Известия вузов. Математика *http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/*
2011, №11, с. 89–93 *Гос. номер статьи по НТЦ "Информрегистр" 0421100123\0122*

А.Н. ПЛЮЩЕНКО

О ПРОБЛЕМЕ РАВЕНСТВА СЛОВ В СВОБОДНЫХ БЕРНСАЙДОВЫХ ПОЛУГРУППАХ С ТОЖДЕСТВОМ $x^2 = x^3$

Аннотация. Исследуется проблема равенства слов для свободных бернсайдовых полугрупп с тождеством $x^2 = x^3$. Показывается, что решение проблемы равенства слов для такой полугруппы $B(2,1,k)$ ранга k может быть сведено к решению соответствующей проблемы для полугруппы $B(2,1,2)$ ранга 2. Кроме того, если все элементы полугруппы $B(2,1,2)$ являются рациональными языками, то и все элементы полугруппы $B(2,1,k)$ также являются рациональными языками. Таким образом, гипотеза Бжозовского справедлива для полугруппы $B(2,1,k)$ тогда и только тогда, когда она справедлива для $B(2,1,2)$.

Ключевые слова: свободные бернсайдовы полугруппы, проблема равенства слов, гипотеза Бжозовского.

УДК: 512.531

Abstract. We study the word problem for free Burnside semigroups satisfying the identity $x^2 = x^3$. For any $k > 2$ we prove that the word problem for the k-generated free Burnside semigroup $B(2,1,k)$ can be reduced to the word problem for the two-generated semigroup $B(2,1,2)$. Moreover, if every element of $B(2,1,2)$ is a regular language, then every element of $B(2,1,k)$ also appears to be a regular language. Therefore, the semigroup $B(2,1,k)$ satisfies the Brzozowski conjecture if and only if so does $B(2,1,2)$.

Keywords: free Burnside semigroups, word problem, Brzozowski conjecture.

1. Свободной бернсайдовой полугруппой называется полугруппа, свободная в многообразии $\mathbf{var}\{x^n = x^{n+m}\}$ для некоторых натуральных чисел n и m. Тем самым, свободную бернсайдову полугруппу с тождеством $x^n = x^{n+m}$ над алфавитом из k-букв Σ_k можно определить как фактор-полугруппу $B(n,m,k) = \Sigma_k^+/\sim_{n,m,k}$ свободной полугруппы Σ_k^+ по конгруэнции $\sim_{n,m,k}$, порожденной всеми парами вида (X^n, X^{n+m}), где $X \in \Sigma_k^+$.

Свободным бернсайдовым полугруппам было посвящено немало исследований, проясняющих их внутреннюю структуру и описывающих строение элементов таких полугрупп как в терминах теории полугрупп, так и в терминах теории формальных языков (во втором случае элементы полугруппы $B(n,m,k)$ рассматриваются как языки над алфавитом Σ_k). Подробнее с проблематикой теории бернсайдовых полугрупп можно ознакомиться по обзорной статье [1].

Одной из важнейших проблем для полугруппы $B(n,m,k)$ является проблема равенства слов: *по двум заданным словам над* Σ_k *определить, представляют ли они один и тот же*

Поступила 03.05.2011

элемент полугруппы $B(n, m, k)$. Заметим, что при $k = 1$ полугруппы $B(n, m, 1)$ суть не что иное, как конечные циклические полугруппы, проблема равенства слов для которых тривиальным образом разрешима. Всюду далее полагаем $k > 1$. Благодаря работам Д. Грина и Д. Риса [2], а позже Л. Кадурека и Д. Полака [3] и др., проблема равенства слов для случая $n = 1$ была сведена к соответствующей проблеме для свободных бернсайдовых групп (т. е. групп, свободных в многообразии $\mathbf{var}\{x^m = 1\}$).

