h_1}{\partial z}p_2 + \frac{\partial h_2}{\partial x^1} - \frac{\partial h_1}{\partial x^2} \tag{17}$$

(напомним, что в этом случае коэффициенты связности зависят от x^i, z, p_j, p_{kl}).

Заметим, что поскольку главные формы контактные, то поднятия $\sigma^3 \subset J^3H$ сечений $\sigma \subset H$ (и только они) являются интегральными многообразиями уравнений Пфаффа

$$\omega^{2+1} = 0, \quad \omega_j^{2+1} = 0, \quad \omega_{jk}^{2+1} = 0.$$

Следовательно, на поднятии любого сечения $\sigma \subset H$ структурное уравнение имеет вид

$$d\underset{\sigma}{\widetilde{\vartheta}} = \underset{\sigma}{R}\, x^1 \wedge dx^2,$$

где $\underset{\sigma}{R}$ — коэффициент R, рассматриваемый на поднятии сечения $\sigma \subset H$. Уравнение

$$\underset{\sigma}{R} = 0 \tag{18}$$

является при $k = 1$ квазилинейным уравнением 2-го порядка. При $k = 2$ уравнение (18) является, вообще говоря, уравнением 3-го порядка, но в некоторых особых случаях (см. далее лемму) может тоже оказаться уравнением 2-го порядка.

Если левая часть дифференциального уравнения 2-го порядка (5) отличается от $\underset{\sigma}{R}$ множителем, то рассматриваемая специальная связность определяет представление нулевой кривизны для дифференциального уравнения (5).

Рассмотрим три примера связностей в ${}^1r^*H$, определяющих представления нулевой кривизны для уравнения Бюргерса, обобщенного уравнения теплопроводности и уравнения Лапласа соответственно. Аналогичные примеры связностей в ${}^2r^*H$ будут приведены в конце п. 3.

Пример 3.1. Рассмотрим специальную связность в ${}^1r^*H$ с коэффициентами связности

$$h_1 = p_2 - \frac{z^2}{2}, \quad h_2 = z.$$

Эта связность определяет представление нулевой кривизны для уравнения Бюргерса

$$z_1 + zz_2 - z_{22} = 0. \tag{19}$$

Действительно, на любом сечении $\sigma \subset H$ форма связности

$$\underset{\sigma}{\widetilde{\vartheta}} = \left(z_2 - \frac{z^2}{2}\right)dx^1 + zdx^2$$

удовлетворяет структурному уравнению

$$d\underset{\sigma}{\widetilde{\vartheta}} = (z_1 + zz_2 - z_{22})dx^1 \wedge dx^2.$$

Пример 3.2. Специальная связность в ${}^1r^*H$ с коэффициентами связности

$$h_1 = p_2, \quad h_2 = \ln z$$

определяет представление нулевой кривизны для обобщенного уравнения теплопроводности

$$z_1 - zz_{22} = 0. \tag{20}$$

Действительно, на любом сечении $\sigma \subset H$ форма связности $\underset{\sigma}{\widetilde{\vartheta}} = z_2 dx^1 + \ln z\, dx^2$ удовлетворяет структурному уравнению

$$d\underset{\sigma}{\widetilde{\vartheta}} = \frac{1}{2}(z_1 - zz_{22})dx^1 \wedge dx^2.$$

Пример 3.3. Специальная связность в ${}^1r^*H$ с коэффициентами связности

$$h_1 = p_2, \quad h_2 = -z_1$$

определяет представление нулевой кривизны для уравнения Лапласа

$$z_{11} + z_{22} = 0. \tag{21}$$

На любом сечении $\sigma \subset H$ форма связности $\underset{\sigma}{\widetilde{\vartheta}} = z_2 dx^1 - z_1 dx^2$ удовлетворяет структурному уравнению $d\underset{\sigma}{\widetilde{\vartheta}} = -(z_{11} + z_{22})dx^1 \wedge dx^2$.

Лемма. *Если специальная связность в ${}^2r^*H$ определяет представление нулевой кривизны для дифференциального уравнения с частными производными 2-го порядка, то коэффициенты связности имеют следующий вид*:

$$\begin{aligned} h_1 &= \varphi p_{11} + \psi p_{12} + \chi_1, \\ h_2 &= \varphi p_{12} + \psi p_{22} + \chi_2, \end{aligned} \tag{22}$$

где φ, ψ, χ_1, χ_2 — некоторые функции переменных x^1, x^2, z, p_1, p_2.

Доказательство. Заметим (см. (17)), что уравнение (18) является уравнением 2-го порядка в том и только том случае, когда коэффициенты связности h_1 и h_2 удовлетворяют условиям

$$\frac{\partial h_1}{\partial p_{22}} = 0, \tag{23}$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial p_{11}} = 0, \tag{24}$$

$$\frac{\partial h_1}{\partial p_{11}} = \frac{\partial h_2}{\partial p_{12}}, \tag{25}$$

$$\frac{\partial h_1}{\partial p_{12}} = \frac{\partial h_2}{\partial p_{22}}. \tag{26}$$

Из (23) следует, что h_1 не зависит от p_{22}. Очевидно, $\frac{\partial h_1}{\partial p_{11}}$ также не зависит от p_{22}.

Из (24) следует, что h_2 не зависит от p_{11}. Очевидно, $\frac{\partial h_2}{\partial p_{12}}$также не зависит от p_{11}.

Таким образом, принимая во внимание (25), имеем

$$\frac{\partial h_1}{\partial p_{11}} = \frac{\partial h_2}{\partial p_{12}} = \varphi, \tag{27}$$

где φ не зависит ни от p_{11}, ни от p_{22}. Из (27) следует, в частности, что

$$h_1 = p_{11}\varphi + \psi_1, \tag{28}$$

где ψ_1 (так же, как и φ) не зависит ни от p_{11}, ни от p_{22}. Следовательно,

$$\frac{\partial h_1}{\partial p_{12}} = p_{11}\frac{\partial \varphi}{\partial p_{12}} + \frac{\partial \psi_1}{\partial p_{12}}. \tag{29}$$

Как уже было отмечено выше, h_2 и, следовательно, $\frac{\partial h_2}{\partial p_{22}}$, не зависит от p_{11}. Это в силу (26) и (29) означает

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p_{12}} = 0.$$

Видим, что

$$\varphi = \varphi(x^1, x^2, z, p_1, p_2). \tag{30}$$

Следовательно,

$$h_1 = p_{11}\varphi(x^1, x^2, z, p_1, p_2) + \psi_1(x^1, x^2, z, p_1, p_2, p_{12}). \tag{31}$$

Принимая во внимание (30), а также то, что $\frac{\partial h_2}{\partial p_{12}} = \varphi$ (см. (27)) и h_2 не зависит от p_{11}, можно заключить

$$h_2 = p_{12}\varphi(x^1, x^2, z, p_1, p_2) + \psi_2(x^1, x^2, z, p_1, p_2, p_{22}). \tag{32}$$

Согласно (31) и (32) заметим, что равенство (26) может иметь место только в том случае, когда

$$\frac{\partial \psi_1(x^1, x^2, z, p_1, p_2, p_{12})}{\partial p_{12}} = \frac{\partial \psi_2(x^1, x^2, z, p_1, p_2, p_{22})}{\partial p_{22}}.$$

Последнее означает, что

$$\begin{aligned} \psi_1 &= p_{12}\psi + \chi_1, \\ \psi_2 &= p_{22}\psi + \chi_2, \end{aligned} \tag{33}$$

где ψ, χ_1, χ_2 — некоторые функции переменных x^1, x^2, z, p_1, p_2.

