Известия вузов. Математика
2009, № 2, с. 46–64

http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@ksu.ru

Н. КЕХАЙОПУЛУ

ИДЕАЛЬНЫЕ РАСШИРЕНИЯ РЕШЕТОК

Аннотация. По аналогии с хорошо известным шрейеровским понятием расширения групп, А.Х. Клиффорд в своей работе, опубликованной в Trans. Amer. Math. Soc. **68** (1950), рассмотрел понятие (идеального) расширения неупорядоченных полугрупп. Монографии Клиффорда–Престона и Петрика содержат детальное изложение возникающей теории. Основная теорема об идеальных расширениях упорядоченных полугрупп была получена в работе Кехайопулу и Цингелиса, опубликованной в Comm. Algebra **31** (2003). Естественно рассмотреть эти проблемы и для решеток. По аналогии с идеальными расширениями упорядоченных полугрупп, в данной статье приводим основную теорему об идеальных расширениях решеток. В точности так же, как и в случае полугрупп (упорядоченных полугрупп), исследуем проблему с помощью трансляторов. Имея решетку L и решетку K с наименьшим элементом, строим (все) решетки V, содержащие изоморфный с L идеал L' такой, что фактор-решетка Рисса $V|L'$ изоморфна K. Обратно, доказываем, что каждая решетка, которая является расширением L посредством K, может быть так построена. В конце работы приводится пример, иллюстрирующий изложенное.

Ключевые слова: трансляция, внутренняя трансляция, (идеальное) расширение решетки.

УДК: 512.536

Abstract. Following the well known Schreier's extension of groups, the (ideal) extension of semigroups (without order) have been first considered by A.H. Clifford in Trans. Amer. Math. Soc. **68** (1950), with a detailed exposition of the theory in the monographs of Clifford–Preston and Petrich. The main theorem of the ideal extensions of ordered semigroups has been considered by Kehayopulu and Tsingelis in Comm. Algebra **31** (2003). It is natural to examine the same problem for lattices. Following the ideal extensions of ordered semigroups, in this paper we give the main theorem of the ideal extensions of lattices. Exactly as in the case of semigroups (ordered semigroups), we approach the problem using translations. We start with a lattice L and a lattice K having a least element, and construct (all) the lattices V which have an ideal L' which is isomorphic to L and the Rees quotient $V|L'$ is isomorphic to K. Conversely, we prove that each lattice which is an extension of L by K can be so constructed. An illustrative example is given at the end.

Keywords: translation, inner translation, (ideal) extension of a lattice.

Введение

Проблема расширения для групп состоит в следующем: по данным группам H и K построить все группы G такие, что некоторый нормальный делитель N изоморфен H, а фактор-группа G/N группы G по нормальному делителю N изоморфна K. Такие группы

Поступила 23.11.2006

G хорошо известны как шрейеровские расширения (или просто расширения) группы H по группе K. По аналогии с шрейеровскими расширениями Клиффорд в [1] рассмотрел идеальные расширения полугрупп. Подробные изложения идеальных расширений полугрупп содержатся в [2], [3]. Основная теорема об идеальных расширениях полугрупп заключается в следующем: по данной полугруппе S и полугруппе Q с нулем такими, что $S \cap Q^* = \emptyset$ (здесь $Q^* = Q \setminus \{0\}$), построить все полугруппы V, содержащие изоморфный S идеал S' такой, что фактор-полугруппа Рисса $V|S'$ изоморфна Q. Чтобы избежать двусмысленности, для фактор-полугруппы Рисса будем использовать обозначение $V|S$ вместо обычного V/S. Расширения слабо редуктивных полугрупп, строгие и собственные расширения, ретрактные, плотные и эквивалентные расширения были рассмотрены в [3]. Идеальные расширения тотально упорядоченных полугрупп изучались в [4], [5], топологических полугрупп — в [6], [7]. Мы часто интересовались построением более сложно устроенных полугрупп, решеток, упорядоченных множеств, упорядоченных или топологических полугрупп, а это иногда удается сделать построением идеальных расширений. Идеальные расширения упорядоченных множеств были рассмотрены в [8]. Ретрактные и эквивалентные расширения упорядоченных множеств были рассмотрены в [9], [10]. Для знакомства с идеальными расширениями упорядоченных полугрупп отсылаем к [11]. Как и в случае (неупорядоченных) полугрупп, эту проблему для упорядоченных полугрупп изучаем с помощью левых и правых трансляций. Сначала рассматриваем упорядоченную полугруппу S и упорядоченную полугруппу Q с нулем такие, что $S \cap Q^* = \emptyset$, и строим все упорядоченные полугруппы V, которые содержат изоморфный S идеал S' такой, что фактор-полугруппа Рисса $V|S'$ изоморфна Q. Обратно, доказываем, что каждая упорядоченная полугруппа, которая является расширением S посредством Q, может быть так построена. Так как проблема идеальных расширений уже была изучена в случае полугрупп, естественно перейти к рассмотрению этой проблемы для решеток. Целью данной статьи является построение идеальных расширений решеток. Приводим основную теорему об идеальных расширениях и один иллюстрирующий пример такого расширения. В точности так же, как и в случае полугрупп, проблему исследуем с помощью трансляторов, используя для этой цели только один вид трансляций (похожий на левые трансляции), который просто называем трансляцией. В этом заключается отличие от случая полугрупп, где использовались как левые, так и правые трансляторы. По решеткам L и K, где K имеет наименьший элемент и $L \cap K^* = \emptyset$ ($K^* = K \setminus \{0\}$), строим (все) решетки V, у которых есть изоморфный L идеал L' такой, что фактор-решетка Рисса $V|L'$ изоморфна K. Обратно, доказываем, что каждая решетка, которая является расширением L посредством K, может быть так построена. Результаты данной статьи были анонсированы без доказательств в [12]. Позднее некоторые авторы изъявили желание иметь более подробное изложение результатов из [12], что и сделано в этой работе. Данная работа инспирирована полугруппами. Целью работы является дать аналог идеального расширения полугрупп (или упорядоченных полугрупп) для решеток. Приводим необходимые определения и соответствующие результаты. Статьи, относящиеся к теории решеток, в списке литературы не приводим, хотя понятие трансляции в случае решеток было введено много лет назад (напр., [13]–[16]).

1. Определения и леммы

Воспользуемся хорошо известным понятием идеала [17]. Непустое подмножество L решетки V называется *идеалом* V, если 1) $a, b \in L$ влечет $a \vee b \in L$ и 2) $a \in L$ и $V \ni b \leq a$ влекут $b \in L$. Эквивалентно, если 1) $a, b \in L$ влечет $a \vee b \in L$ и 2) $a \in V$ и $b \in L$ влекут $a \wedge b \in L$.

Определение 1. Пусть L — решетка. Отображение $\lambda : L \to L$ называется *трансляцией* L, если $\lambda(x \wedge y) = \lambda(x) \wedge y$ для всех $x, y \in L$. Обозначим через $T(L)$ множество всех трансляций L.

Ясно, что если λ является трансляцией L, то $\lambda(x) \leq x$ для всех $x \in S$.

Лемма 1. *Пусть L — решетка. Определим операцию "$\wedge$" на $T(L)$ следующим образом:*

$$\wedge : T(L) \times T(L) \to T(L) \mid (\lambda_1, \lambda_2) \to \lambda_1 \wedge \lambda_2,$$

где

$$\lambda_1 \wedge \lambda_2 : L \to L \mid x \to \lambda_1(x) \wedge \lambda_2(x).$$

Тогда множество $T(L)$, наделенное операцией "$\wedge$", является нижней полурешеткой. Более того, для всех $\lambda_1, \lambda_2 \in T(L)$ имеет место соотношение

$$\lambda_1 \wedge \lambda_2 = \lambda_1\lambda_2 = \lambda_2\lambda_1,$$

где $\lambda_1\lambda_2 : L \to L \mid x \to \lambda_1(\lambda_2(x))$.

Доказательство. Нетрудно проверить, что "$\wedge$" на $T(L)$ всюду определена, идемпотентна, коммутативна и ассоциативна, поэтому множество $T(L)$, наделенное операцией "$\wedge$", является нижней полурешеткой. Теперь пусть $\lambda_1, \lambda_2 \in T(L)$ и $x \in L$. Тогда $(\lambda_1 \wedge \lambda_2)(x) := \lambda_1(x) \wedge \lambda_2(x) = \lambda_1(x \wedge \lambda_2(x))$ (так как $\lambda_1 \in T(L)$) $= \lambda_1(\lambda_2(x))$ (так как $\lambda_2 \in T(L)$). Таким образом, $\lambda_1 \wedge \lambda_2 = \lambda_1\lambda_2$. Симметрично имеем $\lambda_2 \wedge \lambda_1 = \lambda_2\lambda_1$. Имеем также $\lambda_1\lambda_2 = \lambda_2\lambda_1$, так как операция "$\wedge$" коммутативна. □

Лемма 2. *Пусть $(V, \vee, \wedge)$ — решетка, а L — идеал V. Рассмотрим множество $V|L := V \setminus L \cup \{0\}$, где 0 — произвольный элемент L, а $V \setminus L$ — дополнение L до V. Следующим образом определим операции "$\sqcup$" и "$\sqcap$" на $V|L$:*

$\sqcup : V|L \times V|L \to V|L \,\big|\, (x, y) \to x \sqcup y,$

где

$$x \sqcup y := \begin{cases} x \vee y, & \text{если } x, y \in V \setminus L; \\ x, & \text{если } x \in V \setminus L,\ y = 0; \\ y, & \text{если } y \in V \setminus L,\ x = 0; \\ 0, & \text{если } x = y = 0, \end{cases}$$

$\sqcap : V|L \times V|L \to V|L \,\big|\, (x, y) \to x \sqcap y,$

где

$$x \sqcap y := \begin{cases} x \wedge y, & \text{если } x \wedge y \in V \setminus L; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда множество $V|L$, наделенное операциями "$\sqcup$" и "$\sqcap$", является решеткой с наименьшим элементом 0.

Доказательство. (A) Сначала докажем, что операции "$\sqcap$" и "$\sqcap$" всюду определены и коммутативны. Для доказательства ассоциативности операции "$\sqcup$" рассмотрим несколько случаев:

1. $x, y, z \in V \setminus L$,
2. $x, y \in V \setminus L$, $z = 0$,
3. $y, z \in V \setminus L$, $x = 0$,
4. $z, x \in V \setminus L$, $y = 0$,
5. $x \in V \setminus L$, $y = z = 0$,
6. $y \in V \setminus L$, $z = x = 0$,
7. $z \in V \setminus L$, $x = y = 0$,
8. $x = y = 0$.

Рассмотрим случай 1. Случаи 2–8 доказываются аналогично.

1. Пусть $x, y, z \in V \setminus L$. Тогда $x \sqcup y := x \vee y \in V \setminus L$ и $(x \sqcup y) \sqcup z := (x \sqcup y) \vee z = (x \vee y) \vee z$. Кроме того, $y \sqcup z := y \vee z \in V \setminus L$ и $x \sqcup (y \sqcup z) := x \vee (y \sqcup z) = x \vee (y \vee z)$. Поэтому $(x \sqcup y) \sqcup z = x \sqcup (y \sqcup z)$.

(B) Для всех $x \in V|L$ имеем $x \sqcap 0 = 0 \sqcap x = 0$. Действительно, пусть $x \in V|L$. Так как $x \in V$, $0 \in L$ и L является идеалом V, то имеем также $x \wedge 0 \in L$. Так как $x \wedge 0 \notin V \setminus L$, то $x \sqcap 0 := 0$. Аналогично $0 \sqcap x = 0$.

(C) Операция “$\sqcap$” ассоциативна. Действительно, пусть $x, y, z \in V|L$. Поскольку $x, y, z \in V$, то $x \wedge y \wedge z \in V$.

1. Пусть $x \wedge y \wedge z \in V \setminus L$. Так как L является идеалом V, имеем $x \wedge y \notin L$ и $y \wedge z \notin L$. Так как $x \wedge y, y \wedge z \in V \setminus L$, то $x \sqcap y := x \wedge y$ и $y \sqcap z := y \wedge z$. Так как $(x \wedge y) \wedge z \in V \setminus L$, то $(x \wedge y) \sqcap z := (x \wedge y) \wedge z$. Поэтому $(x \sqcap y) \sqcap z = (x \wedge y) \wedge z$.

Поскольку $x \wedge (y \wedge z) \in V \setminus L$, то $x \sqcap (y \wedge z) := x \wedge (y \wedge z)$. Отсюда $x \sqcap (y \sqcap z) = x \wedge (y \wedge z)$. Поэтому $(x \sqcap y) \sqcap z = x \sqcap (y \sqcap z)$.

2. Пусть $x \wedge y \wedge z \notin V \setminus L$. Рассмотрим несколько случаев.

2.1. Пусть $x \wedge y$, $y \wedge z \in V \setminus L$. Тогда $x \sqcap y := x \wedge y$ и $y \sqcap z := y \wedge z$. Так как $(x \wedge y) \wedge z \notin V \setminus L$, то $(x \wedge y) \sqcap z := 0$, поэтому $(x \sqcap y) \sqcap z = 0$. Так как $x \wedge (y \wedge z) \notin V \setminus L$, то $x \sqcap (y \wedge z) := 0$, поэтому $x \sqcap (y \sqcap z) = 0$. Следовательно, $(x \sqcap y) \sqcap z = x \sqcap (y \sqcap z)$.

