ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 11 (450)

УДК 517.9

В.С. МОКЕЙЧЕВ, А.В. МОКЕЙЧЕВ

НОВЫЙ ПОДХОД К ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ, III

В данной статье сохраняются обозначения, понятия, соглашения и нумерация, использованные в первых двух частях [1], [2]. Рассмотрим второе применение ранее полученных абстрактных результатов.

2. $(b-a)$-*периодическая задача.* В этом пункте $H = L^2_m((a,b))$, φ совпадает с (1.4), т. е,

$$\varphi = \{e(j)\exp(2\pi ik \bullet \tfrac{x-a}{b-a},\ j = 1,\dots,m,\ k \in \mathbb{Z}^n\}.$$

Ради простоты считаем, что при каждом $\alpha \in \Phi$ оператор $C_\alpha(x)$ является оператором умножения на матрицу $C_\alpha(x)$, являющуюся измеримой и квадратной. Размерности матриц (m,m), $m < +\infty$.

Теорема 5.2. *Пусть $C_\alpha(x) \in C^{\{\alpha\}}_{m,m}(b-a)\ \forall\, \alpha \in \Phi$, $q(z) = \sum\limits_{\alpha\in\Phi} a_\alpha(iz)^\alpha$ — скалярный многочлен, удовлетворяющий условиям*

$$|q(k)|^2 \ge g_1 \sum_{\alpha\in\Phi}\sum_{\beta\le\alpha} |k^\beta|^2, \quad \text{как только} \quad k \in \mathbb{Z}^n, \tag{5.15}$$

при всех $\gamma < \alpha$, каждом $\alpha \in \Phi$, всех $|k| \ge N(\varepsilon_1)$ и некотором $\varepsilon_1 > 0$

$$(|k^\gamma|/|q(k)|) < \varepsilon_1, \tag{5.16}$$

причем постоянные $g_1 > 0$, $N(\varepsilon_1)$ и ε_1 не зависят от k. Если ε_1 достаточно мало, то следующие утверждения равносильны:

1. *существуют такие числа $t \in \mathbb{R}$, $d_1(t)$, $d_2 > 0$, $\alpha_0 \in \mathbb{C}$, что при каждом $x \in [a,b]$ и всех $z \in \mathbb{C}^m$, $k \in \mathbb{Z}^n$, выполняются оценки*

$$\left|\left(\alpha_0 tE + \sum_{\alpha\in\Phi} C_\alpha(x)\left(\frac{2\pi ik}{b-a}\right)^\alpha\right)z\right|^2 \ge |z|^2(d_1(t) + d_2|q(k)|^2), \tag{5.17}$$

в которых $d_1(t) \to +\infty$, если $|t| \to +\infty$;

2. *существуют такие числа $t \in \mathbb{R}$, $d_3(t)$, $d_4 > 0$, $d_5 > 0$, $\alpha_0 \in \mathbb{C}$, что при всех $h(x) \in C^{+\infty}_m(b-a)$ выполняются оценки*

$$\begin{aligned}\|(P(x,\partial/\partial x) + \alpha_0 tE)h(x)\| &\ge d_3(t)\|h(x)\| + d_4\|q(-i\partial/\partial x)h(x)\| \ge \\ &\ge d_3(t)\|h(x)\| + d_5\sum_{\alpha\in\Phi}\sum_{\beta\le\alpha}\|h^{(\beta)}(x)\|,\end{aligned} \tag{5.18}$$

в которых $d_3(t) \to +\infty$ в случае $|t| \to +\infty$.

Замечание 5.3. Если $q(-i\xi)$ — гипоэллиптический полином, то (5.16) имеет место при каждом $\varepsilon_1 > 0$ и всех $|k| \ge N(\varepsilon_1)$. Однако (5.16) выполняется при малых ε_1 не только для гипоэллиптических полиномов. Доказывая теорему 5.3, убедимся в этом.

Замечание 5.4. В частном случае $m = 1$ и при более жестких ограничениях на $q(k)$ теорема 5.2 доказана в ([3], с. 141–152).