Утверждение леммы следует из (31), (32) и (33). $\square$

Следствие. При $k = 2$ коэффициент $\underset{\sigma}{R}$ в силу (17) и (22) имеет вид

$$\begin{aligned} \underset{\sigma}{R} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial z_1} - \frac{\partial \varphi}{\partial z_2}\right)(z_{11}z_{22} - (z_{12})^2) + \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial z}z_2 - \frac{\partial \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial \chi_2}{\partial z_1}\right)z_{11} + \\ + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}z_1 - \frac{\partial \psi}{\partial z}z_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x^1} - \frac{\partial \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial \chi_2}{\partial z_2} - \frac{\partial \chi_1}{\partial z_1}\right)z_{12} + \\ + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}z_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x^1} - \frac{\partial \chi_1}{\partial z_2}\right)z_{22} + \frac{\partial \chi_2}{\partial z}z_1 - \frac{\partial \chi_1}{\partial z}z_2 + \frac{\partial \chi_2}{\partial x^1} - \frac{\partial \chi_1}{\partial x^2}. \end{aligned} \tag{34}$$

Ввиду (16) и (34) очевидна

Теорема 1. *Если для дифференциального уравнения с частными производными 2-го порядка (5) существует специальная связность в ${}^1r^*H$, определяющая представление нулевой кривизны, то уравнение (5) квазилинейное.*

Если для дифференциального уравнения (5) существует специальная связность в ${}^2r^*H$, определяющая представление нулевой кривизны, и при этом коэффициенты φ и ψ (см. (22)) удовлетворяют соотношениям $\frac{\partial \varphi}{\partial p_2} = \frac{\partial \psi}{\partial p_1}$, то уравнение (5) и в этом случае квазилинейное. Если же $\frac{\partial \varphi}{\partial p_2} \neq \frac{\partial \psi}{\partial p_1}$, то уравнение (5) является уравнением типа Монжа–Ампера (10).

Приведем два примера специальных связностей, заданных в ${}^2r^*H$, одна из которых определяет представление нулевой кривизны для классического уравнения Монжа–Ампера (2), а другая для уравнения

$$z_{11}z_{22} - (z_{12})^2 - (z_1 z_2)^{\frac{4}{3}} = 0, \tag{35}$$

играющего важную роль в газовой динамике [20].

Пример 3.4. Специальная связность в ${}^2r^*H$ с коэффициентами связности

$$h_1 = \frac{a^2}{2}p_{11}\ln\left((p_1)^2 + (p_2)^2 + 1\right) + z, \quad h_2 = \frac{a^2}{2}p_{12}\ln\left((p_1)^2 + (p_2)^2 + 1\right)$$

определяет представление нулевой кривизны для классического уравнения Монжа–Ампера (2). Действительно, на каждом сечении $\sigma \subset H$ форма связности

$$\underset{\sigma}{\widetilde{\vartheta}} = \left(\frac{a^2}{2}z_{11}\ln\left((z_1)^2 + (z_2)^2 + 1\right) + z\right)dx^1 + \frac{a^2}{2}z_{12}\ln\left((z_1)^2 + (z_2)^2 + 1\right)dx^2$$

удовлетворяет структурному уравнению

$$d\underset{\sigma}{\widetilde{\vartheta}} = -a^2\frac{z_2}{(z_1)^2 + (z_2)^2 + 1}\left(z_{11}z_{22} - (z_{12})^2 + \frac{(z_1)^2 + (z_2)^2 + 1}{a^2}\right)dx^1 \wedge dx^2.$$

Пример 3.5. Рассмотрим специальную связность в ${}^2r^*H$, для которой

$$h_1 = -\frac{3}{2}(p_1)^{-\frac{4}{3}}(p_2)^{\frac{2}{3}}p_{11} + z, \quad h_2 = -\frac{3}{2}(p_1)^{-\frac{4}{3}}(p_2)^{\frac{2}{3}}p_{12}.$$

Эта связность определяет представление нулевой кривизны для уравнения (35). Действительно, на каждом сечении $\sigma \subset H$ форма связности

$$\underset{\sigma}{\widetilde{\vartheta}} = \left(-\frac{3}{2}(z_1)^{-\frac{4}{3}}(z_2)^{\frac{2}{3}}z_{11} + z\right)dx^1 - \frac{3}{2}(z_1)^{-\frac{4}{3}}(z_2)^{\frac{2}{3}}z_{12}dx^2$$

удовлетворяет структурному уравнению

$$d\underset{\sigma}{\widetilde{\vartheta}} = \frac{z_{11}z_{22} - (z_{12})^2 - (z_1z_2)^{\frac{4}{3}}}{(z_1)^{\frac{4}{3}}(z_2)^{\frac{1}{3}}}dx^1 \wedge dx^2.$$

4. Связности Коула–Хопфа, CH-отображения и потенциалы. Необходимые условия существования CH-отображений

Наряду со связностями в главных расслоениях ${}^1r^*H$ и ${}^2r^*H$ можно рассматривать порожденные ими связности в ассоциированных расслоениях. Для нас интерес представляют связности в ассоциированных расслоениях с одномерным типовым слоем $\Im({}^kr^*H)$ ($\dim\Im = 1$) при $k = 1$ и $k = 2$.

Известно (напр., [14]), что для связности в ассоциированном расслоении $\Im(P(B,G))$ ($\dim\Im = 1$), порожденной связностью в главном расслоении $P(B,G)$, форма связности имеет вид

$$\widetilde{\theta} = dY - \xi_A(Y)\widetilde{\omega}^A.$$

Здесь $\widetilde{\omega}^A$ — формы связности в $P(B,G)$ $(A,B,\ldots = 1,\ldots,\dim G)$, коэффициенты $\xi_A(Y)$ удовлетворяют тождествам Ли

$$d\xi_B\xi_C - d\xi_C\xi_B = \xi_A C^A_{BC}dY,$$

где C^A_{BC} — структурные константы группы Ли G.

Форма $\widetilde{\theta}$ удовлетворяет структурному уравнению

$$d\widetilde{\theta} = \widetilde{\theta} \wedge \left(-\frac{d\xi_A}{dY}\widetilde{\omega}^A\right) - \xi_A\Omega^A, \tag{36}$$

где Ω^A — формы кривизны, соответствующие связности, заданной в $P(B,G)$.

Для связности в $\Im({}^k r^* H)$ $(\dim \Im = 1)$, порожденной связностью, заданной в ${}^k r^* H$ $(k = 1, 2)$, форма связности $\widetilde{\theta}$ имеет вид

$$\widetilde{\theta} = dY - \xi(Y)\widetilde{\vartheta} \quad (\xi(Y) \neq 0),$$

где $\xi(Y)$ — некоторая функция от Y. Здесь $\widetilde{\vartheta}$ — форма связности, соответствующая связности, заданной в ${}^k r^* H$.

Замечание 4.1. Форму $\widetilde{\theta}$ можно записать в виде $\widetilde{\theta} = \xi(Y)(dy - \widetilde{\vartheta})$, где y — некоторая первообразная функции $\frac{1}{\xi(Y)}$.

Связность в $\Im({}^k r^* H)$ $(\dim \Im = 1)$ условимся называть *связностью Коула–Хопфа* (или CH-*связностью*) класса k для дифференциального уравнения (5), если она порождена специальной связностью в ${}^k r^* H$, определяющей представление нулевой кривизны для уравнения (5).