2.2. Пусть $x \wedge y \in V \setminus L$ и $y \wedge z \notin V \setminus L$. Тогда $x \sqcap y := x \wedge y$ и $y \sqcap z := 0$; $(x \sqcap y) \sqcap z = (x \wedge y) \sqcap z$ и $x \sqcap (y \sqcap z) = x \sqcap 0 = 0$. Так как $(x \wedge y) \wedge z \notin V \setminus L$, то $(x \wedge y) \sqcap z := 0$. Таким образом, $(x \sqcap y) \sqcap z = x \sqcap (y \sqcap z)$.

2.3. Пусть $x \wedge y \notin V \setminus L$ и $y \wedge z \in V \setminus L$. Доказательство аналогично 2.2.

2.4. Пусть $x \wedge y, y \wedge z \notin V \setminus L$. Так как $x \sqcap y := 0$ и $y \sqcap z := 0$, то $(x \sqcap y) \sqcap z = 0 \sqcap z = 0$ и $x \sqcap (y \sqcap z) = x \sqcap 0 = 0$.

(D) Для всех $x, y \in V|L$ имеем $x \sqcap (x \sqcup y) = x$. Действительно, пусть $x, y \in V|L$.

1. Если $x, y \in V \setminus L$, то $V|L \ni x \sqcup y := x \vee y$ и $x \sqcap (x \sqcup y) = x \sqcap (x \vee y)$. Так как $x \wedge (x \vee y) = x \in V \setminus L$, то $x \sqcap (x \vee y) := x \wedge (x \vee y) = x$. Поэтому $x \sqcap (x \sqcup y) = x$.

2. Если $x \in V \setminus L$, $y = 0$, то $V|L \ni x \sqcup y := x$ и $x \sqcap (x \sqcup y) = x \sqcap x$. Так как $V \setminus L \ni x = x \wedge x$, то $x \sqcap x = x \wedge x = x$. Поэтому $x \sqcap (x \sqcup y) = x$.

3. Если $x = 0$, $y \in V \setminus L$, то $V|L \ni x \sqcup y := y$. Следовательно, $x \sqcap (x \sqcup y) = x \sqcap y = 0 \sqcap y = 0 = x$.

4. Если $x = y = 0$, то $V|L \ni x \sqcup y := 0$ и $x \sqcap (x \sqcup y) = x \sqcap 0 = 0 = x$.

(E) Для всех $x, y \in V|L$ имеем $x \sqcup (x \sqcap y) = x$. Действительно, пусть $x, y \in V|L$. Ясно, что $x \wedge y \in V$.

1. Пусть $x \wedge y \in V \setminus L$. Тогда $V \setminus L \ni x \sqcap y := x \wedge y$ и $x \sqcup (x \sqcap y) = x \sqcup (x \wedge y)$. Если $x = 0$, то $x \sqcap y = 0 \sqcap y = 0 \in L$, что невозможно. Поэтому $x \in V \setminus L$. Так как $x, x \wedge y \in V \setminus L$, то $x \sqcup (x \wedge y) := x \vee (x \wedge y) = x$. Следовательно, $x \sqcup (x \sqcap y) = x$.

2. Пусть $x \wedge y \notin V \setminus L$. Так как $x \sqcap y := 0 \in V|L$, то $x \sqcup (x \sqcap y) = x \sqcup 0$. Если $x \in V \setminus L$, то $x \sqcup 0 := x$ и $x \sqcup (x \sqcap y) = x$. Если $x = 0$, то $x \sqcup (x \sqcap y) = 0 \sqcup 0 = 0 = x$. $\square$

Лемма 3. *Пусть $(V, \wedge, \vee)$ — решетка и L — идеал V. Для каждого $v \in V$ рассмотрим отображение*

$$\mu^v : L \to L \mid x \to v \wedge x.$$

Отображение μ^v является трансляцией L.

Доказательство. Так как L является идеалом V, то отображение μ^v всюду определено и является трансляцией L. Действительно, если $x, y \in L$, то

$$\mu^v(x \wedge y) = v \wedge (x \wedge y) = (v \wedge x) \wedge y = \mu^v(x) \wedge y. \qquad \square$$

В данной работе используем следующие обозначения.

Обозначение 1. Пусть $(L, \wedge, \vee)$ — решетка и $t \in L$. Обозначим через λ_t трансляцию L, которая определяется следующим образом: $\lambda_t : L \to L \mid x \to t \wedge x$. Назовем ее *внутренней трансляцией* L относительно t.

Обозначение 2. Пусть $(L, \wedge, \vee)$ — решетка и $t \in L$. Обозначим через π отображение L в $T(L)$, которое определяется следующим образом: $\pi : L \to T(L) \mid t \to \lambda_t$.

Замечание 1. Отображение π является $(1{-}1)$-отображением. Действительно, если $x, y \in L$ и $\lambda_x = \lambda_y$, то $\lambda_x(x) = \lambda_y(x)$ и $\lambda_x(y) = \lambda_y(y)$. Следовательно, $x = x \wedge x = y \wedge x$ и $x \wedge y = y \wedge y = y$, поэтому $x = y$.

Для решетки L через 0_L (или просто через 0) обозначим наименьший элемент L.

Определение 2. Пусть L — решетка, K — решетка с 0 и $L \cap K^* = \emptyset$, где $K^* = K \setminus \{0\}$. Решетка V называется *идеальным расширением* (или просто *расширением*) L посредством K, если существует идеал L' решетки V такой, что L' изоморфна L и фактор-решетка Рисса $V|L'$ изоморфна K (в символах $L \approx L'$, $V|L' \approx K$).

В дальнейшем через $\mathcal{A}(L, K^*)$ обозначим множество всех отображений L в K^*. Отображение f из A в B как обычно обозначаем через $f : A \to B$. Если особо не оговорено, порядок в решетке L обозначаем через "$\leq_L$", а операции супремума и инфинимума на L соответственно через "$\vee_L$" и "$\wedge_L$". Операции супремума и инфинимума на $V|L$ обозначаются соответственно через "$\sqcup$" и "$\sqcap$".

2. Основной результат

Приведем основной результат об (идеальных) расширениях решеток. По заданным решетке L и решетке K с наименьшим элементом построим (все) решетки V, являющиеся (идеальными) расширениями L посредством K. Также докажем и обратное, что каждая решетка V, которая является расширением L посредством K, может быть так построена.

Теорема. *Пусть L — решетка, а K — решетка с 0 и $L \cap K^* = \emptyset$. Предположим, что существуют отображения $\theta_1 : K^* \to T(L) \mid a \to \lambda^a$, $\theta_2 : K^* \to \mathcal{A}(L, K^*) \mid a \to \rho^a$, $f : \{(a, b) \mid a, b \in K^*, a \wedge_K b = 0\} \to L$, удовлетворяющие соотношениям*

(C1) $\theta_1(a)\theta_1(b) = \lambda_{f(a,b)}$ *для всех* $a, b \in K^*$, $a \wedge_K b = 0$;
(C2) $\theta_1(a \wedge_K b) = \theta_1(a)\theta_1(b)$ *для всех* $a, b \in K^*$, $a \wedge_K b \neq 0$;
(C3) $\rho^{a \vee_K b}(c) = \rho^a(c) \vee_K b$ *для всех* $a, b \in K^*$, $c \in L$;
(C4) $\rho^c(a \vee_L b) = \rho^{\rho^c(b)}(a)$ *для всех* $a, b \in L$, $c \in K^*$;
(C5) $\rho^a(\lambda^a(b)) = a$ *для всех* $a \in K^*$, $b \in L$;
(C6) $\lambda^{\rho^b(a)}(a) = a$ *для всех* $a \in L$, $b \in K^*$;
(C7) $\rho^a(f(a, b)) = a$ *для всех* $a, b \in K^*$, $a \wedge_K b = 0$.

Пусть $V := L \cup K^*$. Следующим образом определим операции "$\vee$" и "$\wedge$" на V:
$\vee : V \times V \to V \mid (a, b) \to a \vee b$,
где

$$a \vee b := \begin{cases} a \vee_L b, & \text{если } a, b \in L; & (S1) \\ \rho^b(a), & \text{если } a \in L,\ b \in K^*; & (S2) \\ \rho^a(b), & \text{если } a \in K^*,\ b \in L; & (S3) \\ a \vee_K b, & \text{если } a, b \in K^*, & (S4) \end{cases}$$

$\wedge : V \times V \to V \mid (a,b) \to a \wedge b,$

где

$$a \wedge b := \begin{cases} a \wedge_L b, & \text{если } a,b \in L; & (P1)\\ \lambda^b(a), & \text{если } a \in L,\ b \in K^*; & (P2)\\ \lambda^a(b), & \text{если } a \in K^*,\ b \in L; & (P3)\\ f(a,b), & \text{если } a,b \in K^*,\ a \wedge_K b = 0; & (P4)\\ a \wedge_K b, & \text{если } a,b \in K^*,\ a \wedge_K b \neq 0. & (P5)\end{cases}$$

Тогда $(V, \vee, \wedge)$ *является решеткой, которая расширяет* L *через* K.

Обратно, пусть V *расширяет* L *через* K. *Тогда существуют отображения* $\theta_1 : K^* \to T(L) \mid a \to \lambda^a$, $\theta_2 : K^* \to \mathcal{A}(L, K^*) \mid a \to \rho^a$, $f : \{(a,b) \mid a,b \in K^*,\ a \wedge_K b = 0\} \to L$ *такие, что условия* $(C1)$–$(C7)$, *о которых говорится в первой части теоремы, выполнены. Более того, множество* $L \cup K^*$, *наделенное операциями "*$\vee$*" и "*$\wedge$*", определенными в первой части теоремы, является решеткой и* $L \cup K^* \approx V$.

Доказательство. (A) Операция "$\vee$" всюду определена. Действительно, пусть $a, b \in V$. Если $a, b \in L$, то по (S1) имеем $a \vee b := a \vee_L b \in L \subseteq V$. Если $a \in L$, $b \in K^*$, то по (S2) имеем $a \vee b := \rho^b(a)$. Так как $b \in K^*$, то ρ^b является отображением L в K^*. Поскольку $a \in L$, то $\rho^b(a) \in K^* \subseteq V$, следовательно, $a \vee b \in V$. Если $a \in K^*$, $b \in L$, то по (S3) $a \vee b := \rho^a(b)$. Так как $a \in K^*$, то $\rho^a \in \mathcal{A}(L, K^*)$. Так как $b \in L$, то $\rho^a(b) \in K^* \subseteq V$. Если $a, b \in K^*$, то по (S4) имеем $a \vee b := a \vee_K b$. Если $a \vee_K b = 0$, то имеем $a = b = 0$, так как 0 является нулем в K, что невозможно. Поэтому $a \vee b \in K^* \subseteq V$. Аналогично доказывается, что если $a, b, c, d \in V$ такие, что $(a, b) = (c, d)$, то $a \vee b = c \vee d$.

(B) Операция "$\vee$" на V коммутативна. Действительно, если $a, b \in L$, то $a \vee b := a \vee_L b = b \vee_L a := b \vee a$. Если $a \in L$, $b \in K^*$, то по (S2) имеем $a \vee b := \rho^b(a)$ и по (S3) также имеем $b \vee a := \rho^b(a)$, поэтому $a \vee b = b \vee a$. Если $a \in K^*$, $b \in L$, то симметрично получим $a \vee b = b \vee a$. Если $a, b \in K^*$, то $a \vee b := a \vee_K b = b \vee_K a := b \vee a$.

(C) $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$ для всех $a, b, c \in V$. Действительно, возможны восемь случаев.

1. Пусть $a, b, c \in L$. Тогда $a \vee b := a \vee_L b \in L (\subseteq V)$, $b \vee c := b \vee_L c \in L (\subseteq V)$ и

$$(a \vee b) \vee c = (a \vee_L b) \vee c := (a \vee_L b) \vee_L c \text{ (по (S1))} = a \vee_L (b \vee_L c) = a \vee_L (b \vee c) := a \vee (b \vee c) \text{ (по (S1))}.$$

2. Пусть $a, b \in L$, $c \in K^*$. Так как $a, b \in L$, то $a \vee b := a \vee_L b \in L$. Поскольку $a \vee b \in L$ и $c \in K^*$, то по (S2) имеем $(a \vee b) \vee c := \rho^c(a \vee b)$. Так как $a \vee b = a \vee_L b \in L$ и ρ^c является отображением L в K^*, то $\rho^c(a \vee b) = \rho^c(a \vee_L b)$. Поэтому $(a \vee b) \vee c = \rho^c(a \vee_L b)$. Так как $b \in L$, $c \in K^*$, то по (S2) имеем $b \vee c := \rho^c(b) \in K^*$. Так как $a \in L$, $b \vee c \in K^*$, то по (S2) имеем $a \vee (b \vee c) := \rho^{b \vee c}(a)$. Так как $b \vee c = \rho^c(b) \in K^*$, то $\rho^{b \vee c} = \rho^{\rho^c(b)}$. Так как $\rho^{b \vee c}, \rho^{\rho^c(b)} : L \to K^*$, $\rho^{b \vee c} = \rho^{\rho^c(b)}$ и $a \in L$, то $\rho^{b \vee c}(a) = \rho^{\rho^c(b)}(a)$. Поэтому $a \vee (b \vee c) = \rho^{\rho^c(b)}(a)$. Но, с другой стороны, по (C4) имеем $\rho^c(a \vee_L b) = \rho^{\rho^c(b)}(a)$.