Для полугрупп $B(n, m, k)$ при $n \geq 2$ решение проблемы равенства слов тесно связано с доказательством гипотезы Бжозовского, утверждающей, что всякий элемент полугруппы $B(n, m, k)$ является рациональным языком. Поскольку для всякого рационального языка существует распознающий его конечный автомат, проблема равенства слов для элементов, являющихся рациональными языками, разрешима. В серии работ [4]–[8] гипотеза Бжозовского была подтверждена для случая $n \geq 3$. Как следствие, при $n \geq 3$ проблема равенства слов разрешима. Для полугрупп $B(2, m, k)$ проблема равенства слов остается открытой, причем при $m \geq 2$ такие полугруппы содержат элементы, не являющиеся рациональными языками [9]. Таким образом, гипотеза Бжозовского оказалась неверной в случае $n = 2$ и $m \geq 2$. До сих пор неизвестно, справедлива ли гипотеза Бжозовского для случая $n = 2$ и $m = 1$. Этот вопрос был специально отмечен Бжозовским в [10].

Основными результатами данной работы являются следующие утверждения.

Теорема 1. *Проблема равенства слов для полугруппы* $B(2, 1, k)$ *при* $k > 2$ *разрешима тогда и только тогда, когда проблема равенства слов разрешима для полугруппы* $B(2, 1, 2)$.

Теорема 2. *Гипотеза Бжозовского для полугруппы* $B(2, 1, k)$ *справедлива тогда и только тогда, когда она справедлива для полугруппы* $B(2, 1, 2)$.

В п. 2 вводятся необходимые определения и описываются вспомогательные конструкции; в п. 3 вкратце описывается идея доказательства основных результатов.

2. Для любого целого числа $k \geqslant 2$ пусть $\Sigma_k = \{1, 2, \ldots, k\}$. Очевидно, полугруппа $B(2, 1, 2)$ является подполугруппой полугруппы $B(2, 1, k)$, а конгруэнция $\sim_{2,1,2}$ есть ограничение конгруэнции $\sim_{2,1,k}$ на свободный моноид Σ_2^*, поэтому в дальнейшем вместо $\sim_{2,1,2}$ и $\sim_{2,1,k}$ будем писать $\sim$. Класс конгруэнции $\sim$, соответствующий слову U, обозначается через $[U]$.

Отношение соседства из [11] определяется следующим образом:

$$\pi = \{(XYYZ, XYYYZ), (XYYYZ, XYYZ) \mid X, Y, Z \in \Sigma_k^*\}.$$

Легко проверить, что конгруэнция $\sim$ есть не что иное, как транзитивное замыкание отношения соседства.

Договоримся i-ю букву слова U обозначать через $U[i]$, а длину слова U — через $|U|$. Таким образом, $U = U[1]U[2] \ldots U[|U|] = U[1 \ldots |U|]$. Понятия подслова, степени слова, префикса, суффикса и пр. вводятся обычным образом. Мы пишем $Y \leq U$, если Y является подсловом слова U. Операцией *инвертирования* $\overline{}$ на свободной полугруппе Σ_2^+ называется автоморфизм этой полугруппы, переставляющий элементы из Σ_2, т. е. $\overline{1} = 2$ и $\overline{2} = 1$.

Языком над алфавитом Σ называется произвольное подмножество свободного моноида Σ^*. Напомним, что *произведением языков* $\mathcal{L}$ *и* $\mathcal{K}$ называется язык

$$\mathcal{L}\mathcal{K} = \{UV \mid U \in \mathcal{L},\ V \in \mathcal{K}\},$$

а *левое* $\mathcal{K}^{-1}\mathcal{L}$ и *правое* $\mathcal{L}\mathcal{K}^{-1}$ *частные языков* $\mathcal{L}$ и $\mathcal{K}$ определяются как

$$\mathcal{K}^{-1}\mathcal{L} = \{U \mid \exists V \in \mathcal{K}\ (VU \in \mathcal{L})\} \ \text{ и } \ \mathcal{L}\mathcal{K}^{-1} = \{U \mid \exists V \in \mathcal{K}\ (UV \in \mathcal{L})\}.$$

При записи одноэлементных языков вида $\{W\}$, где $W \in \Sigma^*$, фигурные скобки опускаются. Например, вместо $\mathcal{K}\{W\}^{-1}$ будем писать просто $\mathcal{K}W^{-1}$. Пользуемся также стандартными понятиями регулярного выражения, конечного автомата и рационального языка (см., например, [12]).