Большую роль будет играть

Лемма 5.4. *Пусть множество Ω ограничено, элементы матриц $\widetilde{C}_{\alpha,\beta}(x)$ ограничены в существенном и имеет место (5.16). Тогда*

$$S_4 = \left(\int_\Omega \left| \sum_{\alpha\in\Phi} \sum_{\beta<\alpha} \widetilde{C}_{\alpha,\beta}(x) h^{(\beta)}(x) \right|^2 dx \right)^{1/2} \le \varepsilon_1 B \| q(-i\partial/\partial x) h(x) \| + c \| h(x) \|, \tag{5.19}$$

причем постоянные B, c не зависят от $h(x)$, и B не зависит от ε_1.

Доказательство. Так как $|\widetilde{C}_{\alpha,\beta}(x)| \le \widetilde{B}$ почти всюду, то

$$S_4 \le \widetilde{B} \sum_{\alpha\in\Phi} \sum_{\beta<\alpha} \| h^{(\beta)}(x) \|.$$

Напомним, что $\| \cdot \|$ — символ нормы в $L^2_m((a,b))$. Из последних оценок и из (5.16) следует неравенство

$$S_4 \le B_1 \varepsilon_1 \left(\sum{}' |h_k|^2 |q(k)|^2 \right)^{1/2} + B \sum_{\alpha\in\Phi} \sum_{\beta<\alpha} \left(\sum{}'' |h_k|^2 |k^\beta|^2 \right)^{1/2}. \tag{5.20}$$

Здесь штрих указывает на то, что суммирование производится по всем $k \in \mathbb{Z}^n \cap (|k| \ge N(\varepsilon_1))$, два штриха — по всем $k \in \mathbb{Z}^n \cap (|k| < N(\varepsilon_1))$, $N(\varepsilon_1)$ — постоянная, используемая в (5.16), и число B_1 равно произведению $\widetilde{B}$ на число элементов в множестве $\bigcup\limits_{\alpha\in\Phi} \{M^n \cap [0,\alpha)\}$. Из (5.20) легко следует (5.19) $\Box$

Лемма 5.5. *Пусть $\Omega_j = \{x : |x-\tau(j)| < \rho_j\}$, $\Omega = \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_M$, и $[a,b] \subset \Omega$. Тогда существуют такие вещественные скалярные функции $v_j(x) \in C_0^{+\infty}(\Omega)$, $j = 1,\dots,M$, что*

$$0 \le v_j(x) \le 1 \ \ \forall j; \quad (\operatorname{supp} v_j(x)) \subset \overline{\Omega} \ \ \forall j; \quad (v_1(x))^2 + \dots + (v_M(x))^2 = 1 \ \ \forall x \in [a,b]. \tag{5.21}$$

Доказательство. Напомним, что $(\operatorname{supp} v_j(x))$ — носитель функции $v_j(x)$ и $\overline{\Omega}_j$ — замыкание множества Ω_j. Лемма доказывается аналогично тому, как доказывается существование классического разбиения единицы. Положим $\widetilde{\omega}_j(x) = \exp((|x-\tau(j)|^2 - \rho_j^2)^{-1})$ при $x \in \Omega_j$, $\widetilde{\omega}_j(x) = 0$ если $x \notin \Omega_j$. Через $\widetilde{\omega}_0(x) \in C_0^{+\infty}(\Omega)$ обозначим функцию, удовлетворяющую условию $\widetilde{\omega}_0(x) = 1$ при $x \in [a,b]$. Легко заметить, что функции

$$v_j(x) = \widetilde{\omega}_0(x) \widetilde{\omega}_j(x) \big((\widetilde{\omega}_1(x))^2 + \dots + (\widetilde{\omega}_M(x))^2 \big)^{1/2}$$

удовлетворяют (5.21). $\Box$

Замечание 5.5. Сформулировать и доказать лемму 5.5 было необходимо по той причине, что из включения $v_0(x) \in C_0^{+\infty}(\Omega)$ не следует $\sqrt{v_0(x)} \in C_0^{+\infty}(\Omega)$.