3. Пусть $b, c \in L$, $a \in K^*$. Так как $a \in K^*$, $b \in L$, то по (S3) имеем $a \vee b := \rho^a(b) \in K^*$. Так как $a \vee b \in K^*$, $c \in L$, то по (S3) имеем $(a \vee b) \vee c := \rho^{a \vee b}(c)$. Так как $a \vee b = \rho^a(b) \in K^*$, то $\rho^{a \vee b} = \rho^{\rho^a(b)}$. Так как $\rho^{a \vee b}, \rho^{\rho^a(b)} : L \to K^*$, $\rho^{a \vee b} = \rho^{\rho^a(b)}$ и $c \in L$, то $\rho^{a \vee b}(c) = \rho^{\rho^a(b)}(c)$. Поэтому $(a \vee b) \vee c = \rho^{\rho^a(b)}(c)$. Так как $b, c \in L$, то $b \vee c := b \vee_L c \in L$. Так как $a \in K^*$, $b \vee c \in L$, то по (S3) имеем $a \vee (b \vee c) := \rho^a(b \vee c)$. Так как $\rho^a : L \to K^*$ и $b \vee c = b \vee_L c \in L$, то $\rho^a(b \vee c) = \rho^a(b \vee_L c) = \rho^a(c \vee_L b)$. Поэтому $a \vee (b \vee c) = \rho^a(c \vee_L b)$. Так как $c, b \in L$, $a \in K^*$, то по (C4) имеем $\rho^a(c \vee_L b) = \rho^{\rho^a(b)}(c)$.

4. Пусть $c, a \in L$, $b \in K^*$. Так как $a \in L$, $b \in K^*$, то по (S2) имеем $a \vee b := \rho^b(a) \in K^*$. Так как $a \vee b \in K^*$ и $c \in L$, то по (S3) имеем $(a \vee b) \vee c := \rho^{a \vee b}(c)$. Так как $a \vee b = \rho^b(a) \in K^*$, то $\rho^{a \vee b} = \rho^{\rho^b(a)}$. Так как $\rho^{a \vee b}, \rho^{\rho^b(a)} : L \to K^*$, $\rho^{a \vee b} = \rho^{\rho^b(a)}$ и $c \in L$, то $\rho^{a \vee b}(c) = \rho^{\rho^b(a)}(c)$. Поэтому $(a \vee b) \vee c = \rho^{\rho^b(a)}(c)$. Так как $b \in K^*$, $c \in L$, то по (S3) имеем $b \vee c := \rho^b(c) \in K^*$.

Так как $a \in L$, $b \vee c \in K^*$, то по (S2) имеем $a \vee (b \vee c) := \rho^{b\vee c}(a)$. Так как $b \vee c = \rho^b(c) \in K^*$, то $\rho^{b\vee c} = \rho^{\rho^b(c)}$. Так как $\rho^{b\vee c}, \rho^{\rho^b(c)} : L \to K^*$, $\rho^{b\vee c} = \rho^{\rho^b(c)}$ и $a \in L$, то $\rho^{b\vee c}(a) = \rho^{\rho^b(c)}(a)$. Так как $c, a \in L$, $b \in K^*$, то по (C4) имеем $\rho^b(c \vee_L a) = \rho^{\rho^b(a)}(c)$. Так как $a, c \in L$, $b \in K^*$, то по (C4) имеем $\rho^b(a \vee_L c) = \rho^{\rho^b(c)}(a)$. Так как $\rho^b : L \to K^*$ и $c \vee_L a = a \vee_L c$, то $\rho^b(c \vee_L a) = \rho^b(a \vee_L c)$. Поэтому

$$(a \vee b) \vee c = \rho^{\rho^b(a)}(c) = \rho^b(c \vee_L a) = \rho^b(a \vee_L c) = \rho^{\rho^b(c)}(a) = \rho^{b\vee c}(a) = a \vee (b \vee c).$$

5. Пусть $a \in L$, $b, c \in K^*$. Так как $a \in L$, $b \in K^*$, то по (S2) имеем $a \vee b := \rho^b(a) \in K^*$. Так как $a \vee b, c \in K^*$, то по (S4) имеем $(a \vee b) \vee c := (a \vee b) \vee_K c$. Так как $a \vee b = \rho^b(a) \in K$, то $(a \vee b) \vee_K c = \rho^b(a) \vee_K c$. Следовательно, $(a \vee b) \vee c = \rho^b(a) \vee_K c$. Так как $b, c \in K^*$, то по (S4) имеем $b \vee c := b \vee_K c \in K^*$. Так как $a \in L$, $b \vee c \in K^*$, то по (S2) имеем $a \vee (b \vee c) := \rho^{b\vee c}(a)$. Так как $b \vee c = b \vee_K c \in K^*$, то $\rho^{b\vee c} = \rho^{b\vee_K c}$. Тогда получим $\rho^{b\vee c}(a) = \rho^{b\vee_K c}(a)$, так как $\rho^{b\vee c}, \rho^{b\vee_K c} : L \to K^*$ и $a \in L$. Таким образом, имеем $a \vee (b \vee c) = \rho^{b\vee_K c}(a)$. С другой стороны, так как $b, c \in K^*$ и $a \in L$, то по (C3) имеем $\rho^{b\vee_K c}(a) = \rho^b(a) \vee_K c$.

6. Пусть $c, a \in K^*$, $b \in L$. Тогда $a \vee b := \rho^a(b) \in K^*$ (по (S3)) и

$$(a \vee b) \vee c := (a \vee b) \vee_K c = \rho^a(b) \vee_K c \quad \text{(по (S4))}.$$

Также $b \vee c := \rho^c(b) \in K^*$ (по (S2)) и $a \vee (b \vee c) := a \vee_K (b \vee c) = a \vee_K \rho^c(b)$ (по (S4)). Так как $a, c \in K^*$, $b \in L$, то по (C3) имеем $\rho^{a\vee_K c}(b) = \rho^a(b) \vee_K c$. Так как $c, a \in K^*$, $b \in L$, то по (C3) имеем $\rho^{c\vee_K a}(b) = \rho^c(b) \vee_K a$. Так как $a \vee_K c = c \vee_K a \in K^*$, то $\rho^{a\vee_K c} = \rho^{c\vee_K a}$, поэтому $\rho^{a\vee_K c}(b) = \rho^{c\vee_K a}(b)$. Следовательно,

$$(a \vee b) \vee c = \rho^a(b) \vee_K c = \rho^{a\vee_K c}(b) = \rho^{c\vee_K a}(b) = \rho^c(b) \vee_K a = a \vee_K \rho^c(b) = a \vee (b \vee c).$$

7. Пусть $c \in L$, $a, b \in K^*$. Тогда $a \vee b := a \vee_K b \in K^*$ (по (S4)), $(a \vee b) \vee c := \rho^{a\vee b}(c) = \rho^{a\vee_K b}(c)$ (по (S3)), $b \vee c := \rho^b(c) \in K^*$ (по (S3)) и $a \vee (b \vee c) := a \vee_K (b \vee c) = a \vee_K \rho^b(c)$ (по (S4)). Так как $a \vee_K b = b \vee_K a \in K^*$, то $\rho^{a\vee_K b} = \rho^{b\vee_K a}$ и $\rho^{a\vee_K b}(c) = \rho^{b\vee_K a}(c)$. Так как $b, a \in K^*$, $c \in L$, то по (C3) имеем $\rho^{b\vee_K a}(c) = \rho^b(c) \vee_K a$. Таким образом,

$$(a \vee b) \vee c = \rho^{a\vee_K b}(c) = \rho^{b\vee_K a}(c) = \rho^b(c) \vee_K a = a \vee_K \rho^b(c) = a \vee (b \vee c).$$

8. Пусть $a, b, c \in K^*$. Тогда $a \vee b := a \vee_K b \in K^*$,

$$(a \vee b) \vee c := (a \vee b) \vee_K c = (a \vee_K b) \vee_K c, \quad b \vee c := b \vee_K c \in K^*$$

и

$$a \vee (b \vee c) = a \vee_K (b \vee c) = a \vee_K (b \vee_K c) = (a \vee_K b) \vee_K c.$$

(D) Операция “$\wedge$” всюду определена. Действительно, пусть $a, b \in V$. Если $a, b \in L$, то по (P1) имеем $a \wedge b := a \wedge_L b \in L \subseteq V$. Если $a \in L, b \in K^*$, то по (P2) имеем $a \wedge b := \lambda^b(a) \in L \subseteq V$. Если $a \in K^*$, $b \in L$, то по (P3) $a \wedge b := \lambda^a(b) \in L \subseteq V$. Пусть $a, b \in K^*$. Если $a \wedge_K b = 0$, то по (P4) $a \wedge b := f(a, b) \in L \subseteq V$. Если $a \wedge_K b \neq 0$, то по (P5) имеем $a \wedge b := a \wedge_K b \in K^* \subseteq V$. Аналогично доказывается, что если $a, b, c, d \in V$, $a = c$, $b = d$, то $a \wedge b = c \wedge d$.

(E) Операция “$\wedge$” коммутативна. Действительно, пусть $a, b \in V$. Если $a, b \in L$, то $a \wedge b := a \wedge_L b$. Так как $b, a \in L$, то $b \wedge a := b \wedge_L a = a \wedge_L b$. Поэтому $a \wedge b = b \wedge a$. Если $a \in L$, $b \in K^*$, то по (P2) имеем $a \wedge b := \lambda^b(a)$. По (P3) имеем $b \wedge a := \lambda^b(a)$. Поэтому $a \wedge b = b \wedge a$. Если $a \in K^*$, $b \in L$, то по (P3) имеем $a \wedge b := \lambda^a(b)$. Из (P2) следует $b \wedge a := \lambda^a(b)$. Таким образом, $a \wedge b = b \wedge a$. Пусть $a, b \in K^*$.

(a) Пусть $a \wedge_k b = 0$. Из (P4) следует $a \wedge b := f(a, b)$. Так как $b, a \in K^*$, $b \wedge_K a = 0$, то снова по (P4) имеем $b \wedge a := f(b, a)$. С другой стороны, имеет место $f(a, b) = f(b, a)$. Действительно, так как $a, b \in K^*$, $a \wedge_K b = 0$, то по (C1) имеем $\theta_1(a)\theta_1(b) = \lambda_{f(a,b)}$. Так как $b, a \in K^*$, $b \wedge_K a = 0$, то по (C1) имеем $\theta_1(b)\theta_1(a) = \lambda_{f(b,a)}$. Так как $\theta_1(a)$ и $\theta_1(b)$ — трансляции L, то из леммы 1 следует $\theta_1(a)\theta_1(b) = \theta_1(b)\theta_1(a)$. Таким образом, $\lambda_{f(a,b)} = \lambda_{f(b,a)}$. Так как отображение $\pi : L \to T(L) \mid t \to \lambda_t$ является (1–1)-отображением, то $f(a,b), f(b,a) \in L$, $\lambda_{f(a,b)} = \lambda_{f(b,a)}$, и имеем $f(a,b) = f(b,a)$. Таким образом, $a \wedge b = b \wedge a$.

(b) Пусть $a \wedge_k b \neq 0$. По (P5) имеем $a \wedge b := a \wedge_K b$. Так как $b, a \in K^*$ и $b \wedge_K a \neq 0$, то по (P5) имеем $b \wedge a := b \wedge_K a$. Так как $a \wedge_K b = b \wedge_K a$, то $a \wedge b = b \wedge a$.

(F) Покажем, что операция “$\wedge$” ассоциативна. Возможны восемь случаев.

1. Пусть $a, b, c \in L$. Тогда $a \wedge b := a \wedge_L b \in L$, $b \wedge c := b \wedge_L c \in L$, $(a \wedge b) \wedge c := (a \wedge b) \wedge_L c = (a \wedge_L b) \wedge_L c$, $a \wedge (b \wedge c) := a \wedge_L (b \wedge c) = a \wedge_L (b \wedge_L c)$. Так как $(a \wedge_L b) \wedge_L c = a \wedge_L (b \wedge_L c)$, то $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$.

2. Пусть $a, b \in L$, $c \in K^*$. Тогда $a \wedge b := a \wedge_L b \in L$, $b \wedge c := \lambda^c(b) \in L$, $(a \wedge b) \wedge c := \lambda^c(a \wedge b) = \lambda^c(a \wedge_L b)$, $a \wedge (b \wedge c) := a \wedge_L (b \wedge c) = a \wedge_L \lambda^c(b)$. С другой стороны,

$$\lambda^c(a \wedge_L b) = \lambda^c(b \wedge_L a) = \lambda^c(b) \wedge_L a \text{ (так как } \lambda^c \in T(L)) = a \wedge_L \lambda^c(b).$$

3. Пусть $b, c \in L$, $a \in K^*$. Тогда $a \wedge b := \lambda^a(b) \in L$, $b \wedge c := b \wedge_L c \in L$, $(a \wedge b) \wedge c := (a \wedge b) \wedge_L c = \lambda^a(b) \wedge_L c$, $a \wedge (b \wedge c) := \lambda^a(b \wedge c) = \lambda^a(b \wedge_L c)$. Так как $\lambda^a \in T(L)$, то $\lambda^a(b \wedge_L c) = \lambda^a(b) \wedge_L c$.

4. Пусть $c, a \in L$, $b \in K^*$. Тогда $a \wedge b := \lambda^b(a) \in L$, $b \wedge c := \lambda^b(c) \in L$, $(a \wedge b) \wedge c := (a \wedge b) \wedge_L c = \lambda^b(a) \wedge_L c$, $a \wedge (b \wedge c) := a \wedge_L (b \wedge c) = a \wedge_L \lambda^b(c)$. С другой стороны, $\lambda^b(a) \wedge_L c = \lambda^b(a \wedge_L c)$ (так как $\lambda^b \in T(L)$) $= \lambda^b(c \wedge_L a) = \lambda^b(c) \wedge_L a$ (так как $\lambda^b \in T(L)$) $= a \wedge_L \lambda^b(c)$.

