И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

1999 МАТЕМАТИКА № 11 (450)

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 512.552.7

Р.Ж. АЛЕЕВ, Г.А. ПАНИНА

ЕДИНИЦЫ ЦИКЛИЧЕСКИХ ГРУПП ПОРЯДКОВ 7 И 9

1. Введение

Данная работа написана на основе доклада авторов на Международной конференции "Алгебра и анализ", посвященной 100-летию со дня рождения Н.Г. Чеботарева (Казань, июнь 1994 г.) [1]. В работе будут рассматриваться целочисленные групповые кольца, и для краткости будем называть их единицы (= обратимые элементы) единицами соответствующих групп. Полная информация о группах единиц циклических групп порядков 5, 8, 10 и 12 приведена в [2]. В данной работе описаны группы единиц циклических групп порядков 7 и 9. Таким образом, получается описание групп единиц всех циклических групп порядка не более 10, потому что для других порядков единицы тривиальны.

2. Единицы циклической группы порядка 7

Пусть α — первообразный корень степени 7 из единицы, $\eta_1 = \alpha + \alpha^{-1}$ и $\eta_2 = \alpha^2 + \alpha^{-2}$. Пусть $\mathbb{Z}[\alpha]$ — кольцо круговых целых степени 7, и $U(\mathbb{Z}[\alpha])$ — его группа единиц.

Лемма 1 ([3], с. 241). $U(\mathbb{Z}[\alpha]) = \langle -1\rangle \times \langle \alpha\rangle \times \langle \eta_1\rangle \times \langle \eta_2\rangle$.

Пусть $\mathbb{Z}\langle x\rangle$ — целочисленное групповое кольцо циклической группы $\langle x\rangle$ порядка 7, и $U(\mathbb{Z}\langle x\rangle)$ — его группа единиц. Пусть

$$\varphi : \mathbb{Z}\langle x\rangle \to \mathbb{Z}[\alpha] \quad \varphi\Big(\sum_{i=0}^{6} a_i x^i\Big) = \sum_{i=0}^{6} a_i \alpha^i,$$
$$\psi : \mathbb{Z}\langle x\rangle \to \mathbb{Z} \qquad \psi\Big(\sum_{i=0}^{6} a_i x^i\Big) = \sum_{i=0}^{6} a_i.$$

Эти отображения — гомоморфизмы колец.

Лемма 2. *Если u_1 — единица кольца $\mathbb{Z}\langle x\rangle$ и $\varphi(u_1) = \eta_1^k$, то k делится на 3. Причем, если $\varphi(u_1) = \eta_1^3$, то $u_1 = -1 + 2x - x^2 - x^5 + 2x^6$ и $u_1^{-1} = -3 + x + 3x^2 - 2x^3 - 2x^4 + 3x^5 + x^6$.*

Доказательство. Пусть $\varphi(u_1) = \eta_1$. Тогда $u_1 \in x + x^6 + \ker\varphi$. Так как $\ker\varphi = \Big\{\sum\limits_{i=0}^{6} a_i x^i \,|\, a_i = a_6$ для всех $i = 1, \dots, 5\Big\}$, то $u_1 = x + x^6 + a\sum\limits_{i=0}^{6} x^i$, но тогда $\psi(u_1) = 2 + 7a = \pm 1$, что невозможно. Пусть $\varphi(u_1) = \eta_1^3 = \alpha^3 + 3\alpha + 3\alpha^{-1} + \alpha^{-3}$. Тогда $u_1 = 3x + x^3 + x^4 + 3x^6 + a\sum\limits_{i=0}^{6} x^i$ и $\psi(u_1) = 8 + 7a = \pm 1$. Отсюда $a = -1$ и $u_1 = 3x + x^3 + x^4 + 3x^6 - \sum\limits_{i=0}^{6} x^i = -1 + 2x - x^2 - x^5 + 2x^6$. $\square$

Аналогично доказываются

Лемма 3. *Если* u_2 *— единица кольца* $\mathbb{Z}\langle x\rangle$ *и* $\varphi(u_2)=\eta_2^n$, *то* n *делится на* 3. *Причем если* $\varphi(u_2)=\eta_2^3$, *то* $u_2=-1+2x^2-x^3-x^4+2x^5$ *и* $u_2^{-1}=-3-2x+x^2+3x^3+3x^4+x^5-2x^6$.