Доказательство теоремы 5.2. Фиксируем достаточно малое число $\varepsilon > 0$ и числа $N(\varepsilon)$, $\rho(\varepsilon)$ так, чтобы

$$|C_\alpha(x) - C_\alpha(y)| < \varepsilon \quad \text{при} \ \ x \in \Omega_j, \ \ y \in \Omega_j, \ \ j = 1,\dots,N(\varepsilon), \tag{5.22}$$

где $\Omega_j = \{x : |x-\tau(j)| < \rho(\varepsilon)\}$ и $[a,b] \subset \Omega \equiv \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_{N(\varepsilon)}$. Пусть $v_j(x)$, $j = 1,\dots,N(\varepsilon)$, — функции, построенные в лемме 5.5. Так как $C_\alpha(x)$ и $h(x)$ — $(b-a)$-периодические, то при некоторой постоянной B_2, не зависящей от t, $h(x)$,

$$S_5 \equiv \left(\int_\Omega |(P(x,\partial/\partial x) + \alpha_0 t E) h(x)|^2 dx \right)^{1/2} \le B_2 \| (P(x,\partial/\partial x) + \alpha_0 t E) h(x) \|.$$

С другой стороны, имеет место (5.21), поэтому

$$S_5 \geq \Big(\sum_j \int_\Omega |v_j(x)(P(x,\partial/\partial x) + \alpha_0 tE)h(x)|^2 dx \Big)^{1/2} \geq$$

$$\geq \Big(\sum_j \int_\Omega (P(\tau(j),\partial/\partial x) + \alpha_0 tE)(v_j(x)h(x))|^2 dx \Big)^{1/2} -$$

$$- \Big(\sum_j \int_\Omega |(P(x,\partial/\partial x) - P(\tau(j),\partial/\partial x))(v_j(x)h(x))|^2 dx \Big)^{1/2} -$$

$$- \Big(\sum_j \int_\Omega |v_j(x)P(x,\partial/\partial x)h(x) - P(x,\partial/\partial x)(v_j(x)h(x))|^2 dx \Big)^{1/2}.$$

Слагаемое в правой части обозначим через F_4, вычитаемые — соответственно через F_5, F_6. Оценим F_5, F_6 сверху, а $F4$ — снизу. В силу обычных неравенств для норм и (5.22)

$$F_5 \leq \varepsilon \Big(\sum_j \sum_{\alpha\in\Phi} \int_\Omega |(v_j(x)h(x))^{(\alpha)}|^2 dx \Big)^{1/2} \leq \varepsilon \Big(\sum_j \sum_{\alpha\in\Phi} \int_\Omega |v_j(x)h^{(\alpha)}(x)|^2 dx \Big)^{1/2} +$$

$$+ \varepsilon \Big(\sum_j \sum_{\alpha\in\Phi} \int_\Omega |v_j(x)h^{(\alpha)}(x) - (v_j(x)h(x))^{(\alpha)}|^2 dx \Big)^{1/2}.$$

Группы слагаемых в правой части последней оценки обозначим соответственно через $F_{5,1}$, $F_{5,2}$. Так как имеет место (5.21), то

$$F_{5,1} \leq \varepsilon \Big(\sum_{\alpha\in\Phi} \int_\Omega |h^{(\alpha)}(x)|^2 dx \Big)^{1/2} \leq \varepsilon B_1 \sum_{\alpha\in\Phi} \|h^{(\alpha)}(x)\|. \tag{5.23}$$

Напомним, что $\|\cdot\|$ — символ нормы в $L^2_m((a,b))$. Применяя лемму 5.1, получим

$$F_{5,2} \leq \varepsilon_1 B \|q(-i\partial/\partial x)h(x)\| + c\|h(x)\|. \tag{5.24}$$

В силу (5.15) имеем

$$\sum_{\alpha\in\Phi} \|h^{(\alpha)}(x)\| \leq g_2 \|q(-i\partial/\partial x)h(x)\| + c\|h(x)\|. \tag{5.25}$$

Из (5.23), (5.24), (5.25) следует

$$F_5 \leq (\varepsilon B_1 g_2 + \varepsilon_1 B)\|q(-i\partial/\partial x)h(x)\| + c\|h(x)\|, \tag{5.26}$$