Наряду с операцией произведения слов и языков, будем использовать операцию *произведения со склейкой по слову.* Зафиксируем некоторое слово $S \in \Sigma^*$, пусть слова X и Y соответственно заканчиваются и начинаются на S, т. е. $X = X_1S$ и $Y = SY_1$ для некоторых $X_1, Y_1 \in \Sigma^*$. *Произведением слов X и Y со склейкой по слову S* называется слово $X \circ_S Y = X_1SY_1$. Таким образом, $X \circ_S Y = XY_1 = X_1Y$. В частности, если в качестве S взять пустое слово (единицу свободного моноида Σ^*), получим обычную операцию произведения слов, определенную на всем множестве Σ^*. Зафиксируем теперь два слова $S_1, S_2 \in \Sigma^*$. Несложно убедиться, что если слово X заканчивается на S_1, слово Y начинается на S_1 и заканчивается на S_2, а слово Z начинается на S_2, имеет место равенство $(X \circ_{S_1} Y) \circ_{S_2} Z = X \circ_{S_1} (Y \circ_{S_2} Z)$. В дальнейшем будем опускать скобки и писать просто $X \circ_{S_1} Y \circ_{S_2} Z$. Операция произведения со склейкой по слову естественным образом распространяется на языки.

Для доказательства теорем 1 и 2 построим функцию $\alpha : \Sigma_k^* \to \Sigma_2^*$, сохраняющую отношение эквивалентности между словами, т. е. для любых слов $U, V \in \Sigma_k^+$ соотношение $U \sim V$ выполняется тогда и только тогда, когда выполняется $\alpha(U) \sim \alpha(V)$. Естественно, казалось бы, в качестве α выбрать какой-нибудь подходящий морфизм: поскольку любой морфизм сохраняет отношение π, импликация $U \sim V \Rightarrow \alpha(U) \sim \alpha(V)$ становится очевидной. Трудности, однако, возникают при попытке доказать обратное утверждение. Из того, что морфизм α сохраняет отношение $\sim$, не следует, вообще говоря, что то же верно и для отображения α^{-1}. Более того, это отображение является частичным, и может оказаться, что α^{-1} применимо не ко всем словам из $[\alpha(U)]$. Идея заключается в том, чтобы в качестве α искать не морфизм, а функцию со схожими свойствами, используя вместо операции произведения слов операцию произведения со склейкой.

Для построения отображения α нам потребуется понятие $\widetilde{12}$-целого слова из [11]. Произвольное слово $U \in \Sigma_2^*$ называется $\widetilde{12}$-*целым*, если оно не содержит кубов букв и любое его подслово вида $11(21)^l1$ или $22(12)^l2$, где $l \geq 1$, входит в U внутри подслова $(121)1(21)^l(121)$ или соответственно $(212)2(12)^l(212)$. Подслова любого $\widetilde{12}$-целого слова будем называть *потенциально $\widetilde{12}$-целыми словами.* Следующее предложение утверждает, что свойства слова быть $\widetilde{12}$-целым и потенциально $\widetilde{12}$-целым сохраняются конгруэнцией $\sim$.

Предложение ([11])**.** *Пусть $U, V \in \Sigma_2^*$ и $U \sim V$. Тогда если слово U (потенциально) $\widetilde{12}$-целое, то и слово V является (потенциально) $\widetilde{12}$-целым.*

Предположим, что слово $U \in \Sigma_2^*$ не является потенциально $\widetilde{12}$-целым и не содержит кубов букв. Несложно проверить, что в этом случае слово U содержит по крайней мере одно из подслов $11(21)^l122$, $1122(12)^l2$, $22(12)^l211$ или $2211(21)^l1$ для некоторого $l \geq 1$. Такие слова будем называть *маркерами*; в дальнейшем будем использовать только маркеры 1121122, 1122122, 2212211 и 2211211. Слова $M^0 = 11211221122122$, $\overline{M^0} = 22122112211211$ и все слова, эквивалентные M^0 или $\overline{M^0}$, называются *двойными маркерами.* Важное свойство двойных маркеров состоит в следующем: если двойной маркер M является подсловом слова YY, то слово Y содержит маркеры, следовательно, Y не является потенциально $\widetilde{12}$-целым.