Пусть ${}^{\mathrm{CH}}\widetilde{\theta}$ — форма связности, соответствующая CH-связности класса k для заданного дифференциального уравнения (5). Отметим, принимая во внимание (36), что в случае, когда сечение $\sigma \subset H$ является решением уравнения (5) (и только в этом случае) уравнение Пфаффа (8) вполне интегрируемо. Оно определяет отображение (9), которое назовем *отображением Коула–Хопфа* (или CH-*отображением*) класса k для дифференциального уравнения (5). Уравнение Пфаффа (8) будем называть *уравнением Пфаффа, задающим* CH-*отображение.*

Заметим, что в случае, когда главные формы контактные, уравнение Пфаффа (8) в силу замечания 4.1 имеет вид

$$dy - \underset{\sigma}{h_1}\, dx^1 - \underset{\sigma}{h_2}\, dx^2 = 0$$

и, следовательно, эквивалентно следующей системе уравнений с частными производными (которую назовем *системой Коула–Хопфа*)

$$y_1 = \underset{\sigma}{h_1}, \quad y_2 = \underset{\sigma}{h_2}\,. \tag{37}$$

Здесь $\underset{\sigma}{h_1}$ и $\underset{\sigma}{h_2}$ — коэффициенты связности, рассматриваемые на сечении $\sigma \subset H$.

Если любое решение системы (37) (при заданном $z = z(x^1, x^2)$) является в то же время решением дифференциального уравнения (5bis), то CH-отображение называется CH-*преобразованием дифференциального уравнения* (5) *в дифференциальное уравнение* (5bis).

Очевидно, в силу (22) и (37), справедлива

Теорема 2. *Если дифференциальное уравнение с частными производными* 2*-го порядка допускает* CH*-отображение класса* 2*, то система Коула–Хопфа имеет вид*

$$\begin{aligned} y_1 &= \varphi(x^i, z, z_j)z_{11} + \psi(x^i, z, z_j)z_{12} + \chi_1(x^i, z, z_j), \\ y_2 &= \varphi(x^i, z, z_j)z_{12} + \psi(x^i, z, z_j)z_{22} + \chi_2(x^i, z, z_j). \end{aligned} \tag{38}$$

Следствием теоремы 1 является

Теорема 3. *Если дифференциальное уравнение с частными производными* 2*-го порядка допускает* CH*-отображение класса* 2*, то оно является либо уравнением типа Монжа–Ампера* (10)*, если* $\frac{\partial\varphi}{\partial p_2} \neq \frac{\partial\psi}{\partial p_1}$*, либо квазилинейным уравнением, если* $\frac{\partial\varphi}{\partial p_2} = \frac{\partial\psi}{\partial p_1}$).

Пример 4.1. Рассмотрим CH-отображение класса 1, для которого система Коула–Хопфа имеет вид

$$y_1 = z_2 - \frac{z^2}{2}, \quad y_2 = z. \tag{39}$$

Соответствующая CH-связность порождена связностью в главном расслоении ${}^1 r^* H$, определяющей представление нулевой кривизны для уравнения Бюргерса (19) (см. пример 3.1).

Из второго уравнения системы (39) следует $z_2 = y_{22}$. Подставив $z = y_2$ и $z_2 = y_{22}$ в первое уравнение системы (39), получим уравнение

$$y_1 = y_{22} - \frac{1}{2}(y_2)^2. \tag{19bis}$$

Таким образом, рассматриваемое СН-отображение является СН-преобразованием уравнения Бюргерса (19) в уравнение (19bis).

Заметим, что при замене $y = -2\ln Y$ уравнение (19bis) превращается в уравнение теплопроводности

$$Y_1 = Y_{22}$$

О преобразовании, определенном системой (39), имеется упоминание в [21] со ссылкой на работы [22] и [23]. Это, по-видимому, самый первый получивший известность пример подобных преобразований.

Пример 4.2. Рассмотрим СН-преобразование класса 1, для которого система Коула–Хопфа имеет вид

$$y_1 = z_2, \quad y_2 = \ln z. \tag{40}$$

Соответствующая СН-связность порождена связностью в ${}^1r^*H$, определяющей представление нулевой кривизны для обобщенного уравнения теплопроводности (20) (см. пример 3.2).

Здесь $z = e^{y_2}$ и, следовательно, $z_2 = e^{y_2}y_{22}$. Подставив это выражение в первое уравнение системы (40), получим уравнение

$$y_1 = e^{y_2}y_{22}, \tag{20bis}$$

в которое переходит уравнение (20) при рассматриваемом преобразовании.

Пример 4.3. Соотношения Коши–Римана

$$y_1 = z_2, \quad y_2 = -z_1 \tag{41}$$

представляют собой систему Коула–Хопфа. Соответствующая СН-связность класса 1 порождена связностью в ${}^1r^*H$, определяющей представление нулевой кривизны для уравнения Лапласа (21) (см. пример 3.3).

Любое решение системы (41) (при заданном заранее $z = z(x^1, x^2)$) является одновременно решением уравнения Лапласа относительно y:

$$y_{11} + y_{22} = 0. \tag{21bis}$$

Следовательно, соотношения Коши–Римана описывают автопреобразование Коула–Хопфа уравнения Лапласа.

Заметим, что систему (41) можно рассматривать и как систему, определяющую СН-преобразование уравнения (21bis) в уравнение (21).

Пример 4.4. Связность в ${}^2r^*H$ из примера 3.4 определяет представление нулевой кривизны для классического уравнения Монжа–Ампера (2). Она порождает СН-связность класса 2. Система Коула–Хопфа, определяющая соответствующее СН-отображение для дифференциального уравнения (2), имеет вид

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{a^2}{2} z_{11} \ln\left((z_1)^2 + (z_2)^2 + 1\right) + z, \\ y_2 &= \frac{a^2}{2} z_{12} \ln\left((z_1)^2 + (z_2)^2 + 1\right). \end{aligned} \tag{42}$$

Пример 4.5. Связность в ${}^2r^*H$ из примера 3.5 определяет представление нулевой кривизны для дифференциального уравнения (35). Она порождает СН-связность класса 2. Система Коула–Хопфа, определяющая соответствующее СН-отображение для дифференциального уравнения (35), имеет вид

$$\begin{aligned} y_1 &= -\frac{3}{2}(z_1)^{-\frac{4}{3}}(z_2)^{\frac{2}{3}}z_{11} + z, \\ y_2 &= -\frac{3}{2}(z_1)^{-\frac{4}{3}}(z_2)^{\frac{2}{3}}z_{12}. \end{aligned} \tag{43}$$

Замечание 4.2. Задание СН-связности для дифференциального уравнения (5) равносильно заданию потенциала.

В справедливости этого утверждения можно убедиться следующим образом. Обычно (напр., [21]) потенциалы связывают с законами сохранения, т. е. с представлением дифференциального уравнения (5) в виде

$$\frac{\partial F_1}{\partial x^1} + \frac{\partial F_2}{\partial x^2} = 0,$$

где F_1, F_2 — функции от x^1, x^2, z, z_1, z_2. При этом потенциальной функцией называют функцию w такую, что

$$dw = F_2 dx^1 - F_1 dx^2 \tag{44}$$

на решениях дифференциального уравнения (5) (и только на решениях). Очевидно, уравнение Пфаффа (44), определяющее потенциальную функцию, и уравнение Пфаффа (8), задающее СН-отображение, имеют различие лишь в обозначениях.

5. Условия существования СН-отображений для некоторых типов дифференциальных уравнений второго порядка

5.1. *Необходимое и достаточное условие существования* СН-*отображений класса* 1 *для уравнений вида* $z_{22} - f(x^1, x^2, z, z_1, z_2) = 0$.

Теорема 4. *Дифференциальное уравнение*

$$z_{22} - f(x^1, x^2, z, z_1, z_2) = 0 \tag{45}$$

допускает СН-*отображения* (*и, следовательно, потенциалы*) *класса* 1 *в том и только том случае, когда оно имеет вид*

$$z_{22} - \frac{1}{z_1\Phi_{z_2z_2} + \Psi_{z_2}}\{z_1(\Phi_z - z_2\Phi_{zz_2} - \Phi_{x^2z_2}) - z_2\Psi_z + \Phi_{x^1} - \Psi_{x^2}\} = 0, \tag{46}$$

где $\Phi = \Phi(x^1, x^2, z, z_2)$, $\Psi = \Psi(x^1, x^2, z, z_2)$ $(z_1\Phi_{z_2z_2} + \Psi_{z_2} \neq 0)$.