причем постоянные ε, ε_1, B, B_1, g_2, c не зависят от t, $h(x)$; постоянные B_1, g_2 не зависят от ε, ε_1; B, ε не зависят от ε_1. Чтобы оценить F_6, достаточно воспользоваться леммой 5.4

$$F_6 \leq (\varepsilon_1 B)\|q(-i\partial/\partial x)h(x)\| + c\|h(x)\|. \tag{5.27}$$

Труднее оценить F_4. Предварительно оценим

$$F_{4,j} = \int_\Omega |(P(\tau(j),\partial/\partial x) + \alpha_0 tE)(v_j(x)h(x))|^2 dx = \int_{\Omega_j} |(P(\tau(j),\partial/\partial x) + \alpha_0 tE)(v_j(x)h(x))|^2 dx.$$

Уменьшая, если в этом есть необходимость, $\rho(\varepsilon)$, можно добиться того, что $\Omega_j \subset [a+\tau(j),\ b+\tau(j)]$. В этом случае при некоторой $\widetilde{v}_j(x) \in C_1^{+\infty}(b-a)$ и всех $x \in [a+\tau(j),\ b+\tau(j)]$ имеют место равенства $\widetilde{v}_j(x) = v_j(x)$,

$$F_{4,j} = \int_{a+\tau(j)}^{b+\tau(j)} |(P(\tau(j),\partial/\partial x) + \alpha_0 tE)(\widetilde{v}_j(x)h(x))|^2 dx.$$

Для $(b-a)$-периодических функций $f(x)$ выполняется равенство

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx = \int_{a+\tau(j)}^{b+\tau(j)} |f(x)|^2 dx \tag{5.28}$$

(естественно при условии существования интеграла). Поэтому

$$F_{4,j} = \int_a^b |(P(\tau(j), \partial/\partial x) + \alpha_0 tE)(\widetilde{v}_j(x)h(x))|^2 dx = \sum_k \left| \left(P\left(\tau(j), \frac{2\pi ik}{b-a}\right) + \alpha_0 tE\right) z_k \right|^2 .$$

Здесь z_k — вектор-столбец с координатами $z_{k,r}$, являющимися коэффициентами Фурье с номерами (k,r) для функции $(\widetilde{v}_j(x)h(x))$. Напомним, что φ совпадает с (1.4). Из последних равенств и из (5.17) следует

$$F_{4,j} \geq \sum_k |z_k|^2 \left(d_1(t) + d_2 \left| q\left(\frac{2\pi l}{b-a}\right) \right|^2 \right) = d_1(t)\|\widetilde{v}_j(x)h(x)\|^2 + d_2\|q(-i\partial/\partial x)(\widetilde{v}_j(x)h(x))\|^2. \tag{5.29}$$

Учитывая (5.28), получим

$$\|\widetilde{v}_j(x)h(x)\|^2 = \int_{a+\tau(j)}^{b+\tau(j)} |\widetilde{v}_j(x)h(x)|^2 dx = \int_{a+\tau(j)}^{b+\tau(j)} |v_j(x)h(x)|^2 dx \geq$$
$$\geq \int_\Omega |v_j(x)h(x)|^2 dx \geq \|v_j(x)h(x)\|^2. \tag{5.30}$$

При этом были учтены включения $(\operatorname{supp} v_j(x)) \subseteq \overline{\Omega}_j \subseteq [a+\tau(j),\ b+\tau(j)]$.

Оценим снизу величину

$$\|q(-i\partial/\partial x)(\widetilde{v}_j(x)h(x))\|^2 \geq \frac{1}{2}\|\widetilde{v}_j(x)q(-i\partial/\partial x)h(x)\|^2 -$$
$$- \frac{1}{2}\|q(-i\partial/\partial x)(\widetilde{v}_j(x)h(x)) - \widetilde{v}_j(x)q(-i\partial/\partial x)h(x)\|^2.$$

Аналогично тому, как было получено (5.30), получим

$$\|\widetilde{v}_j(x)q(-i\partial/\partial x)h(x)\|^2 \geq \|v_j(x)q(-i\partial/\partial x)h(x)\|^2.$$

С другой стороны, в силу леммы 5.4

$$\|q(-i\partial/\partial x)(\widetilde{v}_j(x)h(x)) - \widetilde{v}_j(x)q(-i\partial/\partial x)h(x)\| \leq \varepsilon_1 B\|q(-i\partial/\partial x)h(x)\| + c\|h(x)\|.$$