5. Пусть $a \in L$, $b, c \in K^*$. Тогда $a \wedge b := \lambda^b(a) \in L$ и по лемме 1

$$(a \wedge b) \wedge c := \lambda^c(a \wedge b) = \lambda^c(\lambda^b(a)) := (\lambda^c \lambda^b)(a).$$

5.1. Пусть $b \wedge_K c = 0$. Тогда $b \wedge c := f(b,c) \in L$ и

$$a \wedge (b \wedge c) := a \wedge_L (b \wedge c) = a \wedge_L f(b,c) = f(b,c) \wedge_L a = \lambda_{f(b,c)}(a).$$

С другой стороны, так как $b, c \in K^*$ и $b \wedge_K c = 0$, то по (C1) имеем $\theta_1(b)\theta_1(c) = \lambda_{f(b,c)}$. Тогда $\lambda^c \lambda^b = \lambda^b \lambda^c = \lambda_{f(b,c)}$ (см. лемму 1) и $(\lambda^c \lambda^b)(a) = \lambda_{f(b,c)}(a)$.

5.2. Пусть $b \wedge_K c \neq 0$. Тогда $b \wedge c := b \wedge_K c \in K^*$ и $a \wedge (b \wedge c) := \lambda^{b \wedge c}(a) = \lambda^{b \wedge_K c}(a)$. С другой стороны, $(\lambda^c \lambda^b)(a) = \lambda^{b \wedge_K c}(a)$. Действительно, так как $b, c \in K^*$ и $b \wedge_K c \neq 0$, то по (C2) имеем $\theta_1(b \wedge_K c) = \theta_1(b)\theta_1(c)$. Тогда $\lambda^{b \wedge_K c} = \lambda^b \lambda^c = \lambda^c \lambda^b$ (см. лемму 1) и $(\lambda^c \lambda^b)(a) = \lambda^{b \wedge_K c}(a)$.

6. Пусть $b \in L$, $c, a \in K^*$. Тогда $a \wedge b := \lambda^a(b) \in L$, $b \wedge c := \lambda^c(b) \in L$, $(a \wedge b) \wedge c := \lambda^c(a \wedge b) = \lambda^c(\lambda^a(b)) := (\lambda^c \lambda^a)(b)$, $a \wedge (b \wedge c) := \lambda^a(b \wedge c) = \lambda^a(\lambda^c(b)) := (\lambda^a \lambda^c)(b)$. Так как λ^c, $\lambda^a \in T(L)$, то $\lambda^c \lambda^a = \lambda^a \lambda^c$ (см. лемму 1), поэтому $(\lambda^c \lambda^a)(b) = (\lambda^a \lambda^c)(b)$.

7. Пусть $c \in L$, $a, b \in K^*$. Тогда $b \wedge c := \lambda^b(c) \in L$ и $a \wedge (b \wedge c) := \lambda^a(b \wedge c) = \lambda^a(\lambda^b(c)) := (\lambda^a \lambda^b)(c)$.

7.1. Пусть $a \wedge_K b = 0$. Тогда $a \wedge b := f(a,b) \in L$ и $(a \wedge b) \wedge c := (a \wedge b) \wedge_L c = f(a,b) \wedge_L c$. С другой стороны, $(\lambda^a \lambda^b)(c) = f(a,b) \wedge_L c$. Действительно, так как $a, b \in K^*$ и $a \wedge_K b = 0$, то по (C1) имеем $\theta_1(a)\theta_1(b) = \lambda_{f(a,b)}$, следовательно, $\lambda^a \lambda^b = \lambda_{f(a,b)}$ и $(\lambda^a \lambda^b)(c) = \lambda_{f(a,b)}(c) := f(a,b) \wedge_L c$.

7.2. Пусть $a \wedge_K b \neq 0$. Тогда $a \wedge b := a \wedge_K b \in K^*$ и $(a \wedge b) \wedge c := \lambda^{a \wedge b}(c) = \lambda^{a \wedge_K b}(c)$. С другой стороны, $\lambda^{a \wedge_K b}(c) = (\lambda^a \lambda^b)(c)$. Действительно, так как $a, b \in K^*$ и $a \wedge_K b \neq 0$ по (C2), то $\theta_1(a \wedge_K b) = \theta_1(a)\theta_1(b)$. Поэтому $\lambda^{a \wedge_K b} = \lambda^a \lambda^b$ и $\lambda^{a \wedge_K b}(c) = (\lambda^a \lambda^b)(c)$.

8. Пусть $a, b, c \in K^*$. Рассмотрим следующие случаи.

8.1. Пусть $a \wedge_K b = b \wedge_K c = 0$. Тогда $a \wedge b := f(a,b) \in L$, $b \wedge c := f(b,c) \in L$, $(a \wedge b) \wedge c := \lambda^c(a \wedge b) = \lambda^c(f(a,b)) \in L$, $a \wedge (b \wedge c) := \lambda^a(b \wedge c) = \lambda^a(f(b,c)) \in L$. Имеем $\lambda_{\lambda^c(f(a,b))} = \lambda_{\lambda^a(f(b,c))}$. Действительно, пусть $x \in L$. Тогда

$$\lambda_{\lambda^c(f(a,b))}(x) := \lambda^c(f(a,b)) \wedge_L x := \lambda^c(f(a,b) \wedge_L x) \text{ (так как } \lambda^c \in T(L)) := \lambda^c(\lambda_{f(a,b)}(x)).$$

Так как $a, b \in K^*$ и $a \wedge_K b = 0$, то по (C1) имеем $\lambda_{f(a,b)} = \theta_1(a)\theta_1(b) = \lambda^a \lambda^b$. Отсюда, так как $\lambda^a \lambda^b \in T(L)$, то $\lambda^c(\lambda_{f(a,b)}(x)) = \lambda^c((\lambda^a \lambda^b)(x)) := (\lambda^c(\lambda^a \lambda^b))(x)$. Следовательно,

$\lambda_{\lambda^c(f(a,b))}(x) = (\lambda^c(\lambda^a\lambda^b))(x)$. Аналогично получаем $\lambda_{\lambda^a(f(b,c))}(x) = (\lambda^a(\lambda^b\lambda^c))(x)$. С другой стороны, по лемме 1 имеем

$\lambda^c(\lambda^a\lambda^b){=}(\lambda^a\lambda^b)\lambda^c$ (так как $\lambda^a\lambda^b{\in}T(L)){=}(\lambda^a{\wedge}\lambda^b){\wedge}\lambda^c{=}\lambda^a{\wedge}(\lambda^b{\wedge}\lambda^c){=}\lambda^a(\lambda^b\lambda^c)$ (см. лемму 1) .

Так как отображение $\pi : L \to T(L) \mid t \to \lambda_t$ является (1−1)-отображением, то $\lambda^c(f(a,b)) = \lambda^a(f(b,c))$.

8.2. Пусть $a \wedge_K b = 0$ и $b \wedge_K c \neq 0$. Тогда $a \wedge b := f(a,b) \in L$, $(a \wedge b) \wedge c := \lambda^c(a \wedge b) = \lambda^c(f(a,b)) \in L$, $b{\wedge}c := b{\wedge_K}c \in K^*$. Поскольку $a{\wedge_K}(b{\wedge}c) = a{\wedge_K}(b{\wedge_K}c) = (a{\wedge_K}b){\wedge_K}c = 0$, то $a \wedge (b \wedge c) := f(a, b \wedge c) = f(a, b \wedge_K c)$. Так как π является (1−1)-отображением, то достаточно доказать, что $\lambda_{\lambda^c(f(a,b))} = \lambda_{f(a,\, b\wedge_K c)}$. Теперь пусть $x \in L$. Тогда

$$\lambda_{\lambda^c(f(a,b))}(x) := \lambda^c(f(a,b)) \wedge_L x = \lambda^c(f(a,b) \wedge_L x)(\text{так как } \lambda^c \in T(L)) = \lambda^c(\lambda_{f(a,b)}(x)).$$

Так как $a, b \in K^*$ и $a \wedge_K b = 0$, то по (C1) получим $\lambda_{f(a,b)} = \theta_1(a)\theta_1(b) = \lambda_a\lambda_b$. Тогда

$$\lambda_{\lambda^c(f(a,b))}(x) = \lambda^c(\lambda_{f(a,b)}(x)) = \lambda^c((\lambda^a\lambda^b)(x)) = (\lambda^c(\lambda^a\lambda^b))(x).$$

Таким образом, $\lambda_{\lambda^c(f(a,b))} = \lambda^c(\lambda^a\lambda^b)$. Так как $a, b \wedge_K c \in K^*$ и $a \wedge_K (b \wedge_K c) = 0$ по (C1), то получим $\lambda_{f(a,b\wedge_K c)} = \theta_1(a)\theta_1(b \wedge_K c) = \lambda^a\theta_1(b \wedge_K c)$. Так как $b, c \in K^*$ и $b \wedge_K c \neq 0$, то по (C2) имеем $\theta_1(b \wedge_K c) = \theta_1(b)\theta_1(c) = \lambda^b\lambda^c$. Тогда $\lambda_{f(a,b\wedge_K c)} = \lambda^a(\lambda^b\lambda^c)$. С другой стороны, $\lambda^c(\lambda^a\lambda^b) = \lambda^a(\lambda^b\lambda^c)$.

8.3. Пусть $a \wedge_K b \neq 0$, $b \wedge_K c = 0$. В этом случае доказательство аналогично случаю 8.2.

8.4. Пусть $a \wedge_K b \neq 0$, $b \wedge_K c \neq 0$. Тогда $a \wedge b := a \wedge_K b \in K^*$, $b \wedge c := b \wedge_K c \in K^*$. Ясно, что $(a \wedge b) \wedge_K c = (a \wedge_K b) \wedge_K c \in K$.

(a) Пусть $(a \wedge b) \wedge_K c = 0$. Тогда $(a \wedge b) \wedge c := f(a \wedge b, c) = f(a \wedge_K b, c)$. Так как

$$a \wedge_K (b \wedge c) = a \wedge_K (b \wedge_K c) = (a \wedge_K b) \wedge_K c = (a \wedge b) \wedge_K c = 0,$$

то $a \wedge (b \wedge c) := f(a, b \wedge c) = f(a, b \wedge_K c)$. С другой стороны, $\lambda_{f(a\wedge_K b,c)} = \lambda_{f(a,b\wedge_K c)}$. Действительно, так как $a \wedge_K b, c \in K^*$ и $(a \wedge_K b) \wedge_K c = 0$ по (C1), то $\lambda_{f(a\wedge_K b,c)} = \theta_1(a \wedge_K b)\theta_1(c) = \theta_1(a \wedge_K b)\lambda^c$. Так как $a, b \in K^*$ и $a \wedge_K b \neq 0$ по (C2), то $\theta_1(a \wedge_K b) = \theta_1(a)\theta_1(b) = \lambda^a\lambda^b$. Отсюда $\lambda_{f(a\wedge_K b,c)} = (\lambda^a\lambda^b)\lambda^c$. Аналогично, из (C1) и(C2) получим $\lambda_{f(a,b\wedge_K c)} = (\lambda^a\lambda^b)\lambda^c$. С другой стороны, $(\lambda^a\lambda^b)\lambda^c = \lambda^a(\lambda^b\lambda^c)$ (см. лемму 1).

(b) Пусть $(a \wedge b) \wedge_K c \neq 0$. Тогда $(a \wedge b) \wedge c := (a \wedge b) \wedge_K c = (a \wedge_K b) \wedge_K c$. Так как

$$a \wedge_K (b \wedge c) = a \wedge_K (b \wedge_K c) = (a \wedge_K b) \wedge_K c = (a \wedge b) \wedge_K c,$$

то $a \wedge_K (b \wedge c) \neq 0$. Поэтому $a \wedge (b \wedge c) := a \wedge_K (b \wedge c) = a \wedge_K (b \wedge_K c)$.

(G) $a \wedge (a \vee b) = a$ для всех $a, b \in V$. Действительно, если $a, b \in L$, то $a \vee b := a \vee_L b \in L$ и $a \wedge (a \vee b) := a \wedge_L (a \vee b) = a \wedge_L (a \vee_L b) = a$. Если $a \in L$, $b \in K^*$, то $a \vee b := \rho^b(a) \in K^*$ и $a \wedge (a \vee b) := \lambda^{a\vee b}(a) = \lambda^{\rho^b(a)} = a$ по (C6). Если $a \in K^*$, $b \in L$, то $a \vee b := \rho^a(b) \in K^*$. С другой стороны,

$$a \wedge_K (a \vee b) = a \wedge_K \rho^a(b) = a \wedge_K \rho^{a\vee_K a}(b) = a \wedge_K (\rho^a(b) \vee_K a) = a \neq 0 \text{ по (C3)}.$$

Следовательно, $a \wedge (a \vee b) := a \wedge_K (a \vee b) = a$. Если $a, b \in K^*$, то $a \vee b := a \vee_k b \in K^*$. Так как $a \wedge_K (a \vee b) = a \wedge_K (a \vee_K b) = a \neq 0$, то $a \wedge (a \vee b) = a \wedge_K (a \vee b) = a$.

