Известия вузов. Математика
2013, №10, с. 69–72
http://old.kpfu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Краткое сообщение, представленное Л.Н. Шевриным

А.Г. ГЕЙН, М.П. ШУШПАНОВ

ОБ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СООТНОШЕНИЯХ СВОБОДНОЙ МОДУЛЯРНОЙ РЕШЕТКИ РАНГА 3

Аннотация. Для 3-порожденной свободной модулярной решетки указан набор из 11 определяющих соотношений и доказана его минимальность.

Ключевые слова: свободные модулярные решетки, определяющие соотношения.

УДК: 512.565

Напомним, что *рангом* свободной алгебры некоторого многообразия называется мощность множества ее свободных порождающих. Объектом нашего внимания будет свободная решетка ранга 3 в многообразии модулярных решеток, будем обозначать ее A. Пусть F — свободная решетка ранга 3 в многообразии всех решеток, f, g, h — ее свободные порождающие и φ — гомоморфизм F на A. В силу стандартных соображений универсальной алгебры элементы $a = \varphi(f)$, $b = \varphi(g)$ и $c = \varphi(h)$ будут свободными порождающими решетки A. Определяющие соотношения, задающие эту решетку в многообразии всех решеток, рассматривались в [1] и [2]. Именно, одним из результатов работы [1] является утверждение, что A может быть задана 21 определяющим соотношением. В [2] было отмечено, что множество этих соотношений не является минимальным множеством определяющих соотношений, а именно, были выделены 15 из указанных соотношений, которые также являются определяющими соотношениями решетки A, и было доказано, что они представляют собой минимальное множество определяющих соотношений этой решетки. Отметим, что в [1] было приведено также множество из семи определяющих соотношений свободной дистрибутивной решетки ранга 3, а в [3] была доказана его минимальность.

Основной результат данной работы состоит в том, что нами найдено множество из 11 определяющих соотношений решетки A. Стоит отметить, что оно не является подмножеством определяющих соотношений, указанных в [1].

Перечислим эти соотношения:

$$(a \vee (b \wedge c)) \wedge (b \vee c) = (a \wedge (b \vee c)) \vee (b \wedge c), \tag{1}$$

$$(b \vee (c \wedge a)) \wedge (c \vee a) = (b \wedge (c \vee a)) \vee (c \wedge a), \tag{2}$$

$$(c \vee (a \wedge b)) \wedge (a \vee b) = (c \wedge (a \vee b)) \vee (a \wedge b), \tag{3}$$

$$\begin{aligned}(a \vee b) \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c) = ((a \wedge (b \vee c)) \vee ((a \vee b) \wedge c))\wedge \\ \wedge((b \wedge (a \vee c)) \vee ((b \vee a) \wedge c)) \wedge ((a \wedge (c \vee b)) \vee ((a \vee c) \wedge b)),\end{aligned} \tag{4}$$

Поступила 11.02.2013

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c) = ((a \vee (b \wedge c)) \wedge ((a \wedge b) \vee c)) \vee \\ \vee ((b \vee (a \wedge c)) \wedge ((b \wedge a) \vee c)) \vee ((a \vee (c \wedge b)) \wedge ((a \wedge c) \vee b)), \quad (5)$$

$$(a \vee b) \wedge (a \vee c) = a \vee ((a \vee b) \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c)), \quad (6)$$

$$(b \vee a) \wedge (b \vee c) = b \vee ((a \vee b) \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c)), \quad (7)$$

$$(c \vee a) \wedge (c \vee b) = c \vee ((a \vee b) \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c)), \quad (8)$$

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = a \wedge ((a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c)), \quad (9)$$

$$(b \wedge a) \vee (b \wedge c) = b \wedge ((a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c)), \quad (10)$$

$$(c \wedge a) \vee (c \wedge b) = c \wedge ((a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c)). \quad (11)$$

Обозначим для краткости множество этих соотношений через ρ.

Теорема. *Решетка с порождающими a, b, c и множеством ρ определяющих соотношений изоморфна свободной модулярной решетке ранга 3. Если же множество соотношений строго содержится в ρ, то решетка с порождающими a, b, c и таким множеством определяющих соотношений не является модулярной.*

Доказательство первого утверждения теоремы основывается на следующих соображениях. Пусть L — решетка с порождающими элементами a, b и c, заданная определяющими соотношениями ρ. Так как решетка A удовлетворяет данным соотношениям, она является гомоморфным образом решетки L. Поскольку, как известно, A состоит из 28 элементов, то решетка L содержит не менее 28 элементов. В то же время прямыми вычислениями показывается, что L не может содержать более 28 элементов. Это означает, что две указанные решетки изоморфны.

Для доказательства второго утверждения для каждого множества определяющих соотношений, полученного из ρ удалением какого-либо одного соотношения, строится пример 3-порожденной немодулярной решетки, которая удовлетворяет всем соотношениям такого множества. Например, решетка, изображенная на рис. 1, не модулярна и удовлетворяет соотношениям (2)–(11), но не удовлетворяет соотношению (1).