Таким образом, доказано, что

$$\|q(-i\partial/\partial x)(\widetilde{v}_j(x)h(x))\|^2 \geq \frac{1}{2}\|v_j(x)q(-i\partial/\partial x)h(x)\|^2 - \varepsilon_1 B\|q(-i\partial/\partial x)h(x)\|^2 - c\|h(x)\|^2.$$

Отсюда и из (5.29), (5.30) следует неравенство

$$F_{4,j} \geq d_1(t)\|v_j(x)h(x)\|^2 + d_2(\tfrac{1}{2} - \varepsilon_1 B)\|v_j(x)q(-i\partial/\partial x)h(x)\|^2 - c\|h(x)\|^2. \tag{5.31}$$

Так как c не зависит от t и $d_1(t) \to +\infty$ при некоторых $|t| \to +\infty$, то можно считать $d_1(t) - c \geq 0$. Число ε_1 будем считать настолько малым, что $\varepsilon_1 B < \frac{1}{2}$. При сделанных оговорках правая часть в (5.31) неотрицательна. Из (5.31) и из обычных неравенств для норм следует

$$F_4 \geq \left(d_2(\tfrac{1}{2} - \varepsilon_1 B)\right)^{1/2}\|q(-i\partial/\partial x)h(x)\| + (d_1(t) - c)^{1/2}\|h(x)\|. \tag{5.32}$$

Учитывая (5.26), (5.27), (5.32), получим

$$\|(P(x, \partial/\partial x) + \alpha_0 tE)h(x)\| \geq \left(\left(d_2(\tfrac{1}{2} - \varepsilon_1 B)\right)^{1/2} - \varepsilon B_1 g_2 - 2\varepsilon_1 B\right)\|q(-i\partial/\partial x)h(x)\| +$$
$$+ \left((d_1(t) - c)^{1/2} - c\right)\|h(x)\|, \tag{5.33}$$

причем все постоянные не зависят от $h(x)$; все постоянные, кроме $d_1(t)$, не зависят от t; постоянные B_1, g_2, d_2 не зависят от ε, ε_1; постоянная ε не зависит от ε_1. Из доказанной оценки (5.33) при достаточно малых ε, ε_1 следует первая из оценок (5.18), и с учетом (5.25) — вторая. Импликация 1 $\Rightarrow$ 2 доказана.

Пусть выполняется утверждение 2 и $y \in [a,b]$. Тогда $y \in (\operatorname{supp} v_j(x))$ при некотором j. Постоянную $\rho(\varepsilon)$, используемую в (5.22), фиксируем так, чтобы $\Omega_j \subset [a+\tau(j),\ b+\tau(j)]$. Через $\widetilde{v}_j(x)$, как и выше, обозначим функцию, принадлежащую $C_1^{+\infty}(b-a)$ и удовлетворяющую условию $\widetilde{v}_j(x) = v_j(x)$ для всех $x \in [a+\tau(j),\ b+\tau(j)]$. Если $h(x) \in C_m^{+\infty}(b-a)$, то

$$\begin{aligned}&\|\widetilde{v}_j(x)(P(y,\partial/\partial x)+\alpha_0 tE)h(x)\| \geq \|(P(x,\partial/\partial x)+\alpha_0 tE)(\widetilde{v}_j(x)h(x))\| - \\ &\quad - \|(P(x,\partial/\partial x)-P(y,\partial/\partial x))(\widetilde{v}_j(x)h(x))\| - \|\widetilde{v}_j(x)P(y,\partial/\partial x)h(x) - P(y,\partial/\partial x)(\widetilde{v}_j(x)h(x))\|.\end{aligned}$$

Слагаемое в правой части обозначим через $\widetilde{F}_4$, вычитаемые — соответственно $\widetilde{F}_5$, $\widetilde{F}_6$. Аналогично тому, как были оценены F_5, F_6, используемые в доказательстве импликации 1 $\Rightarrow$ 2, получим

$$\begin{aligned}\widetilde{F}_5 &\leq \varepsilon\|q(-i\partial/\partial x)(\widetilde{v}_j(x)h(x))\| + c\|h(x)\|,\\ \widetilde{F}_6 &\leq \varepsilon_1 B\|q(-i\partial/\partial x)h(x)\| + c\|h(x)\|.\end{aligned}$$