(H) $a \vee (a \wedge b) = a$ для всех $a, b \in V$. Действительно, если $a, b \in L$, то $a \wedge b := a \wedge_L b \in L$ и $a \vee (a \wedge b) := a \vee_L (a \wedge b) = a \vee_L (a \wedge_L b) = a$. Если $a \in L$, $b \in K^*$, то $a \wedge b := \lambda^b(a) \in L$ и $a \vee (a \wedge b) := a \vee_L (a \wedge b) = a \vee_L \lambda^b(a)$. Кроме того, $a \vee_L \lambda^b(a) = a$. Действительно, так как λ^b является трансляцией L, то $a \vee_L \lambda^a(a) = a \vee_L \lambda^b(a \wedge_L a) = a \vee_L (\lambda^b(a) \wedge_L a) = a$. Если $a \in K^*$, $b \in L$, то $a \wedge b := \lambda^a(b) \in L$ и $a \vee (a \wedge b) := \rho^a(a \wedge b) = \rho^a(\lambda^a(b)) = a$ по (C5). Пусть $a, b \in K^*$. Если $a \wedge_K b = 0$, то $a \wedge b := f(a,b) \in L$ и $a \vee (a \wedge b) := \rho^a(a \wedge b) = \rho^a(f(a,b)) = a$ по (C7). Если $a \wedge_K b \neq 0$, то $a \wedge b := a \wedge_K b \in K^*$ и $a \vee (a \wedge b) := a \vee_K (a \wedge b) = a \vee_K (a \wedge_K b) = a$.

(I) L является идеалом V. Действительно, если $a, b \in L$, то $a \vee b := a \vee_L b \in L$. Теперь пусть $a \in V$, $b \in L$. Если $a \in L$, то $a \wedge b := a \wedge_L b \in L$; если $a \in K^*$, то $a \wedge b := \lambda^a(b) \in L$.

(J) $(K, \vee_K, \wedge_K) \approx (V|L, \sqcup, \sqcap)$. Действительно, так как $V := L \cup K^*$ и $L \cap K^* = \emptyset$, то

$$V \setminus L = K^*. \tag{$*$}$$

Рассмотрим отображение

$$g : K \to V|L \,\Big|\, x \to \begin{cases} x, & \text{если } x \in K^*; \\ 0_{V|L}, & \text{если } x = 0_K. \end{cases}$$

Из $(*)$ следует, что отображение g всюду определено и является $(1{-}1)$-отображением "на". Отображение g — гомоморфизм и $g(x \vee_K y) = g(x) \sqcup g(y)$ для всех $x, y \in K$.

Действительно, пусть $x, y \in K$.

1. Если $x, y \in K^*$, то $x \vee_K y \in K^*$, $g(x) := x$, $g(y) := y$, $g(x \vee_K y) := x \vee_K y$. Так как $x, y \in K^* = V \setminus L$, то $x \vee y = x \vee_K y$ (по (S4)) и $x \sqcup y = x \vee y$ (см. лемму 2). Тогда $g(x \vee_K y) = g(x) \sqcup g(y)$.

2. Если $x \in K^*$, $y = 0_K$, то $g(x) := x$, $g(y) := 0_{V|L}$, $x \vee_K y = x$ и $g(x \vee_K y) = g(x) = x$. Так как $x \in K^* = V \setminus L \subseteq V|L$ и $0_{V|L}$ является наименьшим элементом $V|L$, то имеем $x = x \sqcup 0_{V|L}$. Поэтому $g(x \vee_K y) = x = x \sqcup 0_{V|L} = g(x) \sqcup g(y)$.

3. Если $x = 0_K$, $y \in K^*$, то доказательство аналогично случаю 2.

4. Если $x = y = 0_K$, то $g(x) := 0_{V|L}$, $g(y) := 0_{V|L}$, $x \vee_K y = 0_K$ и $g(x \vee_K y) = g(0_K) := 0_{V|L}$. Поэтому $g(x \vee_K y) = 0_{V|L} = 0_{V|L} \sqcup 0_{V|L} = g(x) \sqcup g(y)$, $g(x \wedge_K y) = g(x) \sqcap g(y)$ для всех $x, y \in K$. Действительно, пусть $x, y \in K$.

1) Если $x, y \in K^*$, то $g(x) := x$, $g(y) := y$.

1.1. Если $x \wedge_K y = 0_K$, то $g(x \wedge_K y) = g(0_K) := 0_{V|L}$. По (P4) имеем $x \wedge y := f(x, y) \in L$. Так как $x \wedge y \notin V \setminus L$, то $x \sqcap y := 0_{V|L}$ (см. лемму 2). Тогда $g(x \wedge_K y) = 0_{V|L} = x \sqcap y = g(x) \sqcap g(y)$.

1.2. Если $x \wedge_K y \neq 0_K$, то $g(x \wedge_K y) = x \wedge_K y$. По (P5) имеем $x \wedge y := x \wedge_K y \in K^* = V \setminus L$. Так как $x \wedge y \in V \setminus L$, то $x \sqcap y = x \wedge y$ (см. лемму 2). Тогда $g(x \wedge_K y) = x \wedge_k y = x \wedge y = x \sqcap y = g(x) \sqcap g(y)$.

2) Если $x \in K^*$, $y = 0_K$, то $g(x) := x$, $g(y) := 0_{V|L}$, $x \wedge_K y = 0_K$ и $g(x \wedge_K y) = g(0_K) := 0_{V|L}$. Так как $x \in K^* = V \setminus L (\subseteq V|L)$, то $x \sqcap 0_{V|L} = 0_{V|L}$. Поэтому $g(x \wedge_K y) = 0_{V|L} = x \sqcap 0_{V|L} = g(x) \sqcap g(y)$.

3) Если $x = 0_K$, $y \in K^*$, то доказательство аналогично случаю 2.

4) Если $x = y = 0_{V|L}$, то $g(x) = g(y) = g(x \wedge_K y) = 0_{V|L}$. Отсюда

$$g(x \wedge_K y) = 0_{V|L} = 0_{V|L} \sqcap 0_{V|L} = g(x) \sqcap g(y).$$

Обратное утверждение. Пусть $(V, \vee_V, \wedge_V)$ является продолжением $(L, \vee_L, \wedge_L)$ посредством $(K, \vee_K, \wedge_K)$. Тогда существуют идеал I в V и изоморфизмы $\phi : L \to I$ и $\psi : K \to V|I$.

(I) Рассмотрим отображение $h : K^* \to V|I \setminus \{0_{V|I}\} \,\big|\, x \to \psi(x)$.

1. Отображение h всюду определено. Действительно, пусть $x \in K^*$. Тогда $h(x) := \psi(x) \in V|I$. Пусть $\psi(x) = 0_{V|I}$. Так как $0_{V|I} \in V|I$ и ψ является отображением "на", то существует $t \in K$ такой, что $\psi(t) = 0_{V|I}$. Так как ψ является гомоморфизмом, то имеем

$$\psi(0_K) = \psi(0_K \wedge_K t) = \psi(0_K) \sqcap \psi(t) = \psi(0_K) \sqcap 0_{V|I} = 0_{V|I}.$$

Поскольку $\psi(x) = \psi(0_K)$ и ψ является $(1{-}1)$-отображением, то $x = 0_K$, что невозможно.

Если $x, y \in K^*$, $x = y$, то $h(x) := \psi(x)$, $h(y) := \psi(y)$ и $\psi(x) = \psi(y)$.

2. Так как ψ является $(1{-}1)$-отображением, то таким же является и h.

3. Отображение h является отображением "на". Действительно, пусть $y \in V|I \setminus \{0_{V|I}\}$. Так как $y \in V|I$ и ψ является отображением "на", то существует $x \in K$ такой, что $\psi(x) = y$.

Так как ψ является изоморфизмом, то равенство $x = 0_K$ влечет $y = \psi(0_K) = 0_{V|I}$, что невозможно. Таким образом, $x \in K^*$ и $h(x) := \psi(x)$.

(II) Рассмотрим отображение $\theta_1 : K^* \to T(L) \mid a \to \lambda^a := \phi^{-1}\mu^{h(a)}\phi$, где $\mu^{h(a)} : I \to I \mid x \to h(a) \wedge_V x$. Отображение θ_1 всюду определено. Действительно, пусть $a \in K^*$. Так как V — решетка, а I является идеалом V и $h(a) \in V|I \setminus \{0_{V|I}\} = V \setminus I \subseteq V$, то отображение $\mu^{h(a)}$ является трансляцией I (см. лемму 3). Так как $\phi : L \to I$, $\mu^{h(a)} : I \to I$ и $\phi^{-1} : I \to L$, то отображение $\phi^{-1}\mu^{h(a)}\phi : L \to L$ всюду определено. Более того, оно является трансляцией L. Действительно, пусть $x, y \in L$. Тогда

$$(\phi^{-1}\mu^{h(a)}\phi)(x \wedge_L y) = \phi^{-1}(\mu^{h(a)}\phi(x \wedge_L y)) = \phi^{-1}(\mu^{h(a)}(\phi(x) \wedge_I \phi(y))) =$$
$$(\text{так как } \phi \text{ — гомоморфизм}) = \phi^{-1}(\mu^{h(a)}\phi(x) \wedge_I \phi(y)) \ (\text{так как } \mu^{h(a)} \in T(I)) =$$
$$= \phi^{-1}(\mu^{h(a)}\phi(x)) \wedge_L \phi^{-1}(\phi(y)) \ (\phi^{-1} \text{ — гомоморфизм}) = (\phi^{-1}\mu^{h(a)}\phi)(x) \wedge_L y.$$

Теперь пусть $a, b \in K^*$ такие, что $a = b$. Тогда $h(a) = h(b)$, $\mu^{h(a)} = \mu^{h(b)}$ (см. лемму 3), поэтому $\phi^{-1}\mu^{h(a)}\phi = \phi^{-1}\mu^{h(b)}\phi$.

(III) Рассмотрим отображение $\theta_2 : K^* \to \mathcal{A}(L, K^*) \mid a \to \rho^a$ где $\rho^a : L \to K^* \mid x \to h^{-1}(h(a) \vee_V \phi(x))$. Отображение θ_2 всюду определено. Действительно, пусть $a \in K^*$ и $x \in L$. Тогда $h(a) \in V|I \setminus \{0_{V|I}\} = V \setminus I \subseteq V$, $\phi(x) \in I$, $h(a) \vee_V \phi(x) \in V$. Так как $V \ni h(a) \leq_V h(a) \vee_V \phi(x) \in I$ и I является идеалом V, то соотношение $h(a) \vee_V \phi(x) \in I$ влечет $h(a) \in I$, что невозможно. Поэтому $h(a) \vee_V \phi(x) \in V \setminus I = V|I \setminus \{0_{V|I}\}$ и, следовательно, $h^{-1}(h(a) \vee_V \phi(x)) \in K^*$. Если $x, y \in L$, $x = y$, то $\phi(x) = \phi(y)$, $h(a) \vee_V \phi(x) = h(a) \vee_V \phi(y)$ и $h^{-1}(h(a) \vee_V \phi(x)) = h^{-1}(h(a) \vee_V \phi(y))$. Таким образом, отображение ρ^a всюду определено.

Теперь пусть $a, b \in K^*$ такие, что $a = b$. Тогда $h(a) = h(b)$, $h(a) \vee_V \phi(x) = h(b) \vee_V \phi(x)$, $h^{-1}(h(a) \vee_V \phi(x)) = h^{-1}(h(b) \vee_V \phi(x))$, поэтому $\rho^a = \rho^b$.

(IV) Рассмотрим отображение

$$f : \{(a, b) \mid a, b \in K^*,\ a \wedge_K b = 0\} \to L \mid (a, b) \to \phi^{-1}(h(a) \wedge_V h(b)).$$

Отображение f всюду определено. Действительно, пусть $a, b \in K^*$, $a \wedge_K b = 0$. Так как $a, b \in K^*$, то $h(a), h(b) \in V|I \setminus \{0_{V|I}\} = V \setminus I \subseteq V$. Тогда $h(a) \wedge_V h(b) \in V$. С другой стороны, $h(a) \wedge_V h(b) \in I$. Действительно,

$$h(a) \sqcap h(b) = \psi(a) \sqcap \psi(b) = \psi(a \wedge_K b) = \psi(0_K)0_{V|I} \ (\text{так как } \psi \text{ является изоморфизмом}).$$

По лемме 2 имеем $h(a) \wedge_V h(b) \notin V \setminus I$. Так как $h(a) \wedge_V h(b) \in I$, то $\phi^{-1}(h(a) \wedge_V h(b)) \in L$.

Пусть $a, b, c, d \in K^*$ такие, что $a \wedge_K b = c \wedge_K d = 0$, $a = c$, $b = d$. Тогда $f(a, b) := \phi^{-1}(h(a) \wedge_V h(b))$ и $f(c, d) := \phi^{-1}(h(c) \wedge_V h(d))$. Так как $h(a) = h(c)$, $h(b) = h(d)$, то $f(a, b) = f(c, d)$.

Покажем, что условия (C1)–(C7), приведенные в первой части теоремы, удовлетворены.