Лемма 4. *Если* u_3 *— единица кольца* $\mathbb{Z}\langle x\rangle$, $\varphi(u_3)=\eta_1^r\eta_1^s$, r *и* s *не делятся на* 3, *то* $r\not\equiv s\,(\mathrm{mod}\,3)$. *Причем если* $\varphi(u_3)=\eta_1\eta_2^2$, *то* $u_3=-1+x+x^6$ *и* $u_3^{-1}=1+x-x^3-x^4+x^6$.

Теорема 1. *Пусть* $U(\mathbb{Z}\langle x\rangle)$ *— группа единиц целочисленного группового кольца циклической группы порядка* 7 *и* φ *определено как ранее. Тогда*

$$U(\mathbb{Z}\langle x\rangle)=\langle -1\rangle\times\langle x\rangle\times\langle u_2\rangle\times\langle u_3\rangle,$$

где u_2 *и* u_3, *как в леммах* 3 *и* 4. *Кроме того,* $U(\mathbb{Z}[\alpha])/\varphi(U(\mathbb{Z}\langle x\rangle))\cong\mathbb{Z}_3$.

Доказательство. Пусть u — произвольная единица кольца $\mathbb{Z}\langle x\rangle$. Тогда по лемме 1 $\varphi(u)=(-1)^i\alpha^j\eta_1^k\eta_2^n$ и $\varphi((-1)^ix^{-j}u)=\eta_1^k\eta_2^n$. Пусть $k=3p+r$ и $n=3t+s$, где $r,s\in\{0,1,2\}$, и по леммам 2–4 либо $r=s=0$, либо $rs=2$. По леммам 2 и 3 $\varphi((-1)^ix^{-j}u_1^{-p}u_2^{-t}u)=\eta_1^r\eta_2^s$ и по лемме 4 $\varphi((-1)^ix^{-j}u_1^{-p}u_2^{-t}u_3^{-1}u)=1$ при $r=1$ и $s=2$, а $\varphi((-1)^ix^{-j}u_1^{-p}u_2^{-t}u_1^{-1}u_2^{-1}u_3u)=1$ при $r=2$ и $s=1$. Так как по теореме 12 из [2] гомоморфизм φ инъективен на группе единиц кольца $\mathbb{Z}\langle x\rangle$, то

$$U(\mathbb{Z}\langle x\rangle)=\langle -1\rangle\times\langle x\rangle\times\langle u_1,u_2,u_3\rangle.$$

Заметим, что $\eta_1^3=(\eta_1\eta_2^2)^3(\eta_2^3)^{-2}$ и в силу инъективности φ на группе единиц $u_1=u_3^3u_2^{-2}$. Отсюда $\langle u_1,u_2,u_3\rangle=\langle u_2,u_3\rangle$ и

$$U(\mathbb{Z}[\alpha])/\varphi(U(\mathbb{Z}\langle x\rangle))=(\langle -1\rangle\times\langle\alpha\rangle\times\langle\eta_1\rangle\times\langle\eta_2\rangle)/(\langle -1\rangle\times\langle\alpha\rangle\times\langle\eta_2^3\rangle\times\langle\eta_1\eta_2^2\rangle)\cong$$
$$\cong(\langle\eta_1\rangle\times\langle\eta_2\rangle)/(\langle\eta_2^3\rangle\times\langle\eta_1\eta_2^2\rangle).$$

Откуда $U(\mathbb{Z}[\alpha])/\varphi(U(\mathbb{Z}\langle x\rangle))\cong\mathbb{Z}_3$. □

3. Единицы циклической группы порядка 9

3.1. *Единицы круговых целых степени* 9. Пусть α — первообразный корень степени 9 из единицы и $k=\mathbb{Q}(\alpha)$. Пусть $P=\langle 1-\alpha^i\mid i=1,\dots,8\rangle$ — подгруппа мультипликативной группы поля k. По определению подгруппой круговых единиц назовем подгруппу $C=P\cap U(\mathbb{Z}[\alpha])$, где $U(\mathbb{Z}[\alpha])$ — группа единиц кольца круговых целых степени 9.

Лемма 5. $U(\mathbb{Z}[\alpha])=C$, *т. е. всякая единица кольца* $\mathbb{Z}[\alpha]$ *является круговой единицей.*

Доказательство[1]. Пусть $U(\mathbb{Z}[\alpha])=E$, E^+ — подгруппа вещественных единиц кольца $\mathbb{Z}[\alpha]$ и $C^+=C\cap E^+$. Из ([6], сс. 107, 119) следует, что $E^+/C^+\cong E/C$ и $|E^+/C^+|=h^+$, где h^+ — число классов максимального вещественного подполя поля k. Согласно [7] $h^+=1$ и потому $U(\mathbb{Z}[\alpha])=E=C$. □

Теорема 2. *Группа единиц кольца круговых целых степени* 9

$$U(\mathbb{Z}[\alpha])=\langle -1\rangle\times\langle\alpha\rangle\times\langle\lambda\rangle\times\langle\mu\rangle,$$

где $\lambda=\alpha+\alpha^8$ *и* $\mu=\alpha^4+\alpha^5$.