Система Коула–Хопфа для уравнения (46) *имеет вид*

$$\begin{aligned} &y_1 = z_1\Phi_{z_2}(x^1, x^2, z, z_2) + \Psi(x^1, x^2, z, z_2), \\ &y_2 = \Phi(x^1, x^2, z, z_2). \end{aligned} \tag{47}$$

Доказательство. СН-связность для дифференциального уравнения (45) порождается специальной связностью в ${}^1r^*H$, определяющей представление нулевой кривизны. Если такая связность существует, то коэффициент R (см. (16)) и левая часть уравнения

$$p_{22} - f(x^1, x^2, z, p_1, p_2) = 0 \tag{45*}$$

отличаются друг от друга множителем. Следовательно, должны иметь место равенства

$$\frac{\partial h_2}{\partial p_1} = 0, \quad \frac{\partial h_1}{\partial p_1} = \frac{\partial h_2}{\partial p_2},$$

из которых следует $h_2 = \Phi(x^1, x^2, z, p_2)$, $\frac{\partial h_1}{\partial p_1} = \Phi_{p_2}(x^1, x^2, z, p_2)$, где $\Phi(x^1, x^2, z, p_2)$ — некоторая функция. Это означает, что существует еще одна функция $\Psi(x^1, x^2, z, p_2)$ такая, что

$$\begin{aligned} h_1 &= p_1 \Phi_{p_2}(x^1, x^2, z, p_2) + \Psi(x^1, x^2, z, p_2), \\ h_2 &= \Phi(x^1, x^2, z, p_2), \end{aligned} \tag{48}$$

и, следовательно, соотношения (47) имеют место.

Подставив (48) в (16), получим

$$\frac{-R}{p_1\Phi_{p_2p_2} + \Psi_{p_2}} = p_{22} - \frac{1}{p_1\Phi_{p_2p_2} + \Psi_{p_2}}\{p_1(\Phi_z - p_2\Phi_{zp_2} - \Phi_{x^2p_2}) - p_2\Psi_z + \Phi_{x^1} - \Psi_{x^2}\}.$$

Теперь очевидно, уравнение (45), допускающее СН-отображения класса 1, должно иметь вид (46). □

Замечание 5.1. Уравнение Бюргерса (19) — это уравнение (46), где $\Phi = z$, $\Psi = z_2 - \frac{z^2}{2}$. При таком выборе Φ и Ψ система (47) превращается в систему (40) (пример 4.2).

5.2. *Необходимое и достаточное условие существования* СН-*отображений класса* 1 *для уравнений вида* $z_{11} + z_{22} + f(x^1, x^2, z, z_1, z_2) = 0$.

Теорема 5. *Дифференциальное уравнение*

$$z_{11} + z_{22} + f(x^1, x^2, z, z_1, z_2) = 0 \tag{49}$$

допускает СН-*отображения* (*и, следовательно, потенциалы*) *класса* 1 *в том и только том случае, когда оно имеет вид*

$$z_{11} + z_{22} + \frac{1}{\Phi_{z_1z_2}}\{z_1(\Phi_{zz_2} + {}^2\Psi_z) + z_2(\Phi_{zz_1} + {}^1\Psi_z) + \Phi_{x^1z_2} + \Phi_{x^2z_1} + {}^2\Psi_{x^1} + {}^1\Psi_{x^2}\} = 0, \tag{50}$$

где $\Phi = \Phi(x^1, x^2, z, z_1, z_2)$ ($\Phi_{z_1z_2} \neq 0$), ${}^1\Psi = {}^1\Psi(x^1, x^2, z, z_1)$, ${}^2\Psi = {}^2\Psi(x^1, x^2, z, z_2)$ — *функции, для которых*

$$\Phi_{z_1z_1} + \Phi_{z_2z_2} + {}^1\Psi_{z_1} + {}^2\Psi_{z_2} = 0. \tag{51}$$

Система Коула–Хопфа для уравнения (50) *имеет вид*

$$\begin{aligned} y_1 &= -\Phi_{z_1}(x^1, x^2, z, z_1, z_2) - {}^1\Psi(x^1, x^2, z, z_1), \\ y_2 &= \Phi_{z_2}(x^1, x^2, z, z_1, z_2) + {}^2\Psi(x^1, x^2, z, z_2). \end{aligned} \tag{52}$$

Доказательство. СН-связность для дифференциального уравнения (49) порождается специальной связностью в ${}^1r^*H$, определяющей представление нулевой кривизны. Если такая связность существует, то коэффициент R (см. (16)) и левая часть уравнения

$$p_{11} + p_{22} + f(x^1, x^2, z, p_1, p_2) = 0 \tag{49*}$$

отличаются друг от друга множителем. Можно рассматривать этот множитель как смешанную производную $\Phi_{p_1p_2}$ некоторой функции $\Phi(x^1, x^2, z, p_1, p_2)$. Таким образом,

$$R = \Phi_{p_1p_2}(p_{11} + p_{22} + f). \tag{53}$$

Из (53) в силу (16) следует

$$\frac{\partial h_2}{\partial p_1} = -\frac{\partial h_1}{\partial p_2} = \Phi_{p_1p_2}, \tag{54}$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial p_2} - \frac{\partial h_1}{\partial p_1} = 0. \tag{55}$$

Соотношения (54) можно переписать следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial p_2}(h_1 + \Phi_{p_1}) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial p_1}(h_2 - \Phi_{p_2}) = 0.$$

Это означает, что $h_1 = -\Phi_{p_1} - {}^1\Psi$, $h_2 = \Phi_{p_2} + {}^2\Psi$, где ${}^1\Psi = {}^1\Psi(x^1, x^2, z, z_1)$, ${}^2\Psi = {}^2\Psi(x^1, x^2, z, z_2)$ — некоторые функции.

Таким образом,

$$h_1 = -\Phi_{p_1} - {}^1\Psi, \quad h_2 = \Phi_{p_2} + {}^2\Psi \tag{56}$$

и, следовательно, имеют место соотношения (52).

Подставив (56) в (16), получим

$$\frac{R}{\Phi_{p_1p_2}} = p_{11} + p_{22} + \frac{1}{\Phi_{p_1p_2}}\{p_1(\Phi_{zp_2} + {}^2\Psi_z) + p_2(\Phi_{zp_1} + {}^1\Psi_z) + \Phi_{x^1p_2} + \Phi_{x^2p_1} + {}^2\Psi_{x^1} + {}^1\Psi_{x^2}\}.$$

Следовательно, уравнение (49) должно иметь вид (50).

Заметим также, что, подставив (56) в (55), получим соотношение $\Phi_{p_1p_1} + \Phi_{p_2p_2} + {}^1\Psi_{p_1} + {}^2\Psi_{p_2} = 0$, которое на сечениях $\sigma \subset H$ превращается в (51). □

Замечание 5.2. Уравнение Лапласа (21) — это уравнение вида (50), в котором $\Phi = z_1z_2$, ${}^1\Psi = {}^2\Psi = 0$. В этом случае система (52) превращается в систему (41) (пример 4.3).