В силу утверждения 1

$$\widetilde{F}_4 \geq d_4\|q(-i\partial/\partial x)(\widetilde{v}_j(x)h(x))\| + d_3(t)\|h(x)\|.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}&\|\widetilde{v}_j(x)(P(y,\partial/\partial x)+\alpha_0 tE)h(x)\| \geq \\ &\qquad \geq (d_4-\varepsilon)\|q(-i\partial/\partial x)(\widetilde{v}_j(x)h(x))\| - \varepsilon_1 B\|q(-i\partial/\partial x)h(x)\| + (d_3(t)-c)\|h(x)\|.\end{aligned}$$

В силу леммы 5.4

$$\|q(-i\partial/\partial x)(\widetilde{v}_j(x)h(x))\| \geq \|\widetilde{v}_j(x)q(-i\partial/\partial x)h(x)\| - \varepsilon_1 B\|q(-i\partial/\partial x)h(x)\| - c\|h(x)\|.$$

Из двух последних оценок следует

$$\begin{aligned}&\|\widetilde{v}_j(x)(P(y,\partial/\partial x)+\alpha_0 tE)h(x)\| \geq \\ &\quad \geq (d_4-\varepsilon)\|\widetilde{v}_j(x)q(-i\partial/\partial x)h(x)\| - ((d_4-\varepsilon)\varepsilon_1 B + \varepsilon_1 B)\|q(-i\partial/\partial x)h(x)\| + (d_3(t)-c)\|h(x)\|.\end{aligned}$$

Напомним, что мы условились писать несущественные постоянные без индексов. Полагая $h(x) = z\exp(2\pi ip \bullet \frac{x-a}{b-a})$, где $z \in \mathbb{C}^m$ не зависит от x, получим

$$\begin{aligned}&\|\widetilde{v}_j(x)\|\left|\left(P\left(y,\frac{2\pi ip}{b-a}\right)+\alpha_0 tE\right)z\right| \geq (d_4-\varepsilon)\|\widetilde{v}_j(x)\|\left|q\left(\frac{2\pi p}{b-a}\right)z\right| - \\ &\quad - ((d_4-\varepsilon)\varepsilon_1 B+\varepsilon_1 B)\left|q\left(\frac{2\pi p}{b-a}\right)z\right|\left(\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{(b_j-a_j)}{2\pi}\right)\right)^{1/2} + (d_3(t)-c)|z|\left(\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{(b_j-a_j)}{2\pi}\right)\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

В полученных оценках постоянные не зависят от $h(x)$; все постоянные, кроме $d_3(t)$, не зависят от t; d_4, $d_3(t)$ не зависят от ε, ε_1; B, ε не зависят от ε_1. Поэтому при достаточно малых ε, ε_1 выполняются оценки (5.17). $\square$

Следствие 5.1. Пусть выполняются предположения теоремы 5.2, оценки (5.17), ε_1 достаточно мало, при достаточно малом $\varepsilon_2 > 0$, некотором $N(\varepsilon_2)$ и всех $|k| \geq N(\varepsilon_2)$ имеет место $\varepsilon_2|q(\frac{2\pi k}{b-a})| \geq 1$, оператор Q задается равенствами

$$Qv = \sum_k q(k)v_k \exp\left(2\pi ik \bullet \frac{x-a}{b-a}\right) \quad \forall\, v \in D_\varphi. \tag{5.34}$$

Тогда выполняются оценки (2.1), если, кроме того, $C_\alpha(x) \in C_{m,m}^{\{\alpha\}}(b-a)$ при всех $\alpha \in \Phi$, то выполняются и оценки (2.8).

Следствие 5.2. Пусть $C_\alpha(x) \in C^{\{\alpha\}}_{m,m}(b-a)$ при всех $\alpha \in \Phi$, выполняются предположения теоремы 5.2, оценки (5.18) и равенства (5.34). Тогда при $c_3 = g_3\varepsilon_1$ и некоторой постоянной g_3, не зависящей от ε_1 и $\psi(x)$, имеет место (2.13).