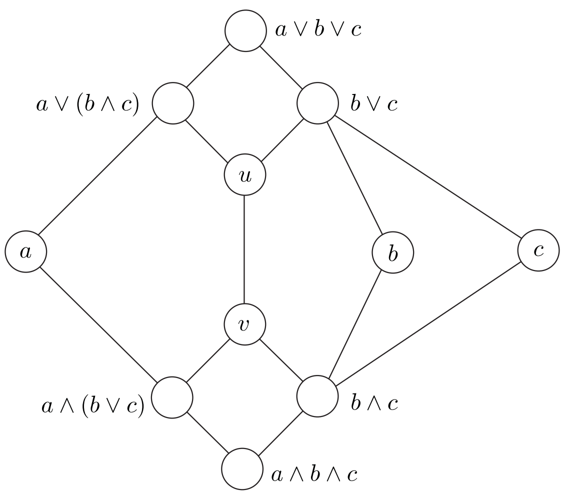

Рис. 1

Здесь через u и v обозначены элементы $(a \vee (b \wedge c)) \wedge (b \vee c)$ и $(a \wedge (b \vee c)) \vee (b \wedge c)$ соответственно.

Решетка, изображенная на рис. 2, удовлетворяет соотношениям (1)–(3) и (5)–(11), но не удовлетворяет соотношению (4).

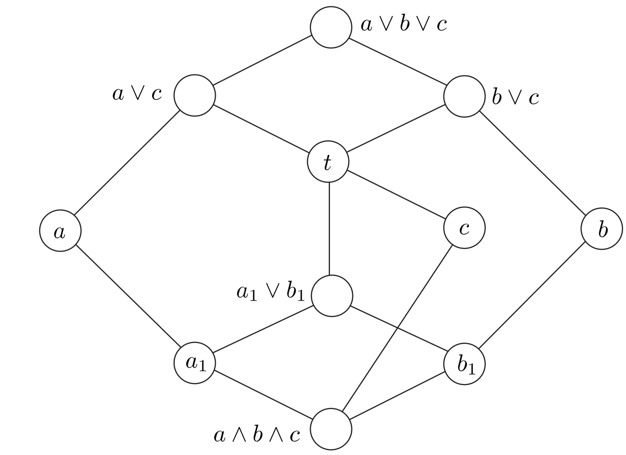

Рис. 2

На рис. 2 через t обозначен элемент $(a \vee b) \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c)$, а через a_1 и b_1 — элементы $a \wedge (b \vee c)$ и $b \wedge (a \vee c)$ соответственно.

Решетка, изображенная на рис. 3, удовлетворяет соотношениям (1)–(5) и (7)–(11), но не удовлетворяет соотношению (6).

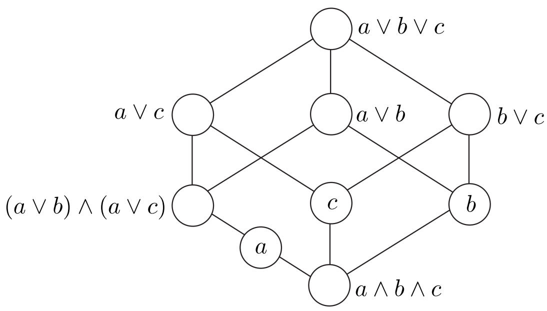

Рис. 3

Остальные примеры получаются из приведенных переобозначением элементов a, b и c и переходом, если необходимо, к двойственным решеткам.

В связи с данной работой любопытно было бы выяснить, существует ли множество определяющих соотношений свободной модулярной решетки ранга 3 с числом соотношений меньше 11.

Авторы благодарят рецензента, обратившего наше внимание на статью [2], что привело к принципиальному пересмотру первоначальной версии работы. Мы также признательны Л.Н. Шеврину за обсуждения, способствовавшие значительному улучшению текста.

Литература

[1] Ore O. *Remarks on structures and group relations*, Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zurich 85 (32), 1–4 (1940).

[2] Ладзианска З. *Модулярные подструктуры структуры*, Mat. časop. **24** (1), 81–83 (1974).

[3] Kolibiar M. *Distributive sublattices of a lattice*, Proc. Amer. Math. Soc. **34** (2), 359–364 (1972).

А.Г. Гейн

профессор, кафедра алгебры и дискретной математики,
Уральский федеральный университет,
ул. Мира, д. 19, г. Екатеринбург, 620002, Россия,

e-mail: Alexander.Gein@usu.ru

М.П. Шушпанов

магистрант 1-го года обучения, кафедра алгебры и дискретной математики,
Уральский федеральный университет,
ул. Мира, д. 19, г. Екатеринбург, 620002, Россия,

e-mail: Mikhail.Shushpanov@gmail.com

A.G. Gein and M.P. Shushpanov

Defining relations of a free modular lattice of rank 3

Abstract. For a 3-generated free modular lattice we obtain a system of 11 defining relations and prove this set to be minimal.

Keywords: free modular lattices, defining relations.

A.G. Gein

Professor, Chair of Algebra and Discrete Mathematics,
Ural Federal University,
19 Mira str., Ekaterinburg, 620002 Russia,

e-mail: Alexander.Gein@usu.ru

M.P. Shushpanov

Undergraduate, Chair of Algebra and Discrete Mathematics,
Ural Federal University,
19 Mira str., Ekaterinburg, 620002 Russia,

e-mail: Mikhail.Shushpanov@gmail.com