Следствием теоремы 5 является

Теорема 6. *Дифференциальное уравнение вида*

$$z_{11} + z_{22} = f(z) \tag{57}$$

допускает CH-*отображения* (*следовательно, допускает потенциалы*) *класса* 1, *для которых система Коула–Хопфа имеет вид*

$$\begin{aligned} y_1 &= -z_1z_2, \\ y_2 &= \frac{1}{2}(z_1)^2 - \int f(z)dz - \frac{1}{2}(z_2)^2. \end{aligned} \tag{58}$$

Доказательство. Нетрудно проверить, что условия теоремы 5 будут выполнены, если взять

$$\Phi = \frac{1}{2}(z_1)^2 z_2 - z_2 \int f(z)dz - \frac{1}{2}(z_2)^2, \quad {}^1\Psi = 0, \quad {}^2\Psi = z_2 - \frac{1}{2}(z_2)^2.$$

В этом случае дифференциальное уравнение (50) имеет вид (57) и система (52) имеет вид (58). □

5.3. *Существование* CH-*отображений класса* 2 *для уравнений вида*

$$z_{11}z_{22} - (z_{12})^2 + g(z)f(z_1, z_2) = 0 \quad (f(z_1, z_2) \neq 0).$$

Справедлива

Теорема 7. *Дифференциальное уравнение*

$$z_{11}z_{22} - (z_{12})^2 + g(z)f(z_1, z_2) = 0 \quad (f(z_1, z_2) \neq 0) \tag{59}$$

допускает CH-*отображения* (*следовательно, допускает потенциалы*) *класса* 2, *для которых система Коула–Хопфа имеет вид*

$$\begin{aligned} y_1 &= \Phi(z_1, z_2)z_{11} + G(z), \\ y_2 &= \Phi(z_1, z_2)z_{12}, \end{aligned} \tag{60}$$

где $\Phi(z_1, z_2)$ — *функция, удовлетворяющая условию* $\frac{\partial \Phi}{\partial z_2} = \frac{z_2}{f(z_1, z_2)}$, *а* $G(z)$ — *первообразная функции* $g(z)$.

Доказательство. Рассмотрим специальную связность в ${}^2r^*H$ с коэффициентами

$$h_1 = \Phi(p_1, p_2)p_{11} + G(z), \quad h_2 = \Phi(p_1, p_2)p_{12}.$$

На любом сечении $\sigma \subset H$ форма связности

$$d\underset{\sigma}{\widetilde{\vartheta}} = (\Phi(z_1, z_2)z_{11} + G(z))dx^1 + \Phi(z_1, z_2)z_{12}dx^2$$

удовлетворяет структурному уравнению

$$d\underset{\sigma}{\widetilde{\vartheta}} = -\frac{z_2}{f(z_1, z_2)}(z_{11}z_{22} - (z_{12})^2 + g(z)f(z_1, z_2))dx^1 \wedge dx^2.$$

Эта связность определяет представление нулевой кривизны для дифференциального уравнения (59). Следовательно, для уравнения (59) существует CH-отображение. При этом система Коула–Хопфа имеет вид (60). □

Замечание 5.3. Классическое уравнение Монжа–Ампера (2) является уравнением вида (59), в котором

$$f(z_1, z_2) = \frac{(z_1)^2 + (z_2)^2 + 1}{a^2}, \quad g(z) = 1.$$

Функции $\Phi(z_1, z_2)$ и $G(z)$ можно выбрать следующим образом:

$$\Phi(z_1, z_2) = \frac{a^2}{2}\ln\left((z_1)^2 + (z_2)^2 + 1\right), \quad G(z) = z.$$

Система Коула–Хопфа (60) превращается в этом случае в систему (42) (пример 4.4).

Уравнение (35) также является уравнением вида (59). В этом случае

$$f(z_1, z_2) = -(z_1z_2)^{\frac{4}{3}}, \quad g(z) = 1.$$

Можно выбрать

$$\Phi(z_1, z_2) = -\frac{3}{2}(z_1)^{-\frac{4}{3}}(z_2)^{\frac{2}{3}}, \quad G(z) = z.$$

Система Коула–Хопфа (60) превращается при этом в систему (43) (пример 4.5).

6. Связности Коула–Хопфа как частный случай связностей Бэклунда

6.1. *Специальные связности в* ${}^kR^*H$ $(k = 1, 2)$. Наряду со специальными связностями в ${}^kr^*H$ (см. п. 3) можно рассматривать специальные связности в ${}^kR^*H$ и в ${}^k\Re^*H$, где $k = 1$ или $k = 2$. Для специальных связностей в ${}^kR^*H$ формы связности имеют вид

$$\widetilde{\omega} = \omega + \gamma_1\omega^1 + \gamma_2\omega^2, \quad \widetilde{\omega}_1^2 = \omega_1^2 + \gamma_{11}^2\omega^1 + \gamma_{12}^2\omega^2, \qquad \widetilde{\omega}_2^1 = \omega_2^1 + \gamma_{21}^1\omega^1 + \gamma_{22}^1\omega^2.$$

Коэффициенты связности

$$\gamma_1, \ \ \gamma_{11}^2, \ \ \gamma_{21}^1, \ \ \gamma_2, \ \ \gamma_{12}^2, \ \ \gamma_{22}^1 \tag{61}$$

в случае $k = 1$ зависят от x^i, z, p_j, а в случае $k = 2$ от x^i, z, p_j, p_{kl}. Они удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned}
d\gamma_1 - \frac{1}{2}\gamma_1\vartheta - \frac{1}{2}\gamma_1\omega - (\gamma_2 + 2\gamma^1_{21})\omega^2_1 + 2\gamma^2_{11}\omega^1_2 - \omega^1_{11} + \omega^2_{12} = 0,\\
d\gamma_2 - \frac{1}{2}\gamma_2\vartheta + \frac{1}{2}\gamma_2\omega - 2\gamma^1_{22}\omega^2_1 - (\gamma_1 - 2\gamma^2_{12})\omega^1_2 - \omega^1_{12} + \omega^2_{22} = 0,\\
d\gamma^2_{11} - \frac{1}{2}\gamma^2_{11}\vartheta - \frac{3}{2}\gamma^2_{11}\omega + (\gamma_1 - \gamma^2_{12})\omega^2_1 - \omega^2_{11} = 0,\\
d\gamma^2_{12} - \frac{1}{2}\gamma^2_{12}\vartheta - \frac{1}{2}\gamma^2_{12}\omega + \gamma_2\omega^2_1 - \gamma^2_{11}\omega^1_2 - \omega^2_{12} = 0,\\
d\gamma^1_{21} - \frac{1}{2}\gamma^1_{21}\vartheta + \frac{1}{2}\gamma^1_{21}\omega - \gamma^1_{22}\omega^2_1 - \gamma_1\omega^1_2 - \omega^1_{21} = 0,\\
d\gamma^1_{22} - \frac{1}{2}\gamma^1_{22}\vartheta + \frac{3}{2}\gamma^1_{22}\omega - (\gamma_2 + \gamma^1_{21})\omega^1_2 - \omega^1_{22} = 0.
\end{aligned} \tag{62}$$

Здесь равенство нулю имеет место по модулю главных форм.

Замечание 6.1. Специальная связность в ${}^kR^*H$ с коэффициентами связности (61) порождает специальную связность в ${}^kr^*H$ с коэффициентами связности

$$h_1 = \gamma_1 + 2\gamma^2_{12}, \quad h_2 = -\gamma_2 + 2\gamma^1_{12}. \tag{63}$$

Действительно, нетрудно проверить, что дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют коэффициенты h_1 и h_2, вычисленные по формулам (63), имеют вид (14).