(C1) Пусть $a, b \in K^*$, $a \wedge_K b = 0$. Тогда $\theta_1(a)\theta_1(b) = \lambda_{f(a,b)}$. Действительно, так как $a, b \in K^*$, $a \wedge_K b = 0$, то $f(a, b) := \phi^{-1}(h(a) \wedge_V h(b))$. Так как $a, b \in K^*$, то $\theta_1(a) := \phi^{-1}\mu^{h(a)}\phi$, $\theta_1(b) := \phi^{-1}\mu^{h(b)}\phi$ и $\theta_1(a)\theta_1(b) = \phi^{-1}\mu^{h(a)}\mu^{h(b)}\phi$. С другой стороны, $\phi^{-1}\mu^{h(a)}\mu^{h(b)}\phi = \lambda_{f(a,b)}$. Действительно, пусть $x \in L$. Тогда

$$(\phi^{-1}\mu^{h(a)}\mu^{h(b)}\phi)(x) := \phi^{-1}(\mu^{h(a)}(\mu^{h(b)}\phi(x))) = \phi^{-1}(\mu^{h(a)}(h(b) \wedge_V \phi(x))) =$$
$$= \phi^{-1}(h(a) \wedge_V (h(b) \wedge_V \phi(x))) = \phi^{-1}((h(a) \wedge_V h(b)) \wedge_V \phi(x)) = \phi^{-1}((h(a) \wedge_V h(b)) \wedge_I \phi(x)) =$$
$$(\text{так как } h(a) \wedge_V h(b) \in I,\ \phi(x) \in I) = \phi^{-1}(h(a) \wedge_V h(b)) \wedge_L \phi^{-1}(\phi(x)) =$$
$$= \phi^{-1}(h(a) \wedge_V h(b)) \wedge_L x := \lambda_{\phi^{-1}(h(a) \wedge_V h(b))}(x) = \lambda_{f(a,b)}(x).$$

(C2) Пусть $a, b \in K^*$, $a \wedge_K b \neq 0$. Тогда $\theta_1(a \wedge_K b) = \theta_1(a)\theta_1(b)$. Действительно, так как $a, b \in K^*$, $a \wedge_K b \neq 0$, то $\theta_1(a) := \phi^{-1}\mu^{h(a)}\phi$, $\theta_1(b) := \phi^{-1}\mu^{h(b)}\phi$, $\theta_1(a \wedge_K b) := \phi^{-1}\mu^{h(a\wedge_K b)}\phi$. С другой стороны, $\phi^{-1}\mu^{h(a\wedge_K b)}\phi = \phi^{-1}\mu^{h(a)}\mu^{h(b)}\phi$. Действительно, пусть $x \in L$. Тогда $(\phi^{-1}\mu^{h(a\wedge_K b)}\phi)(x) := \phi^{-1}(\mu^{h(a\wedge_K b)}\phi(x))$. Так как $a \wedge_K b \in K^*$ и $\phi(x) \in I$, то $\mu^{h(a\wedge_K b)}\phi(x) := h(a \wedge_K b) \wedge_V \phi(x)$. Поэтому

$$(\phi^{-1}\mu^{h(a\wedge_K b)}\phi)(x) = \phi^{-1}(h(a \wedge_K b) \wedge_V \phi(x)).$$

С другой стороны,

$$(\phi^{-1}\mu^{h(a)}\mu^{h(b)}\phi)(x) := \phi^{-1}(\mu^{h(a)}(\mu^{h(b)}\phi(x))) = \phi^{-1}(\mu^{h(a)}(h(b) \wedge_V \phi(x))) = \\ = \phi^{-1}(h(a) \wedge_V (h(b) \wedge_V \phi(x))) = \phi^{-1}((h(a) \wedge_V h(b)) \wedge_V \phi(x)).$$

Более того, $h(a \wedge_K b) = h(a) \wedge_V h(b)$. Действительно, так как $a, b, a \wedge_K b \in K^*$, то

$$h(a) := \psi(a) \in V|I \setminus \{0_{V|I}\}, \quad h(b) := \psi(b) \in V|I \setminus \{0_{V|I}\}, \\ h(a \wedge_K b) := \psi(a \wedge_K b) \in V|I \setminus \{0_{V|I}\}.$$

Тогда

$$0_{V|I} \neq h(a \wedge_K b) = \\ = \psi(a \wedge_K b) = \psi(a) \sqcap \psi(b) \text{ (так как } \psi : K \to V|I \text{ — изоморфизм) } = h(a) \sqcap h(b).$$

Так как $h(a), h(b) \in V|I$ и $h(a) \sqcap h(b) \neq 0_{V|I}$, то по лемме 2 имеем $h(a) \sqcap h(b) = h(a) \wedge_V h(b)$. Следовательно, $h(a \wedge_K b) = h(a) \wedge_V h(b)$.

(C3) Пусть $a, b \in K^*$, $c \in L$. Тогда $\rho^{a\vee_K b}(c) = \rho^a(c) \vee_K b$. Действительно, так как $a, a \vee_K b \in K^*$ и $c \in L$, то $\rho^{a\vee_K b}(c) := h^{-1}(h(a \vee_K b) \vee_V \phi(c)) \in K^*$, $\rho^a(c) := h^{-1}(h(a) \vee_V \phi(c)) \in K^*$. С другой стороны, $h^{-1}(h(a \vee_K b) \vee_V \phi(c)) = h^{-1}(h(a) \vee_V \phi(c)) \vee_K b$. Действительно, достаточно доказать, что $h(a \vee_K b) \vee_V \phi(c) = h(h^{-1}(h(a) \vee_V \phi(c)) \vee_K b)$. Имеем

$$h(h^{-1}(h(a) \vee_V \phi(c)) \vee_K b) := \psi(h^{-1}(h(a) \vee_V \phi(c)) \vee_K b) = \\ = \psi(h^{-1}(h(a) \vee_V \phi(c))) \sqcup \psi(b) \text{ (так как } \psi \text{ — гомоморфизм) } = h(h^{-1}(h(a) \vee_V \phi(c))) \sqcup h(b).$$

Так как $h(h^{-1}(h(a) \vee_V \phi(c))) \in V \setminus I$ и $h(b) \in V \setminus I$, то по лемме 2 имеем

$$h(h^{-1}(h(a) \vee_V \phi(c))) \sqcup h(b) = h(h^{-1}(h(a) \vee_V \phi(c))) \vee_V h(b).$$

Тогда

$$h(h^{-1}(h(a) \vee_V \phi(c)) \vee_K b) = h(h^{-1}(h(a) \vee_V \phi(c))) \vee_V h(b) = \\ = (h(a) \vee_V \phi(c)) \vee_V h(b) = (h(a) \vee_V h(b)) \vee_V \phi(c).$$

Так как $h(a), h(b) \in V \setminus I$, то из леммы 1 следует $h(a) \vee_V h(b) = h(a) \sqcup h(b)$. Поэтому

$$h(h^{-1}(h(a) \vee_V \phi(c)) \vee_K b) = (h(a) \vee_V h(b)) \vee_V \phi(c) = (h(a) \sqcup h(b)) \vee_V \phi(c) = \\ = (\psi(a) \sqcup \psi(b)) \vee_V \phi(c) = \psi(a \vee_K b) \vee_V \phi(c) \text{ (так как } \psi \text{ — гомоморфизм) } = \\ = h(a \vee_K b) \vee_V \phi(c) \text{ (так как } a \vee_K b \in K^*).$$

(C4) Пусть $a, b \in L$, $c \in K^*$. Тогда $\rho^c(a \vee_L b) = \rho^a(a)$. Действительно, имеем $\rho^c(a \vee_L b) := h^{-1}(h(c) \vee_V \phi(a \vee_L b)) \in K^*$, $\rho^c(b) := h^{-1}(h(c) \vee_V \phi(b)) \in K^*$ и

$$K^* \ni \rho^{\rho^c(b)}(a) := h^{-1}(h(\rho^c(b)) \vee_V \phi(a)) = \\ = h^{-1}(h(h^{-1}(h(c) \vee_V \phi(b))) \vee_V \phi(a)) := h^{-1}((h(c) \vee_V \phi(b)) \vee_V \phi(a)).$$

Достаточно доказать, что $h(c) \vee_V \phi(a \vee_L b) = (h(c) \vee_V \phi(b)) \vee_V \phi(a)$. Имеем

$$h(c) \vee_V \phi(a \vee_L b) = h(c) \vee_V (\phi(a) \vee_I \phi(b)) = \\ = h(c) \vee_V (\phi(a) \vee_V \phi(b)) \text{ (так как } \phi(a), \phi(b) \in I \subseteq V) = (h(c) \vee_V \phi(b)) \vee_V \phi(a).$$

(C5) Пусть $a \in K^*$, $b \in L$. Тогда $\rho^a(\lambda^a(b)) = a$. Действительно, так как $a \in K^*$ и $b \in L$, то $L \ni \lambda^a(b) := (\phi^{-1}\mu^{h(a)}\phi)(b) = \phi^{-1}(\mu^{h(a)}\phi(b)) = \phi^{-1}(h(a) \wedge_V \phi(b))$, поэтому

$$\rho^a(\lambda^a(b)) := h^{-1}(h(a) \vee_V \phi(\lambda^a(b))) = h^{-1}(h(a) \vee_V \phi(\phi^{-1}(h(a) \wedge_V \phi(b)))) = \\ = h^{-1}(h(a) \vee_V (h(a) \wedge_V \phi(b))) = h^{-1}(h(a)) = a.$$

(C6) Пусть $a \in L$, $b \in K^*$. Тогда $\lambda^{\rho^b(a)} := a$. Действительно, так как $a \in L$, $b \in K^*$, то $\rho^b(a) := h^{-1}(h(b) \vee_V \phi(a)) \in K^*$ и

$$\lambda^{\rho^b(a)}(a) := \phi^{-1}(\mu^{h(\rho^b(a))}\phi(a)) = \phi^{-1}(h(\rho^b(a)) \wedge_V \phi(a)) = \\ = \phi^{-1}(h(h^{-1}(h(b) \vee_V \phi(a))) \wedge_V \phi(a)) = \phi^{-1}((h(b) \vee_V \phi(a)) \wedge_V \phi(a)) = \phi^{-1}(\phi(a)) = a.$$

(C7) Пусть $a, b \in K^*$, $a \wedge_K b = 0$. Тогда $\rho^a(f(a,b)) = a$. Действительно,так как $a, b \in K^*$, $a \wedge_K b = 0$, то $f(a,b) := \phi^{-1}(h(a) \wedge_V h(b)) \in L$, поэтому

$$\rho^a(f(a,b)) := h^{-1}(h(a) \vee_V \phi(f(a,b))) = h^{-1}(h(a) \vee_V \phi(\phi^{-1}(h(a) \wedge_V h(b)))) = \\ = h^{-1}(h(a) \vee_V (h(a) \wedge_V h(b))) = h^{-1}(h(a)) = a.$$

Как следует из второй части теоремы, множество $L \cup K^*$, наделенное операциями “$\vee$” и “$\wedge$”, действующими на V, является решеткой, она также является расширением L посредством K. Более того, $(L \cup K^*, \vee, \wedge) \approx (V, \vee_V, \wedge_V)$. Чтобы это показать, рассмотрим отображение

$$g : L \cup K^* \to V \mid a \to \begin{cases} \varphi(a), & \text{если } a \in L; \\ h(a), & \text{если } a \in K^*. \end{cases}$$

Легко доказывается, что отображение g всюду определено и является $(1{-}1)$-отображением “на”. Докажем, что отображение g является гомоморфизмом.

1. Для всех $a, b \in L \cup K^*$ имеем $g(a \vee b) = g(a) \vee_V g(b)$. Действительно, пусть $a, b \in L \cup K^*$. Рассмотрим следующие случаи.

Пусть $a, b \in L$. Тогда $g(a) := \phi(a) \in I$, $g(b) := \phi(b) \in I$. Так как $a, b \in L$, то по (S1) имеем $a \vee b := a \vee_L b \in L$. Поэтому

$$g(a \vee b) = g(a \vee_L b) := \phi(a \vee_L b) = \phi(a) \vee_L \phi(b) \text{ (так как } \phi \text{ — гомоморфизм)} = \\ = \phi(a) \vee_V \phi(b) \text{ (так как } \phi(a), \phi(b) \in I \subseteq V\ ) = g(a) \vee_V g(b).$$

Пусть $a \in L$, $b \in K^*$, тогда $g(a) := \phi(a)$, $g(b) := h(b)$. Более того, из (S2) следует, что $a \vee b := \rho^b(a) \in K^*$, поэтому $g(a \vee b) = g(\rho^b(a)) := h(\rho^b(a))$. Так как $\rho^b(a) := h^{-1}(h(b) \vee_V \phi(a))$, то $g(a \vee b) = h(b) \vee_V \phi(a) = g(b) \vee_V g(a)$.

Пусть $a \in K^*$, $b \in L$. Тогда $g(a) := h(a)$, $g(b) := \phi(b)$ и по (S3) имеем $a \vee b := \rho^a(b) := h^{-1}(h(a) \vee_V \phi(b)) \in K^*$. Тогда $g(a \vee b) := h(a \vee b) = h(a) \vee_V \phi(b) = g(a) \vee_V g(b)$. Пусть $a, b \in K^*$, тогда $g(a) := h(a)$, $g(b) := h(b)$, $a \vee b := a \vee_K b \in K^*$ (по (S4)) и $g(a \vee b) = g(a \vee_K b) := h(a \vee_K b)$. С другой стороны, $h(a \vee_K b) = h(a) \sqcup h(b)$. Действительно, так как $a \vee_K b \in K^*$, то

$$h(a \vee_K b) := \psi(a \vee_K b) = \psi(a) \sqcup \psi(b) \text{ (так как } \psi \text{ — гомоморфизм)} = \\ = h(a) \sqcup h(b) \text{ (так как } a, b \in K^*).$$

Так как $h(a), h(b) \in V|I \setminus \{0_{V|I}\} = V \setminus I$, то по лемме 2 имеем $h(a) \sqcup h(b) = h(a) \vee_V h(b)$. Следовательно,

$$g(a \vee b) = h(a \vee_K b) = h(a) \sqcup h(b) = h(a) \vee_V h(b) = g(a) \vee_V g(b).$$

2. Для всех $a, b \in L \cup K^*$ имеем $g(a \wedge b) = g(a) \wedge_V g(b)$. Действительно, пусть $a, b \in L \cup K^*$. Рассмотрим следующие случаи.