Зафиксируем некоторый набор $C_1, \ldots, C_k$ попарно неэквивалентных $\widetilde{12}$-целых слов над алфавитом Σ_2, каждое из которых начинается и заканчивается на 212212, но при этом

$C_i \not\sim 212212$ для всех $i \leq k$. Определим отображение $\widetilde{\alpha}$, положив

$$\widetilde{\alpha}(i) = [M^0 \circ_{2122} C_i \circ_{2212} \overline{M^0} \circ_{1211} \overline{C_i}] \tag{1}$$

для всех $i \leq k$ и

$$\widetilde{\alpha}(W) = \widetilde{\alpha}(W[1]) \circ_{1121} \widetilde{\alpha}(W[2]) \circ_{1121} \cdots \circ_{1121} \widetilde{\alpha}(W[|W|])$$

для любого $W \in \Sigma_k^+$. Слова из $\widetilde{\alpha}(i)$ для всех $i \in [1, k]$ называются *блоками*, а слова из $\widetilde{\alpha}(W)$ для любого $W \in \Sigma_k^+$ — *блочными словами.* Говорим, что W — *прообраз слова* U и пишем $W = \widetilde{\alpha}^{-1}(U)$, если $U \in \widetilde{\alpha}(W)$. Нетрудно убедиться, что всякое блочное слово U имеет в точности один прообраз $\widetilde{\alpha}^{-1}(U)$.

Теперь построим функцию $\alpha : \Sigma_k^+ \to \Sigma_2^+$: выбрав из каждого блока $\widetilde{\alpha}(i)$ по одному слову T_i, положим $\alpha(i) = T_i$ для любого $i \in [1, k]$ и $\alpha(W) = \alpha(W[1]) \circ_{1121} \cdots \circ_{1121} \alpha(W[|W|])$ для любого слова $W \in \Sigma_k^+$.

3. Теорема 1 непосредственно вытекает из следующей леммы.

Лемма. *Для любых слов $U, V \in \Sigma_k^+$ $U \sim V$ тогда и только тогда, когда $\alpha(U) \sim \alpha(V)$.*

Схема доказательства. Импликация $U \sim V \Rightarrow \alpha(U) \sim \alpha(V)$ выполняется тривиальным образом. Справедливость обратной импликации вытекает из более общего утверждения: если $U \sim V$ и U — блочное слово, $U, V \in \Sigma_2^*$, то слово V также является блочным и $\widetilde{\alpha}^{-1}(U) \sim \widetilde{\alpha}^{-1}(V)$. Так как конгруэнция $\sim$ есть транзитивное замыкание отношения π, достаточно рассмотреть пару соседних слов U и V. Пусть, например, $U = XYYZ$ и $V = XYYYZ$; для слова U справедливо разложение $U = B_1 \circ_{1121} \ldots \circ_{1121} B_t$ в произведение блоков $B_1, \ldots, B_t$. Рассмотрим различные варианты расположения подслова YY внутри U.

Если слово Y потенциально $\widetilde{12}$-целое, то, как отмечалось в п. 2, подслово YY не может содержать двойной маркер. Тогда подслово YY целиком лежит в некотором блоке B_p или на стыке блоков B_{p-1} и B_p, при этом слово V, полученное из U заменой $YY \to YYY$, с точностью до замены блоков на эквивалентные совпадает с U, поэтому $\widetilde{\alpha}(U) = \widetilde{\alpha}(V)$.

Если же $S \leq Y$ для некоторого маркера S, то подслово YY содержит по крайней мере два различных вхождения S, откуда следует, что Y представимо в виде

$$Y = P \circ_{1121} B_{p+1} \circ_{1121} B_{p+2} \circ_{1121} \ldots \circ_{1121} B_{p+r-1} \circ_{1121} Q,$$

где Q и P — начало и конец соответственно блоков B_{p+r} и B_p, причем блок B_{p+r} образуется на стыке вхождений Y в слово YY, поэтому $B_{p+r} = QP$. По определению отображения $\widetilde{\alpha}$ (см. (1)) блок B_{p+r} с точностью до эквивалентности содержит подслова C_i и $\overline{C_i}$ (для некоторого $i \leq k$), называемые *контентами.* Понятно, что хотя бы одно из подслов P или Q (пусть, скажем, P) содержит контент блока B_{p+r}. Поскольку $P \leq B_p$, блоки B_p и B_{p+r} содержат одинаковые контенты и ввиду (1) $B_p \sim B_{p+r}$. Тогда замена $YY \to YYY$ в слове U вызывает соответствующую замену $(W[p \ldots p{+}r{-}1])^2 \to (W[p \ldots p{+}r{-}1])^3$ в его прообразе $W = \widetilde{\alpha}^{-1}(U)$, следовательно, прообразы слов U и V являются соседними. Это завершает доказательство леммы.