Формы связности $\widetilde{\omega}$, $\widetilde{\omega}^2_1$, $\widetilde{\omega}^1_2$ удовлетворяют структурным уравнениям

$$d\widetilde{\omega} = 2\widetilde{\omega}^2_1 \wedge \widetilde{\omega}^1_2 + \Omega, \quad d\widetilde{\omega}^2_1 = \widetilde{\omega} \wedge \widetilde{\omega}^2_1 + \Omega^2_1, \quad d\widetilde{\omega}^1_2 = \widetilde{\omega}^1_2 \wedge \widetilde{\omega} + \Omega^1_2, \tag{64}$$

где $\Omega = R_{12}\omega^1 \wedge \omega^2 + \cdots$, $\Omega^2_1 = R^2_{112}\omega^1 \wedge \omega^2 + \cdots$, $\Omega^1_2 = R^1_{212}\omega^1 \wedge \omega^2 + \cdots$ — формы кривизны (здесь многоточием обозначены суммы слагаемых, содержащих произведения главных форм, отличные от $\omega^1 \wedge \omega^2$).

Если в качестве главных форм выбраны контактные формы, то $\widetilde{\omega} = \gamma_1 dx^1 + \gamma_2 dx^2$, $\widetilde{\omega}^2_1 = \gamma^2_{11}dx^1 + \gamma^2_{12}dx^2$, $\widetilde{\omega}^1_2 = \gamma^1_{21}dx^1 + \gamma^1_{22}dx^2$ и на поднятии любого сечения $\sigma \subset H$ структурные уравнения (64) принимают вид

$$\begin{aligned}
d\underset{\sigma}{\widetilde{\omega}} &= 2\,\underset{\sigma}{\widetilde{\omega}^2_1} \wedge \underset{\sigma}{\widetilde{\omega}^1_2} + \underset{\sigma}{R}\,dx^1 \wedge dx^2,\\
d\,\underset{\sigma}{\widetilde{\omega}^2_1} &= \underset{\sigma}{\widetilde{\omega}} \wedge \underset{\sigma}{\widetilde{\omega}^2_1} + \underset{\sigma}{R^2_{112}}\,dx^1 \wedge dx^2,\\
d\,\underset{\sigma}{\widetilde{\omega}^1_2} &= \underset{\sigma}{\widetilde{\omega}^1_2} \wedge \underset{\sigma}{\widetilde{\omega}} + \underset{\sigma}{R^1_{212}}\,dx^1 \wedge dx^2.
\end{aligned} \tag{65}$$

Очевидно, в случае, когда каждое из уравнений

$$\underset{\sigma}{R_{12}} = 0, \quad \underset{\sigma}{R^2_{112}} = 0, \quad \underset{\sigma}{R^1_{212}} = 0 \tag{66}$$

отличается от левой части заданного дифференциального уравнения (5) множителем, то рассматриваемая связность определяет представление нулевой кривизны для дифференциального уравнения (5).

Пример 6.1. Специальная связность в ${}^1R^*H$ с коэффициентами связности

$$\begin{aligned}
\gamma_1 = \cos\frac{z}{2}, \quad \gamma^2_{11} = -\frac{1}{2}\sin\frac{z}{2} - \frac{1}{4}p_1, \quad \gamma^1_{21} = -\frac{1}{2}\sin\frac{z}{2} + \frac{1}{4}p_1,\\
\gamma_2 = \cos\frac{z}{2}, \quad \gamma^2_{12} = \frac{1}{2}\sin\frac{z}{2} + \frac{1}{4}p_2, \qquad \gamma^1_{22} = \frac{1}{2}\sin\frac{z}{2} - \frac{1}{4}p_2
\end{aligned}$$

определяет представление нулевой кривизны для уравнения синус-Гордона (6).

Действительно, нетрудно убедиться в том, что

$$\underset{\sigma}{R}_{12} = 0, \quad \underset{\sigma}{R}^2_{112} = \frac{1}{2}(z_{12} - \sin z), \quad \underset{\sigma}{R}^1_{212} = -\frac{1}{2}(z_{12} - \sin z)$$

на поднятии любого сечения $\sigma \subset H$.

Пример 6.2. Специальная связность в ${}^1R^*H$ с коэффициентами связности

$$\begin{aligned} &\gamma_1 = \frac{1}{2}p_1, \qquad \gamma^2_{11} = 0, \qquad \gamma^1_{21} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{z}{2}},\\ &\gamma_2 = -\frac{1}{2}p_2, \quad \gamma^2_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{z}{2}}, \quad \gamma^1_{22} = 0 \end{aligned}$$

определяет представление нулевой кривизны для уравнения Лиувилля

$$z_{12} = e^z. \tag{67}$$

Действительно, нетрудно проверить, что

$$\underset{\sigma}{R}_{12} = -(z_{12} - e^z), \quad \underset{\sigma}{R}^2_{112} = 0, \quad \underset{\sigma}{R}^1_{212} = 0$$

на поднятии любого сечения $\sigma \subset H$.

Пример 6.3. Специальная связность в ${}^2R^*H$ с коэффициентами связности

$$\begin{aligned} &\gamma_1 = 2p_2p_{11} - 1, \quad \gamma^2_{11} = -p_2p_{11}, \quad \gamma^1_{21} = p_2p_{11} - 1,\\ &\gamma_2 = 2p_2p_{12} - 1, \quad \gamma^2_{12} = -p_2p_{12}, \quad \gamma^1_{22} = p_2p_{12} - 1 \end{aligned}$$

определяет представление нулевой кривизны для уравнения

$$z_{11}z_{22} - (z_{12})^2 + z_2z_{11} - z_2z_{12} = 0. \tag{68}$$

В самом деле, нетрудно проверить

$$\begin{aligned} \underset{\sigma}{R}_{12} &= -2(z_{11}z_{22} - (z_{12})^2 + z_2z_{11} - z_2z_{12}),\\ \underset{\sigma}{R}^2_{112} &= z_{11}z_{22} - (z_{12})^2 + z_2z_{11} - z_2z_{12},\\ \underset{\sigma}{R}^1_{212} &= -(z_{11}z_{22} - (z_{12})^2 + z_2z_{11} - z_2z_{12}) \end{aligned}$$

на поднятии любого сечения $\sigma \subset H$.

6.2. *Специальные связности в* ${}^k\Re^*H$ $(k = 1, 2)$. Формы связности в этом случае имеют вид $\widetilde{\widetilde{\omega}}{}^i_j = \omega^i_j + \Gamma^i_{jk}\omega^k$. При этом будем предполагать, что $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$.

Коэффициенты связности в случае $k = 1$ зависят от x^i, z, p_j, а в случае $k = 2$ от x^i, z, p_j, p_{kl}. Они удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$d\Gamma^i_{jk} + \Gamma^m_{jk}\omega^i_m - \Gamma^i_{mk}\omega^m_j - \Gamma^i_{jm}\omega^m_k - \omega^i_{jk} = 0. \tag{69}$$

Здесь равенство нулю имеет место по модулю главных форм.

Замечание 6.2. Задание специальной связности в ${}^k\Re^*H$ равносильно заданию специальной связности в ${}^kR^*H$.

Действительно, специальная связность в ${}^k\Re^*H$ с коэффициентами Γ^i_{jk} порождает связность в ${}^kR^*H$ с коэффициентами

$$\begin{aligned} &\gamma_1 = \Gamma^1_{11} - \Gamma^2_{12}, \quad \gamma^2_{11} = \Gamma^2_{11}, \quad \gamma^1_{21} = \Gamma^1_{12},\\ &\gamma_2 = \Gamma^1_{12} - \Gamma^2_{22}, \quad \gamma^2_{12} = \Gamma^2_{12}, \quad \gamma^1_{22} = \Gamma^1_{22}. \end{aligned} \tag{70}$$

Нетрудно проверить, что дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют коэффициенты (61), вычисленные по формулам (70), имеют вид (62).