Следствие 5.3. Предположим, что $C_\alpha(x) \in C^{\{\alpha\}}_{m,m}(b-a)$ при всех $\alpha \in \Phi$, выполняются оценки (5.17) и $q(i\xi)$ — гипоэллиптический полином. Тогда выполняются оценки (2.1), (2.8) и при любых $c_3 > 0$ — оценки (2.13).

Доказательство следствия 5.1. Напомним, что φ совпадает с (1.4). Так как

$$\|P_\lambda\psi\| \geq \|(P(x,\partial/\partial x) + \alpha_0 tE)\psi\| - |t\alpha_0 + \lambda|\,\|\psi\|,$$

то в силу теоремы 5.2

$$\|P_\lambda\psi\| \geq d_4\|q(-i\partial/\partial x)\psi\| + d_3(t)\|\psi\| - |t\alpha_0+\lambda|\,\|\psi\| = \\ = d_4\|q(-i\partial/\partial x)\psi\| + (d_3(t) - |t\alpha_0+\lambda|)\|\psi\|.$$

С другой стороны, $\|\psi\| \leq \varepsilon_2 B\|q(-i\partial/\partial x)\psi\| + c\|\psi(N,x)\|$. Поэтому

$$\|P_\lambda\psi\| \geq (d_4 - \varepsilon_2 B|d_3(t) - |t\alpha_0+\lambda|\,|)\|q(-i\partial/\partial x)\psi\| - c\|\psi(N,x)\|.$$

Оценки $\|P_\lambda\psi\| \leq c_2\|q(-i\partial/\partial x)\psi\| + c\|\psi(N,x)\|$ в силу (5.15), (5.25) почти очевидны.

В случае $C_\alpha(x) \in C^{\{\alpha\}}_{m,m}(b-a)$ имеем

$$P^+_{\overline{\lambda}}\psi = \sum_{\alpha\in\Phi}(-1)^{[\alpha]}((C_\alpha(x))^*\psi(x))^{(\alpha)} - \overline{\lambda}\psi(x) = \sum_{\alpha\in\Phi}(C_\alpha(x))^*(-1)^{[\alpha]}\psi^{(\alpha)}(x) + \\ + \sum_{\alpha\in\Phi}\sum_{\beta<\alpha}\widetilde{C}_{\alpha,\beta}(x)\psi^{(\beta)}(x) \equiv P^+(x,\partial/\partial x)\psi - \overline{\lambda}\psi. \quad (5.35)$$

Почти очевидно, что для полинома $P^+(x,\xi)$ выполняются аналоги предположений теоремы 5.2, а также аналог оценок (5.17). В этом случае, как доказано выше, при достаточно малых ε_1, ε_2 выполняются оценки (2.8). □

Доказательство следствия 5.2. Пусть $v(x) \in H$, $\psi \in L_\varphi$. Тогда в силу (5.35)

$$S_6 \equiv \langle (P^+_{\overline{\lambda}}(Q^+)^{-1} - (Q^+)^{-1}P^+_{\overline{\lambda}})\psi,\, v(x)\rangle = \sum_{\alpha\in\Phi}\sum_{\gamma<2\alpha}\langle (Q^+)^{-1}\psi^{(\gamma)}(x),\, d_{\gamma,\alpha}(x)(Q^{-1}v(x))\rangle,$$

причем функции $d_{\gamma,\alpha}(x) \in C^{\{\gamma\}}_{m,m}(b-a)$ не зависят от $\psi(x)$ и $v(x)$. Напомним, что $\langle\,,\,\rangle$ — символ скалярного произведения в $L^2_m((a,b))$. Интегрируя в последних равенствах по частям и учитывая $(b-a)$-периодичность используемых функций, получим

$$S_6 = \sum_{\alpha\in\Phi}{\sum}'\langle (Q^+)^{-1}\psi^{(\beta)}(x),\, h_{\beta,\widetilde{\beta},\alpha}(x)(Q^{-1}v(x))^{(\widetilde{\beta})}\rangle.$$