Для доказательства теоремы 2 рассмотрим морфизм $\beta : \Sigma_k^* \to \Sigma_2^*$ на элементах множества Σ_k, удовлетворяющий тождеству $\alpha(i) = \beta(i)1121$. Легко видеть, что $\alpha(U) = \beta(U)1121$ для любого слова $U \in \Sigma_k^*$. Напомним, что класс рациональных языков замкнут относительно взятия частного и взятия прообраза любого морфизма. Поэтому из рациональности языка $[\alpha(U)]$ для любого $U \in \Sigma_k^*$ следует, что класс $[U] = \beta^{-1}([\alpha(U)](1121)^{-1})$ также является рациональным языком. Таким образом, гипотеза Бжозовского справедлива для полугруппы $B(2,1,k)$ тогда и только тогда, когда она справедлива для полугруппы $B(2,1,2)$.

Литература

[1] do Lago A.P., Simon I. *Free Burnside semigroups*, RAIRO Theoret. Inform. Appl. **35** (6), 579–595 (2001).

[2] Green J.A., Rees D. *On semigroups in which* $x^r = x$, Proc. Cambridge Phil. Soc. **48**, 35–40 (1952).

[3] Kad'ourek L., Polák J. *On free semigroups satisfying* $x^r \simeq x$, Simon Stevin **64** (1), 3–19 (1990).

[4] de Luca A., Varricchio S. *On non-counting regular classes*, Proc. of 17th Int. Colloq. "Automata languages and programming", Warwick/GB 1990, Lect. Notes Comput. Sci. **443** (Springer, Berlin, 1990), pp. 74–87.

[5] McCammond J. *The solution to the word problem for the relatively free semigroups satisfying* $t^a = t^{a+b}$ *with* $a \geqslant 6$, Internat. J. Algebra Comput. **1** (1), 1–32 (1991).

[6] Guba V.S. *The word problem for the relatively free semigroups satisfying* $t^m = t^{m+n}$ *with* $m \geqslant 4$ *or* $m \geqslant 3$, $n = 1$, Internat. J. Algebra Comput. **3** (2), 125–140 (1993).

[7] Guba V.S. *The word problem for the relatively free semigroups satisfying* $t^m = t^{m+n}$ *with* $m \geqslant 3$, Internat. J. Algebra Comput. **3** (3), 335–348 (1993).

[8] do Lago A.P. *On the Burnside semigroups* $x^n = x^{n+m}$, Internat. J. Algebra Comput. **6** (2), 179–227 (1996).

[9] do Lago A.P. *Maximal groups in free Burnside semigroups*, Proc. of 3rd American Symp. "LATIN'98, theoretical informatics", Campinas, Brasil, April 20–24, 1998, Lect. Notes. Comput. Sci. **1380** (Springer, Heidelberg, 1998), pp. 65–75.

[10] Brzozowski J. *Open problems about regular languages*. Formal language theory: perspectives and open problems (Academic Press, New York, 1980), pp. 23–47.

[11] Бакиров М.Ф., Суханов Е.В. *Слова Туэ–Морса и* $\mathcal{D}$*-строение свободной бернсайдовой полугруппы*, Изв. Уральск. гос. ун-та. Сер. матем. и механика **18** (3), 5–19 (2000).

[12] Лаллеман Ж. *Полугруппы и комбинаторные приложения* (Мир, М., 1985).

А.Н. Плющенко

аспирант, кафедра алгебры и дискретной математики,
Уральский федеральный университет,
пр. Ленина, д. 51, г. Екатеринбург, 620083,

`e-mail:` mathplush@yandex.ru

A.N. Plyushchenko

Postgraduate, Chair of Algebra and Discrete Mathematics,
Ural Federal University,
51 Lenin Ave., Ekaterinburg, 620083, Russia,

`e-mail:` mathplush@yandex.ru