Доказательство. Для любого j $1-\alpha^{9-j}=(-\alpha^{-j})(1-\alpha^j)$ и $(1-\alpha)(1-\alpha^2)(1-\alpha^4)=(-\alpha^2)(1-\alpha^3)$. Поэтому для $u\in C=U(\mathbb{Z}[\alpha])$

$$u=(-\alpha)^j(1-\alpha)^n(1-\alpha^2)^p(1-\alpha^4)^r$$

для подходящих целых j, n, p, r.

[1] Первоначальное доказательство следовало доказательству леммы 1. Авторы признательны Л.В. Кузьмину на указание статьи [6].

Пусть N — норма расширения $k/\mathbb{Q}$. По лемме 1.3 из ([4], с. 19) $N(1-\alpha^j)=3$ для $(j,3)=1$. Так как u — единица, то $N(u)=1^j\cdot 3^n\cdot 3^p\cdot 3^r=3^{n+p+r}=1$ и $n+p+r=0$. Поэтому

$$u=(-\alpha)^j\left(\frac{1-\alpha^2}{1-\alpha}\right)^p\left(\frac{1-\alpha^4}{1-\alpha}\right)^r.$$

Так как $\frac{1-\alpha^2}{1-\alpha}=1+\alpha$ и $\frac{1-\alpha^4}{1-\alpha}=(1+\alpha)(1+\alpha^2)$, а $\lambda=\alpha+\alpha^8=\alpha^{-1}(1+\alpha^2)$ и $\mu=\alpha^4+\alpha^5=\alpha^4(1+\alpha)$, то $U(\mathbb{Z}[\alpha])=\langle -1\rangle\times\langle\alpha\rangle\times\langle\lambda\rangle\times\langle\mu\rangle$. $\square$

3.2. *Единицы кольца $\mathbb{Z}\langle x\rangle$.* Для дальнейших вычислений удобно ввести следующие отображения:

$$\varphi:\mathbb{Z}\langle x\rangle\to\mathbb{Z}[\alpha],\quad \tau:\mathbb{Z}\langle x\rangle\to\mathbb{Z}[\alpha^3],\quad \psi:\mathbb{Z}\langle x\rangle\to\mathbb{Z},$$

действующие по правилам

$$\varphi\left(\sum_{i=0}^{8}a_ix^i\right)=\sum_{i=0}^{8}a_i\alpha^i,\quad \tau\left(\sum_{i=0}^{8}a_ix^i\right)=\sum_{i=0}^{8}a_i\alpha^{3i},\quad \psi\left(\sum_{i=0}^{8}a_ix^i\right)=\sum_{i=0}^{8}a_i.$$

Эти отображения — гомоморфизмы колец.

Лемма 6.
1) $\ker\varphi=\Big\{\sum\limits_{i=0}^{2}c_ix^i(1+x^3+x^6)\mid c_0,c_1,c_2\in\mathbb{Z}\Big\}$;
2) $U(\mathbb{Z}[\alpha^3])=\{\pm1,\pm\alpha^3,\pm(1+\alpha^3)\}$.

Доказательство. 1) Стандартно.
2) Известно (см., напр., [5], гл. II, § 7). $\square$

Лемма 7. *Если u_1 — единица кольца $\mathbb{Z}\langle x\rangle$ и $\varphi(u_1)=\lambda^k$, то k делится на 3. Причем если $\varphi(u_1)=\lambda^3$, то $u_1=-1+2(x+x^8)-(x^2+x^7)-(x^4+x^5)$ и $u_1^{-1}=5+(x+x^8)-5(x^2+x^7)-3(x^3+x^6)+4(x^4+x^5)$.*