Если $a, b \in L$, то $g(a) := \phi(a) \in I$, $g(b) := \phi(b) \in I$, $a \wedge b := a \wedge_L b \in L$ (по (P2)) и

$$g(a \wedge b) = g(a \wedge_L b) := \phi(a \wedge_L b) = \phi(a) \wedge_I \phi(b) \text{ (так как } \phi \text{ — гомоморфизм) } = \\ = \phi(a) \wedge_V \phi(b) \text{ (так как } \phi(a), \phi(b) \in I \subseteq V) \ = g(a) \wedge_V g(b).$$

Пусть $a \in L$, $b \in K^*$. Тогда $g(a) := \phi(a)$, $g(b) := \phi(b)$ и по (P2)

$$a \wedge b := \lambda^b(a) = (\phi^{-1}\mu^{h(b)}\phi)(a) = \phi^{-1}(\mu^{h(b)}\phi(a)) = \phi^{-1}(h(b) \wedge_V \phi(a)) \in L.$$

Поэтому

$$g(a \wedge b) := \phi(a \wedge b) = h(b) \wedge_V \phi(a) = g(b) \wedge_V g(a) = g(a) \wedge_V g(b).$$

Случай $a \in K^*$, $b \in L$ рассматривается аналогично.

Пусть $a, b \in K^*$. Тогда $g(a) := h(a)$, $g(b) := h(b)$. Рассмотрим несколько случаев.

(a) Пусть $a \wedge_K b = 0$. По (P4) имеем $a \wedge b := f(a, b) \in L$. Тогда $g(a \wedge b) = g(f(a, b)) := \phi(f(a, b))$. Так как $f(a, b) := \phi^{-1}(h(a) \wedge_V h(b))$, то $g(a \wedge b) = h(a) \wedge_V h(b) = g(a) \wedge_V g(b)$.

(b) Пусть $a \wedge_K b \neq 0$. По (P5) имеем $a \wedge b := a \wedge_K b \in K^*$. Тогда $g(a \wedge b) = g(a \wedge_K b) := h(a \wedge_K b)$. Так как $a, b, a \wedge_K b \in K^*$, то $h(a \wedge_K b) = h(a) \wedge_V h(b)$ (ср. с доказательством (C2)). Отсюда $g(a \wedge b) = h(a) \wedge_V h(b) = g(a) \wedge_V g(b)$. □

Проиллюстрируем эту теорему.

Пример. Определим множества L и K следующим образом:

$$L := \{(0,0), (1,2), (2,1)\} \cup \{(2,t) \mid t \in R,\ 2 \leq t < 3\}, \quad K := \{(0,0), (0,4), (2,3), (3,0), (3,4)\}.$$

(Здесь R — множество действительных чисел.) Множества L, K являются решетками относительно отношения “$\leq$” на R^2, которое определяется следующим образом: $(x, y) \leq (z, t) \Leftrightarrow x \leq z,\ y \leq t$.

Элемент $(0,0)$ является наименьшим элементом K и $L \cap K^* = \emptyset$, где $K^* := K \setminus \{(0,0)\}$. Наименьший элемент $(0,0)$ для K обозначается также через 0.

Их диаграммы изображены на рис. 1 и рис. 2.

(I) Рассмотрим отображение

$$\theta_1 : K^* \to T(L) \mid a \to \lambda^a := \begin{cases} i_L, & \text{если } a = (2,3) \text{ или } a = (3,4); \\ \lambda_{(0,0)} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

(Через i_L обозначили тождественное отображение на L.)

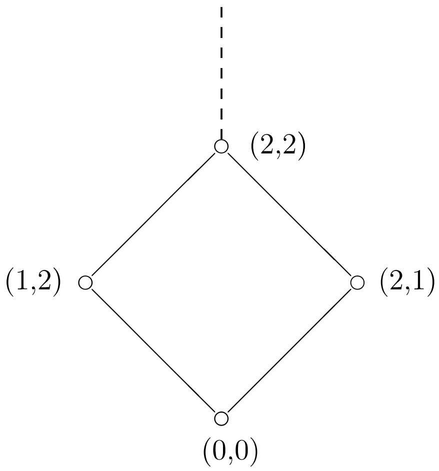
Отображение θ_1 всюду определено. Действительно, пусть $a \in K^*$. Если $a = (2,3)$ или $a = (3,4)$, то $\lambda^a := i_L \in T(L)$. Если $a = (0,4)$ или $a = (3,0)$, то $\lambda^a := \lambda_{(0,0)} \in T(L)$ (ср. с обозначением 1 на с. 50). Аналогично, если $a, b \in K^*$ и $a = b$, то $\lambda^a = \lambda^b$.

(II) Рассмотрим отображение $\theta_2 : K^* \to \mathcal{A}(L, K^*) \mid a \to \rho^a$, где ρ^a определяется следующим образом:

если $a = (2,3)$, то $\rho^a : L \to K^* \mid x \to a$; если $a \neq (2,3)$, то

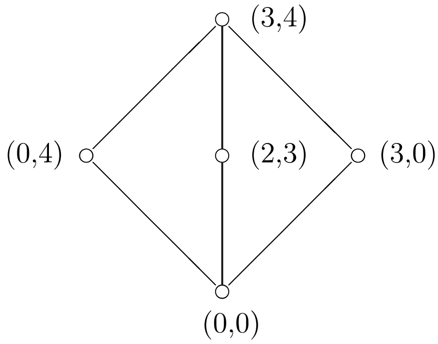
$$\rho^a : L \to K^* \mid x \to \begin{cases} a, & \text{если } x = (0,0); \\ (3,4), & \text{если } x \neq (0,0). \end{cases}$$

Докажем, что отображение θ_2 всюду определено.



L

Рис. 1.



K

Рис. 2.

1. Пусть $a \in K^*$. Покажем, что тогда $\rho^a \in \mathcal{A}(L, K^*)$.

1.1. Пусть $a = (2,3)$. Если $x \in L$, то $\rho^a(x) := a \in K^*$. Если $x, y \in L$, $x = y$, то $\rho^a(x) := a := \rho^a(y)$.

1.2. Пусть $a \neq (2,3)$. Если $x = (0,0)$, то $\rho^a(x) := a \in K^*$. Если $x \neq (0,0)$, то $\rho^a(x) := (3,4) \in K^*$. Пусть $x, y \in L$, $x = y$. Если $x = y = (0,0)$, то $\rho^a(x) := a := \rho^a(y)$. Если $x = y \neq (0,0)$, то $\rho^a(x) := (3,4) := \rho^a(y)$.

2. Пусть $a, b \in K^*$, $a = b$. Докажем, что $\rho^a = \rho^b$. Пусть $x \in L$.

2.1. Если $a = b = (2,3)$, то $\rho^a(x) := a = b := \rho^b(x)$.

2.2. Пусть $a = b \neq (2,3)$. Если $x = (0,0)$, то $\rho^a(x) := a = b := \rho^b(x)$. Если $x \neq (0,0)$, то $\rho^a(x) := (3,4) := \rho^b(x)$.

(III) Рассмотрим отображение $f : \{(a,b) \mid a, b \in K^*, a \wedge_k b = (0,0)\} \to L \mid (a,b) \to (0,0)$. Отображение f всюду определено. Действительно, если $a, b \in K^*$, $a \wedge_K b = (0,0)$, то $f(a,b) := (0,0) \in L$. Если $a, b, c, d \in K^*$, $a \wedge_K b = c \wedge_K d = (0,0)$, то $f(a,b) := (0,0) := f(c,d)$.

(IV) Условия (C1)–(C7) теоремы удовлетворены.

(C1) Пусть $a, b \in K^*$, $a \wedge_K b = (0,0)$. Докажем, что $\theta_1(a)\theta_1(b) = \lambda_{f(a,b)}$.

По условию имеем $f(a,b) := (0,0)$, $f(b,a) := (0,0)$. С другой стороны, $\theta_1(a)\theta_1(b) = \lambda_{(0,0)}$. Чтобы это показать, надо рассмотреть следующие возможности:

1. $a = (0,4)$, $b = (2,3)$,
2. $a = (0,4)$, $b = (3,0)$,
3. $a = (2,3)$, $b = (0,4)$,
4. $a = (2,3)$, $b = (3,0)$,
5. $a = (3,0)$, $b = (0,4)$,
6. $a = (3,0)$, $b = (2,3)$.

1. Пусть $a = (0,4)$, $b = (2,3)$. Тогда $\theta_1(a) := \lambda_{(0,0)}$, $\theta_1(b) := i_L$, $\theta_1(a)\theta_1(b) = \lambda_{(0,0)} i_L = \lambda_{(0,0)}$.

2. Пусть $a = (0,4)$, $b = (3,0)$. Тогда $\theta_1(a) := \lambda_{(0,0)}$, $\theta_1(b) := \lambda_{(0,0)}$, $\theta_1(a)\theta_1(b) = \lambda_{(0,0)}\lambda_{(0,0)} = \lambda_{(0,0)} \wedge \lambda_{(0,0)} = \lambda_{(0,0)}$ (ср. с леммой 1 на с. 48).

3. Пусть $a = (2,3)$, $b = (0,4)$. Тогда по п. 1 $\theta_1(a)\theta_1(b) = \theta_1(b)\theta_1(a) = \lambda_{f(b,a)} = \lambda_{f(a,b)}$.

4. Пусть $a = (2,3)$, $b = (3,0)$. Тогда $\theta_1(a) := i_L$, $\theta_1(b) := \lambda_{(0,0)}$ и $\theta_1(a)\theta_1(b) = i_L\lambda_{(0,0)} = \lambda_{(0,0)}$.

Пункты 5 и 6 рассматриваются аналогично.

(C2) Пусть $a, b \in K^*$, $a \wedge_K b \neq (0,0)$. Докажем, что $\theta_1(a \wedge_K b) = \theta_1(a)\theta_1(b)$. Если $a = b$, то

$$\theta_1(a \wedge_K b) = \theta_1(a \wedge_K a) = \theta_1(a) = \theta_1(a)\theta_1(a) \text{ (ср. с леммой 1) } = \theta_1(a)\theta_1(b).$$

Пусть $a \neq b$. Рассмотрим следующие случаи

1. $a = (0,4)$, $b = (3,4)$,
2. $a = (2,3)$, $b = (3,4)$,
3. $a = (3,0)$, $b = (3,4)$,
4. $a = (3,4)$, $b = (0,4)$,
5. $a = (3,4)$, $b = (2,3)$,
6. $a = (3,4)$, $b = (3,0)$.

1. Пусть $a = (0,4)$, $b = (3,4)$. Тогда $a \wedge_K b = (0,4)$, $\theta_1(a) := \lambda_{(0,0)}$, $\theta_1(b) := i_L$, $\theta_1(a \wedge_K b) := \lambda_{(0,0)} = \lambda_{(0,0)} i_L = \theta_1(a)\theta_1(b)$.

2. Пусть $a = (2,3)$, $b = (3,4)$. Тогда $a \wedge_K b = (2,3)$, $\theta_1(a) := i_L$, $\theta_1(b) := i_L$, $\theta_1(a \wedge_K b) := i_L = i_L i_L = \theta_1(a)\theta_1(b)$.

3. Пусть $a = (3,0)$, $b = (3,4)$. Тогда $a \wedge_K b = (3,0)$, $\theta_1(a) := \lambda_{(0,0)}$, $\theta_1(b) := i_L$, $\theta_1(a \wedge_K b) := \lambda_{(0,0)} = \lambda_{(0,0)} i_L = \theta_1(a)\theta_1(b)$.

4. Пусть $a = (3,4)$, $b = (0,4)$. Тогда по п. 1 $\theta_1(a \wedge_K b) = \theta_1(b \wedge_K a) = \theta_1(b)\theta_1(a) = \theta_1(a)\theta_1(b)$.

Пункты 5 и 6 рассматриваются аналогично.

(C3) Пусть $a, b \in K^*$, $c \in L$. Тогда $\rho^{a \vee_K b}(c) = \rho^a(c) \vee_K b$. Действительно, имеем следующее. Так как $a, b \in K^*$, то $a \vee_K b \in K^*$.

1. Пусть $a \vee_K b = (2,3)$. Тогда $\rho^{a \vee_K b}(c) = a \vee_K b = (2,3)$. Так как $a \in K^*$, $a = (2,3)$, то $\rho^a(c) := a = (2,3)$. Так как $K^* \ni b \leq a \vee_K b = (2,3)$, то $b = (2,3)$. С другой стороны, $\rho^a(c) \vee_K b = (2,3) \vee_K (2,3) = (2,3)$.

2. Пусть $a \vee_K b \neq (2,3)$.

2.1. Пусть $c = (0,0)$. Тогда $\rho^{a \vee_K b}(c) := a \vee_K b$ и имеет место следующее

2.1.1. Если $a = (2,3)$, то $\rho^a(c) := a$ и $\rho^a(c) \vee_K b = a \vee_k b$. Поэтому $\rho^{a \vee_K b}(c) = \rho^a(c) \vee_K b$.

2.1.2. Если $a \neq (2,3)$, то $c = (0,0)$, имеем $\rho^a(c) := a$ и $\rho(c) \vee_K b = a \vee_K b$. Поэтому $\rho^{a \vee_K b}(c) = \rho^a(c) \vee_K b$.

2.2. Пусть $c \neq (0,0)$. Тогда $\rho^{a \vee_K b}(c) := (3,4)$.

2.2.1. Пусть $a = (2,3)$. Если $b = (2,3)$, то $a \vee_K b = (2,3)$, что невозможно. Поэтому $b \neq (2,3)$ и $\rho^a(c) := a \neq b$. Так как $\rho^a(c), b \in K^*$, то $\rho^a(c) \vee_K b = (3,4)$. Отсюда $\rho^{a \vee_K b}(c) = \rho^a(c) \vee_K b$.

2.2.2. Пусть $a \neq (2,3)$. Так как $c \neq (0,0)$, то имеем $\rho^a(c) := (3,4) \geq b$. Поэтому $\rho^a(c) \vee_K b = (3,4)$ и $\rho^{a \vee_K b}(c) = \rho^a(c) \vee_K b$.