Верно и обратное утверждение. Специальная связность в ${}^kR^*H$ с коэффициентами (61) порождает специальную связность в ${}^k\Re^*H$ с коэффициентами

$$\begin{aligned} &\Gamma^1_{11} = \gamma_1 + \gamma^2_{12}, \quad \Gamma^1_{12} = \gamma^1_{21}, \quad \Gamma^1_{22} = \gamma^1_{22},\\ &\Gamma^2_{11} = \gamma^2_{11}, \qquad \Gamma^2_{12} = \gamma^2_{12}, \quad \Gamma^2_{22} = \gamma^1_{21} - \gamma_2. \end{aligned} \tag{71}$$

Нетрудно проверить, что дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют коэффициенты Γ^i_{jk}, вычисленные по формулам (71), имеют вид (69).

6.3. *Связности Бэклунда и отображения Бэклунда.* CH-*отображения как частный случай отображений Бэклунда.*

Исследуя связности в ассоциированных расслоениях $\Im({}^kR^*H)$ и $\Im({}^k\Re^*H)$, можно в силу замечания 6.2 ограничиться изучением связностей в $\Im({}^kR^*H)$.

Форма связности в $\Im({}^kR^*H)$ $(\dim \Im = 1)$ имеет вид

$$\widetilde{\theta} = dY - \xi(Y)\widetilde{\omega} - \xi^2_1(Y)\widetilde{\omega}^1_2 - \xi^1_2(Y)\widetilde{\omega}^2_1,$$

где $\widetilde{\omega}$, $\widetilde{\omega}^2_1$, $\widetilde{\omega}^1_2$ — формы связности, заданной в ${}^kR^*H$. Тождества Ли, которым удовлетворяют коэффициенты $\xi(Y)$, $\xi^2_1(Y)$, $\xi^1_2(Y)$, имеют в данном случае вид

$$\begin{aligned} \xi d\xi^2_1 - \xi^2_1 d\xi &= \xi^2_1 dY,\\ \xi d\xi^1_2 - \xi^1_2 d\xi &= -\xi^1_2 dY,\\ \xi^2_1 d\xi^1_2 - \xi^1_2 d\xi^2_1 &= 2\xi dY. \end{aligned} \tag{72}$$

Исследуя систему (72), можно установить [12]

$$\xi^1_2 \neq 0, \quad \xi^2_1\xi^1_2 + (\xi)^2 = 0. \tag{73}$$

Замечание 6.3. Форму связности $\widetilde{\theta}$ в ассоциированном расслоении $\Im({}^kR^*H)$ $(\dim \Im = 1)$ можно в силу (73) представить в виде

$$\widetilde{\theta} = -\xi^1_2(Y)\{dy + \widetilde{\omega}^2_1 - y\widetilde{\omega} - y^2\widetilde{\omega}^1_2\}, \tag{74}$$

где $y = -\frac{\xi(Y)}{\xi^1_2(Y)}$ ([12]).

Напомним, что ${}^kR^*H = P(J^kH, SL(2))$. Очевидно, наряду со связностями в расслоениях $\Im({}^1R^*H)$ $(\dim \Im = 1)$ и $\Im({}^2R^*H)$ $(\dim \Im = 1)$ можно рассматривать связности в ассоциированных расслоениях $\Im(P(J^kH, G))$ $(\dim \Im = 1)$, где G является подгруппой группы $SL(2)$. Такими связностями являются, в частности, CH-связности (в этом случае структурная группа — это одномерная подгруппа группы $SL(2)$) и связности Бэклунда для эволюционных уравнений, изучавшиеся нами в [11].

Связность в ассоциированном расслоении $\Im(P(J^kH, G))$ $(\dim \Im = 1)$, где $G \subseteq SL(2)$, называем *связностью Бэклунда класса* k для заданного дифференциального уравнения (5), если она порождена специальной связностью в главном расслоении $P(J^kH, G)$ $(G \subseteq SL(2))$, определяющей представление нулевой кривизны для уравнения (5).

В случае, когда $G = SL(2)$, связность Бэклунда класса k для дифференциального уравнения (5) — это связность в $\Im({}^kR^*H)$ $(\dim \Im = 1)$, порожденная специальной связностью в ${}^kR^*H$, определяющей представление нулевой кривизны для уравнения (5). Обозначим через ${}^B\widetilde{\theta}$ форму ее связности. Уравнение Пфаффа

$$
{}^B\underset{\sigma}{\widetilde{\theta}} = 0 \tag{75}
$$

вполне интегрируемо тогда и только тогда, когда $\sigma \subset H$ — решение уравнения (5). Оно определяет отображение

$$
H \supset \sigma \to \underset{\sigma}{\Sigma} \subset \Im({}^kR^*H) \quad (\dim \Im = 1), \tag{76}
$$

которое называем *отображением Бэклунда* (*общего вида*) *класса* k, соответствующим дифференциальному уравнению (5). Уравнение (75) называем *уравнением Пфаффа, задающим отображение Бэклунда.*

В случае, когда главные формы контактные, уравнение Пфаффа (75) имеет вид

$$
dy - (-\underset{\sigma}{\gamma^2_{11}} + y\underset{\sigma}{\gamma_1} + y^2\underset{\sigma}{\gamma^1_{21}})dx^1 - (-\underset{\sigma}{\gamma^2_{12}} + y\underset{\sigma}{\gamma_2} + y^2\underset{\sigma}{\gamma^1_{22}})dx^2 = 0 \tag{75c}
$$

и, следовательно, эквивалентно системе

$$
\begin{aligned}
y_1 &= -\underset{\sigma}{\gamma^2_{11}} + y\underset{\sigma}{\gamma_1} + y^2\underset{\sigma}{\gamma^1_{21}},\\
y_2 &= -\underset{\sigma}{\gamma^2_{12}} + y\underset{\sigma}{\gamma_2} + y^2\underset{\sigma}{\gamma^1_{22}},
\end{aligned} \tag{77}
$$

которую называем *системой Бэклунда.*

Если любое решение системы (77) (где $z = z(x^1, x^2)$ — заданное заранее решение дифференциального уравнения (5)) является в то же время решением дифференциального уравнения (5bis), то отображение (76) называется *преобразованием Бэклунда* (*общего вида*) *дифференциального уравнения* (5) *в дифференциальное уравнение* (5bis).

Замечание 6.4. Произведя замены $y = \operatorname{tg}\frac{y^*}{2}$ либо $y = e^{y^{**}}$, можно представить уравнение (75c) в виде

$$
dy^* - \{\underset{\sigma}{\gamma^1_{21}} - \underset{\sigma}{\gamma^2_{11}} + \underset{\sigma}{\gamma_1}\sin y^* - (\underset{\sigma}{\gamma^1_{21}} + \underset{\sigma}{\gamma^2_{11}})\cos y^*\}dx^1 - \{\underset{\sigma}{\gamma^1_{22}} - \underset{\sigma}{\gamma^2_{12}} + \underset{\sigma}{\gamma_2}\sin y^* - (\underset{\sigma}{\gamma^1_{22}} + \underset{\sigma}{\gamma^2_{12}})\cos y^*\}dx^2 = 0 \tag{75*c}
$$

либо в виде

$$
dy^{**} - (-\underset{\sigma}{\gamma^2_{11}}\, e^{-y^{**}} + \underset{\sigma}{\gamma_1} + \underset{\sigma}{\gamma^1_{21}}\, e^{y^{**}})dx^1 - (-\underset{\sigma}{\gamma^2_{12}}\, e^{-y^{**}} + \underset{\sigma}{\gamma_2} + \underset{\sigma}{\gamma^1_{22}}\, e^{y^{**}})dx^2 = 0. \tag{75**c}
$$