Доказательство. Пусть $\varphi(u_1)=\lambda$. Тогда $u_1=x+x^8+c_0(1+x^3+x^6)+c_1(x+x^4+x^7)+c_2(x^2+x^5+x^8)$, но отсюда $\psi(u_1)=2+3(c_0+c_1+c_3)=\pm1$ и потому $c_0+c_1+c_2=-1$. Легко видеть, что $\tau(u_1)=(3c_0-3c_2-1)+\alpha^3(3c_1-3c_2)$. По предыдущей лемме $c_1=c_2$, $3c_1-3c_2-1=-1$ и получается противоречие с $c_0+c_1+c_2=-1$. Поэтому нет единицы u_1 с $\varphi(u_1)=\lambda$. Если $\varphi(u_1)=\lambda^3=\alpha^3+3\alpha+3\alpha^{-1}+\alpha^{-3}$, то $u_1=3x+x^3+x^6+3x^8+c_0(1+x^3+x^6)+c_1(x+x^4+x^7)+c_2(x^2+x^5+x^8)$ и $\psi(u_1)=8+3(c_0+c_1+c_2)=\pm1$. Отсюда $c_0+c_1+c_2=-3$. Теперь $\tau(u_1)=(3c_0-3c_2-1)+\alpha^3(3c_1-3c_2)$. По предыдущей лемме $c_1=c_2$, $3c_1-3c_2-1=-1$ и $c_0=c_1=c_2=-1$. Таким образом, получаем элемент

$$u_1=3x+x^3+x^6+3x^8-(1+x^3+x^6)-(x+x^4+x^7)-(x^2+x^5+x^8)=$$
$$=-1+2(x+x^8)-(x^2+x^7)-(x^4+x^5).\quad\square$$

Аналогично доказываются

Лемма 8. *Если u_2 — единица кольца $\mathbb{Z}\langle x\rangle$ и $\varphi(u_2)=\mu^n$, то n делится на 3. Причем если $\varphi(u_2)=\mu^3$, то $u_2=-1-(x+x^8)-(x^2+x^7)+2(x^4+x^5)$ и $u_2^{-1}=5-5(x+x^8)+4(x^2+x^7)-3(x^3+x^6)+(x^4+x^5)$.*

Лемма 9. *Если u_3 — единица кольца $\mathbb{Z}\langle x\rangle$, $\varphi(u_3)=\lambda^r\mu^s$, r и s не делятся на 3, то $r\not\equiv s\pmod 3$. Причем, если $\varphi(u_3)=\lambda\mu^2$, то $u_3=1+(x+x^8)-(x^3+x^6)-(x^4+x^5)$ и $u_3^{-1}=-1+(x+x^8)-(x^2+x^7)$.*

Аналогично теореме 1 доказывается

Теорема 3. *Пусть $U(\mathbb{Z}\langle x\rangle)$ — группа единиц целочисленного группового кольца циклической группы порядка 9 и φ определено как ранее. Тогда $U(\mathbb{Z}\langle x\rangle)=\langle -1\rangle\times\langle x\rangle\times\langle u_2\rangle\times\langle u_3\rangle$, где u_2 и u_3, как в леммах 8 и 9. Кроме того, $U(\mathbb{Z}[\alpha])/\varphi(U(\mathbb{Z}\langle x\rangle))\cong\mathbb{Z}_3$.*

Литература

1. Алеев Р.Ж., Панина Г.А. *О единицах групповых колец циклических групп* // Алгебра и анализ. Тез. докл. международн. научн. конф., посв. 100-летию со дня рожд. Н.Г. Чеботарева. Ч.I. – Казань, 1994. – С. 6.
2. Aleev R.Ž. *Higman's central unit theory, units of integral group rings of finite cyclic groups and Fibonacci numbers* // Int. J. Algebra and Comput. – 1994. – V. 4. – № 3. – P. 309–358.
3. Эдвардс Г. *Последняя теорема Ферма. Генетическое введение в алгебраическую теорию чисел.* – М.: Мир, 1980. – 484 с.
4. Бовди А.А. *Мультипликативная группа целочисленного группового кольца.* – Ужг. гос. ун-т. – Ужгород, 1987. – 210 с. – Деп. в УкрНИИНТИ 24.09.87, № 2712-Ук87.
5. Боревич З.И., Шафаревич И.Р. *Теория чисел.* – 3-е изд. – М.: Наука, 1985. – 503 с.
6. Sinnott W. *On the Stickelberger ideal and the circular units of a cyclomatic field* // Ann. Math. – 1978. – V. 108. – № 1. – P. 108–134.
7. Masley J.M., Montgomery H.L. *Cyclotomic fields with unique factorization* // J. Reine und Angew. Math. – 1976. – Bd. 286/287. – S. 248–256.

Челябинский государственный университет

Медногорский электротехнический завод АО "Уралэлектро"

Поступили

полный текст 01.09.1994

краткое сообщение 26.04.1999