(C4) Пусть $a, b \in L$, $c \in K^*$. Тогда $\rho^c(a \vee_L b) = \rho^{\rho^c(b)}(a)$. Действительно, получим следующее.

1. Пусть $c = (2,3)$. Тогда $\rho^c(b) := c$, $\rho^{\rho^c(b)}(a) = \rho^c(a) := c$, $\rho^c(a \vee_L b) := c$.

2. Пусть $c \neq (2,3)$.

2.1. Пусть $b = (0,0)$. Тогда $\rho^c(b) := c$, $\rho^{\rho^c(b)}(a) = \rho^c(a)$, $a \vee_L b = a$ и $\rho^c(a \vee_L b) = \rho^c(a)$.

2.2. Пусть $b \neq (0,0)$. Тогда $\rho^c(b) := (3,4)$, $\rho^{\rho^c(b)}(a) = \rho^{(3,4)}(a)$.

2.2.1. Если $a = (0,0)$, то $\rho^{(3,4)}(a) := (3,4)$, $a \vee_L b = b \neq (0,0)$, $\rho^c(a \vee_L b) := (3,4)$.

2.2.2. Если $a \neq (0,0)$, то $\rho^{(3,4)}(a) := (3,4)$, $a \vee_L b \neq (0,0)$ и $\rho^c(a \vee_L b) = (3,4)$.

(C5) Пусть $a \in K^*$, $b \in L$. Тогда $\rho^a(\lambda^a(b)) = a$. Докажем это равенство.

1. Пусть $a = (2,3)$. Тогда $\lambda^a(b) := i_L(b) = b \in L$, и $\rho^a(\lambda^a(b)) := a$.

2. Пусть $a \neq (2,3)$.

2.1. Пусть $a = (3,4)$. Тогда $\lambda^a(b) := i_L(b) = b$, $\rho^a(\lambda^a(b)) = \rho^a(b)$. Если $b = (0,0)$, то $\rho^a(b) := a$. Если $b \neq (0,0)$, то $\rho^a(b) := (3,4) = a$.

2.2. Пусть $a \neq (3,4)$. Тогда $\lambda^a := \lambda_{(0,0)}$ и $\lambda^a(b) = \lambda_{(0,0)}(b) = (0,0) \wedge_L b = (0,0)$. Так как $a \neq (2,3)$ и $\lambda^a(b) = (0,0)$, то $\rho^a(\lambda^a(b)) := a$.

(C6) Пусть $a \in L$, $b \in K^*$. Докажем, что $\lambda^{\rho^b(a)}(a) = a$.

1. Если $b = (2,3)$, то $\rho^b(a) := b$ и $\lambda^{\rho^b(a)}(a) = \lambda^b(a) := a$.

2. Пусть $b \neq (2,3)$.

2.1. Пусть $a = (0,0)$. Так как $\lambda^{\rho^b(a)}$ является трансляцией L, имеем

$$\lambda^{\rho^b(a)}(a) = \lambda^{\rho^b(a)}(a \wedge_L a) = \lambda^{\rho^b(a)}(a) \wedge_L a = \lambda^{\rho^b(a)}(a) \wedge_L (0,0) = (0,0) = a.$$

2.2. Пусть $a \neq (0,0)$. Тогда $\rho^b(a) := (3,4)$, $\lambda^{\rho^b(a)} := i_L$ и $\lambda^{\rho^b(a)}(a) = a$.

(C7) Пусть $a, b \in K^*$, $a \wedge_K b = (0,0)$. Тогда $\rho^a(f(a,b)) = a$. Чтобы это доказать, рассмотрим два случая.

1. Пусть $a = (2,3)$. Так как $f(a,b) \in L$, то $\rho^a(f(a,b)) = a$.

2. Пусть $a \neq (2,3)$. Так как $a, b \in K^*$, $a \wedge_K b = (0,0)$, то $L \ni f(a,b) := (0,0)$ и, так как $a \neq (2,3)$, то имеем $\rho^a(f(a,b)) = a$.

По этой теореме множество $V := L \cup K^*$ с определенными ниже операциями "$\vee$" и "$\wedge$" на V является расширением L посредством K:

$$a \vee b := \begin{cases} a \vee_L b, & \text{если } a, b \in L; \\ \rho^b(a), & \text{если } a \in L,\ b \in K^*; \\ \rho^a(b), & \text{если } a \in K^*,\ b \in L; \\ a \vee_K b, & \text{если } a, b \in K^*, \end{cases} \qquad \begin{matrix} (S1) \\ (S2) \\ (S3) \\ (S4) \end{matrix}$$

$$a \wedge b := \begin{cases} a \wedge_L b, & \text{если } a, b \in L; \\ \lambda^b(a), & \text{если } a \in L,\ b \in K^*; \\ \lambda^a(b), & \text{если } a \in K^*,\ b \in L; \\ f(a,b), & \text{если } a, b \in K^*,\ a \wedge_K b = 0; \\ a \wedge_K b, & \text{если } a, b \in K^*,\ a \wedge_K b \neq 0. \end{cases} \qquad \begin{matrix} (P1) \\ (P2) \\ (P3) \\ (P4) \\ (P5) \end{matrix}$$

Пусть $a \in L$, $b \in K^*$. Если $b = (2,3)$, то $\rho^b(a) := b = (2,3)$. Пусть $b \neq (2,3)$. Если $a = (0,0)$, то $\rho^b(a) := b$. Если $a \neq (0,0)$, то $\rho^b(a) := (3,4)$.

Пусть $a \in K^*$, $b \in L$. Если $a = (2,3)$, то $\rho^a(b) := a = (2,3)$. Пусть $a \neq (2,3)$. Если $b = (0,0)$, то $\rho^a(b) := a$. Если $b \neq (0,0)$, то $\rho^a(b) := (3,4)$.

Пусть $a \in L$, $b \in K^*$. Если либо $b = (2,3)$, либо $b = (3,4)$, то $\lambda^b(a) := i_L(a) = a$. Если либо $b = (0,4)$, либо $b = (3,0)$, то $\lambda^b(a) := \lambda_{(0,0)}(a) = (0,0) \wedge_L a = (0,0)$.

Пусть $a \in K^*$, $b \in L$. Если $a = (2,3)$ или $a = (3,4)$, то $\lambda^a(b) := i_L(b) = b$. Если $a = (0,4)$ или $a = (3,0)$, то $\lambda^a(b) := \lambda_{(0,0)}(b) = (0,0) \wedge_L b = (0,0)$.

Если $a, b \in K^*$, $a \wedge_K b = 0$, то $f(a,b) := (0,0)$.

В результате операции "$\vee$" и "$\wedge$" выглядят следующим образом:

$$a \vee b := \begin{cases} a \vee_L b, & \text{если } a, b \in L; \\ (2,3), & \text{если } a \in L,\ b = (2,3); \\ b, & \text{если } L \ni a = (0,0),\ b \neq (2,3); \\ (3,4), & \text{если } L \ni a \neq (0,0),\ b \neq (2,3); \\ (2,3), & \text{если } a = (2,3),\ b \in L; \\ a, & \text{если } a \neq (2,3),\ L \ni b = (0,0); \\ (3,4), & \text{если } a \neq (2,3),\ L \ni b \neq (0,0); \\ a \vee_K b, & \text{если } a, b \in K^*, \end{cases}$$

$$a \wedge b := \begin{cases} a \wedge_L b, & \text{если } a, b \in L; \\ a, & \text{если } a \in L,\ b = (2,3); \\ a, & \text{если } a \in L,\ b = (3,4); \\ (0,0), & \text{если } a \in L,\ b = (0,4); \\ (0,0), & \text{если } a \in L,\ b = (3,0); \\ b, & \text{если } a = (2,3),\ b \in L; \\ b, & \text{если } a = (3,4),\ b \in L; \\ (0,0), & \text{если } a = (0,4),\ b \in L; \\ (0,0), & \text{если } a = (3,0),\ b \in L; \\ (0,0), & \text{если } a, b \in K^*,\ a \wedge_K b = 0; \\ a \wedge_K b, & \text{если } a, b \in K^*,\ a \wedge_K b \neq 0. \end{cases}$$

Наконец, заметим

1. $x \leq_V (2,3)$ для каждого $x \in L$. Это потому, что $x \vee (2,3) = (2,3)$ для всех $x \in L$.

2. $(0,0) \leq_V (0,4)$ и $(0,0) \leq_V (3,0)$. Действительно, имеем $(0,0) \vee (0,4) = (0,4)$, так как $(0,4) \neq (2,3)$ и $(0,0) \vee (3,0) = (3,0)$, если $(3,0) \neq (2,3)$.

3. $x \vee (0,4) = (3,4)$ и $x \vee (3,0) = (3,4)$ для всех $x \in L$, $x \neq (0,0)$.

Предположим, что $x \in L$, $x \neq (0,0)$.

1. Так как $(0,4) \neq (2,3)$, то $x \vee (0,4) = (3,4)$.

2. Так как $(3,0) \neq (2,3)$, то $x \vee (3,0) = (3,4)$.

Диаграмма для V имеет вид

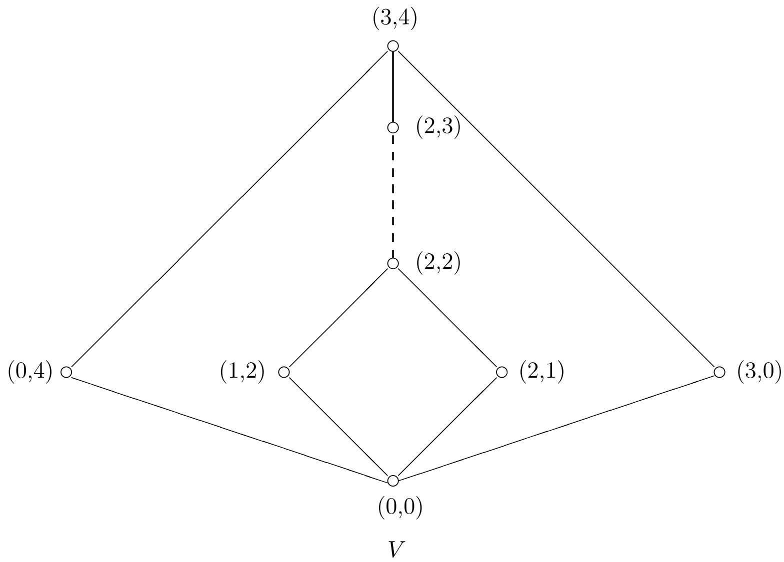


Рис. 3.

Литература

[1] Clifford A.H. *Extensions of semigroups* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1950. – V. 68. – P. 165–173.

[2] Clifford A.H. and Preston G.B. *The Algebraic Theory of Semigroups* // Mathematical Surveys. American Math. Soc. Providence, Rhode Island. – 1977. – V. I. – № 7. – 224 p.

[3] Petrich M. *Introduction to semigroups.* – Merrill Research and Lecture Series. Charles E. Merrill Publishing Co. Columbus, Ohio – 1973. – 198 p.

[4] Hulin A.J. *Extensions of ordered semigroups* // Semigroup Forum. – 1971. – V. 2. – № 4. – P. 336–342.

[5] Hulin A.J. *Extensions of ordered semigroups* // Czechoslovak Math. J. – 1976. – V. 26. – № 1. – P. 1–12.
[6] Christoph Fr.T. (Jr.) *Ideal extensions of topological semigroups* // Canad. J. Math. – 1970. – V. 22. – № 6. – P. 1168–1175.
[7] Hildebrant J.A. *Ideal extensions of compact reductive semigroups* // Semigroup Forum. – 1982. – V. 25. – № 3–4. – P. 283–290.
[8] Kehayopulu N. *Ideal extensions of ordered sets* // Int. J. Math. and Math. Sci. – 2004. – № 53. – P. 2847–2861.
[9] Kehayopulu N., Ponizovskii J.S., Shum K.P. *Retract extensions of ordered sets* // Зап. научн. сем. ПОМИ. – 2005. – Т. 321. – С. 205–212.
[10] Kehayopulu N., Shum K.P. *Equivalent extensions of ordered sets* // Algebras Groups Geom. – 2003. – V. 20. – № 4. – P. 387–402.
[11] Kehayopulu N., Tsingelis M. *The ideal extensions of ordered semigroups* // Comm. Algebra. – 2003. – V. 31. – № 10. – P. 4939–4969.
[12] Kehayopulu N., Kiriakuli P. *The ideal extensions of lattices* // Simon Stevin. – 1990. – V. 64. – № 1. – P. 51–60.
[13] Szász G. *Die Translationen der Halbverbände* // Acta Sci. Math. – 1956. – V. 17. – P. 165–169.
[14] Szász G., Szendrei J. *Über die Translationen der Halbverbände* // Acta Sci. Math. – 1957. – V. 18. – P. 44–47.
[15] Szász G. *Translationen der Verbände* // Acta Fac. Rer. Nat. Univ. Comenianae Math. – 1961. – V. 5. – P. 449–453.
[16] Kolibiar M. *Bemerkungen über Translationen der Verbände* // Acta Fac. Rer. Nat. Univ. Comenianae Math. – 1961. – V. 5. – P. 455–458.
[17] Birkhoff G. *Lattice Theory* // Third edition. American Math. Soc. Colloquium Publ. Providence, Rhode Island. –1967. – V. 25. – 418 p.

Н. Кехайопулу

Афинский университет, математический факультет,
157 84 Панепистимиополис, Афины, Греция,

`e-mail:` e-mail: nkehayop@math.uoa.gr

Naiovi Kehayopulu

University of Athenes, Mathematical Faculty,
157 84 Panepistimiopolis, Athenes, Greece,

`e-mail:` e-mail:nkehayop@math.uoa.gr