Соответственно система Бэклунда примет либо вид

$$
\begin{aligned}
y^*_1 &= \underset{\sigma}{\gamma^1_{21}} - \underset{\sigma}{\gamma^2_{11}} + \underset{\sigma}{\gamma_1}\sin y^* - (\underset{\sigma}{\gamma^1_{21}} + \underset{\sigma}{\gamma^2_{11}})\cos y^*,\\
y^*_2 &= \underset{\sigma}{\gamma^1_{22}} - \underset{\sigma}{\gamma^2_{12}} + \underset{\sigma}{\gamma_2}\sin y^* - (\underset{\sigma}{\gamma^1_{22}} + \underset{\sigma}{\gamma^2_{12}})\cos y^*
\end{aligned} \tag{77*}
$$

либо вид

$$
\begin{aligned}
y^{**}_1 &= \underset{\sigma}{\gamma_1} + \underset{\sigma}{\gamma^1_{21}}\, e^{y^{**}} - \underset{\sigma}{\gamma^2_{11}}\, e^{-y^{**}},\\
y^{**}_2 &= \underset{\sigma}{\gamma_2} + \underset{\sigma}{\gamma^1_{22}}\, e^{y^{**}} - \underset{\sigma}{\gamma^2_{12}}\, e^{-y^{**}}.
\end{aligned} \tag{77**}
$$

Пример 6.4. Рассмотрим отображение Бэклунда класса 1, для которого система Бэклунда (записанная в виде (77*)) имеет вид

$$
\begin{aligned}
y_1 &= \frac{1}{2}z_1 + \sin y\cos\frac{z}{2} + \cos y\sin\frac{z}{2} = \frac{1}{2}z_1 + \sin\left(y + \frac{z}{2}\right),\\
y_2 &= -\frac{1}{2}z_2 + \sin y\cos\frac{z}{2} - \cos y\sin\frac{z}{2} = -\frac{1}{2}z_2 + \sin\left(y - \frac{z}{2}\right).
\end{aligned} \tag{78}
$$

Соответствующая связность Бэклунда порождена связностью в ${}^1R^*H$, определяющей представление нулевой кривизны для уравнения синус-Гордона (6) (пример 6.1).

Заметим, что это отображение является автопреобразованием уравнения синус-Гордона. Действительно, продифференцируем первое из уравнений (78) по x^2, а второе по x^1. После сложения получим

$$(2y)_{12} = \sin(2y).$$

Пример 6.5. Отображение Бэклунда класса 1, для которого система Бэклунда (записанная в виде (77**)), имеет вид

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{2}z_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{z}{2}+y}, \\ y_2 &= -\frac{1}{2}z_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{z}{2}-y}, \end{aligned} \tag{79}$$

является преобразованием Бэклунда уравнения Лиувилля (67) в волновое уравнение

$$y_{12} = 0. \tag{80}$$

Действительно, соответствующая связность Бэклунда порождена связностью в ${}^1R^*H$, определяющей представление нулевой кривизны для уравнения Лиувилля (пример 6.2). Заметим также, что

$$\begin{aligned} y_{12} &= \frac{1}{2}z_{12} + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{z}{2}+y}\left(\frac{1}{2}z_2 + y_2\right), \\ y_{21} &= -\frac{1}{2}z_{21} - \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{z}{2}-y}\left(\frac{1}{2}z_1 - y_1\right). \end{aligned}$$

В результате сложения (принимая во внимание (79)) получим (80).

Пример 6.6. Рассмотренная в примере 6.3 специальная связность в ${}^2R^*H$ определяет представление нулевой кривизны для уравнения типа Монжа–Ампера (68). Она порождает связность Бэклунда класса 2 для уравнения (68). Для соответствующего отображения Бэклунда система Бэклунда (записанная в форме (77)) имеет вид

$$\begin{aligned} y_1 &= z_2z_{11} + (2z_2z_{11} - 1)y + (z_2z_{11} - 1)y^2, \\ y_2 &= z_2z_{12} + (2z_2z_{12} - 1)y + (z_2z_{12} - 1)y^2. \end{aligned}$$

Литература

1. Bianchi L. *Ricerche sulle superficie a curvatura constante e sulle elicoidi* // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. – 1879. – V. 2. – P. 285.
2. Lie S. *Zur Theorie der Flächen konstanter Krummung*, III, IV. // Arch. Math. Naturvidensk. – 1880. – Bd. 5. – H. 3. – S. 282–306, 328–358.
3. Ибрагимов Н.Х. *Группы преобразований в математической физике.* – М.: Наука, 1983. – 280 с.
4. Rogers C., Shadwick W.F. *Backlund transformations and their applications.* – New York, London: Academic Press, 1982.
5. Backlund A.V. *Zur Theory der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung* // Math. Ann. – 1880. – Bd. 17. – S. 285–328.
6. Darboux G. *Lecons sur la theorie generale des surfaces.* Part 3. – Paris: Gauthier-Villars, 1894.
7. Goursat E. *Le Probleme de Backlund* (Memorial des Sciences Mathematiques. Fasc. VI). – Paris: Gauthier-Villars, 1925.
8. Clairin J. *Sur les Transformations de Backlund* // Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., 3-e ser., Supple 19. – 1902. – P. 1–63.

9. Pirani F.A.E., Robinson D.C. *Sur la definition des transformations de Backlund* // C. R. Acad. Sc. Paris, Serie A. – 1977. – V. 285. – P. 581–583.
10. Pirani F.A.E., Robinson D.C., Shadwick W.F. *Local jet-bundle formulation of Backlund transformations.* – Dordrecht (Holland): Reidal. – 1979.
11. Рыбников А.К., Семенов К.В. *О геометрической интерпретации отображений Бэклунда* – В сб. "Инвариантные методы исследования на многообразиях структур геометрии, анализа и математической физики (Тр. участников международной конференции памяти Г.Ф. Лаптева. Москва, 1999)", Ч. 2. – М.: Изд-во механико-матем. ф-та МГУ, 2001. – С. 172–193.
12. Рыбников А.К. *Теория связностей и преобразования Бэклунда для общих дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка* // Докл. РАН. – 2005. – Т. 405. – № 1. – С. 26–29.
13. Рыбников А.К. *О специальных связностях, определяющих представление нулевой кривизны для эволюционных уравнений второго порядка* // Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 9. – С. 32–41.
14. Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П. *Дифференциально–геометрические структуры на многообразиях* // Итоги науки и техн. Проблемы геометрии. – М.: ВИНИТИ, 1979. – Т. 9. – С. 5–246.
15. Лаптев Г.Ф. *Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований* // Тр. Московск. матем. о-ва. – 1953. – № 2. – С. 275–382.
16. Лаптев Г.Ф. *Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований* // Тр. 3-го Всесоюзн. матем. съезда. Москва, 1956. – Т. 3. – М.: АН СССР, 1958. – С. 409–418.
17. Лаптев Г.Ф. *Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии* // Тр. геометрическ. семинара. – Т. 1. – М.: ВИНИТИ, 1966. – С. 139–189.
18. Лаптев Г.Ф. *Структурные уравнения главного расслоенного многообразия* // Тр. геометрическ. семинара. – Т. 2. – М.: ВИНИТИ, 1969. – С. 161–178.
19. Лаптев Г.Ф. *К инвариантной теории дифференцируемых отображений* // Тр. геометрическ. семинара. – Т. 6. – М.: ВИНИТИ, 1974. – С. 37–42.
20. Rogers C., Schief W.K. *Backlund and Darboux transformations. Geometry and modern applications in soliton theory.* – Cambridge Univ. Press, 2000.
21. Абловиц М., Сигур Х. *Солитоны и метод обратной задачи.* – М.: Мир, 1987. – 480 с.
22. Cole J.D. *On a quasilinear parabolic equation occurring in aerodynamics* // Quart. App. Math. – 1951. – V. 9. – P. 225–236.
23. Hopf E. *The partial differential equation* $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$ // Comm. Pure Appl. Math. – 1950. – P. 201–230.

Московский государственный университет

Поступила 27.03.2007