Здесь и ниже штрих указывает на то, что суммирование производится по всем мультииндексам β, $\widetilde{\beta}$, удовлетворяющим условиям $\beta < \alpha$, $\widetilde{\beta} \leq \alpha$. В силу ограниченности функций $h_{\beta,\widetilde{\beta},\alpha}(x)$, не зависящих от $\psi(x)$, $v(x)$, имеем

$$|S_6| \leq B\sum_{\alpha\in\Phi}{\sum}'\|(Q^+)^{-1}\psi^{(\beta)}(x)\|\,\|(Q^{-1}v(x))^{(\widetilde{\beta})}\|.$$

Так как $\beta < \alpha$, $\alpha \in \Phi$ и имеет место (5.16), то

$$\|(Q^+)^{-1}\psi^{(\beta)}(x)\| \leq \varepsilon_1 B\|\psi(x)\| + c\|\psi(N,x)\|. \quad (5.36)$$

Из (5.16) и из неравенства $\widetilde{\beta} \leq \alpha$ следует $\|(Q^{-1}v(x))^{(\widetilde{\beta})}\| \leq g\|v(x)\|$. Таким образом, доказано

$$|S_6| \leq (g_3\varepsilon_1\|\psi(x)\| + c\|\psi(N,x)\|)\|v(x)\|,$$

постоянные g_3, ε_1, ε, N, c не зависят от $\psi(x)$ и от $v(x)$; постоянная g_3 не зависит от ε_1. В силу произвольности $v(x)$ имеет место (2.13). □

Доказательство следствия 5.3. Если $q(i\xi)$ — гипоэллиптический полином, то при каждом $\varepsilon_1 > 0$, некотором $N(\varepsilon_1)$ и всех $|k| \geq N(\varepsilon_1)$ выполняются оценки (5.16). $\square$

Теорема 5.3. *Пусть выполняются предположения теоремы 5.2, оценки (5.17) и ε_1 достаточно мало. Тогда*

1. *спектр φ-задачи для уравнения (7) точечен;*
2. *в случае существования φ-решение уравнения (7) принадлежит $W_m^{\widetilde{\Phi},2}(b-a)$, где $\widetilde{\Phi} = \bigcup\limits_{\alpha\in\Phi}\{\gamma : 0 \leq \gamma \leq \alpha\}$;*
3. *если, кроме того, при всех $\alpha \in \Phi$ выполняются включения $C_\alpha(x) \in C_{m,m}^{\{\widetilde{\gamma}\}}(b-a)$, $f(x) \in W_m^{\{\widetilde{\gamma}\},2}(b-a)$ и мультииндекс $\widetilde{\gamma}$, не зависящий от α, удовлетворяет при некотором $\beta \in \Phi$ условию $(\operatorname{sgn}\widetilde{\gamma}_1, \ldots, \operatorname{sgn}\widetilde{\gamma}_n) \leq \beta$, то φ-решение уравнения (7) при условии существования φ-решения принадлежит $W_m^{\widetilde{\Phi}+\widetilde{\gamma},2}(b-a)$, где $\widetilde{\Phi}+\widetilde{\gamma} = \bigcup\limits_{\alpha\in\widetilde{\Phi}}\{\alpha+\widetilde{\gamma}\}$.*

Доказательство. Напомним, что $\operatorname{sgn} 0 = 0$, $\operatorname{sgn} t = 1\ \forall\, t > 0$. В силу теоремы 5.2 и следствий 5.1, 5.2 к оператору P_λ применимы теоремы 2.2, 2.3 при достаточно малом $\varepsilon_1 > 0$. Изучая природу спектра оператора P_λ, мы не должны тревожиться о предположениях гладкости матричных функций $C_\alpha(x)$, используемых в следствиях 5.1, 5.2. Заменив $C_\alpha(x)$ на $C_{\alpha,\delta_1}(x) \in C_m^{+\infty}(b-a)$, где $|C_\alpha(x) - C_{\alpha,\delta_1}(x)| < \delta_1$, при достаточно малом δ_1 добьемся желаемого. Как отмечали, обсуждая предположения теоремы 2.2, природа спектра при этом не изменится. Мы не уточняем малость ε_1, т. к. это было сделано в процессе доказательства теоремы 5.2. Напомним только, что в тех случаях, когда полином $q(i\xi)$ гипоэллиптичен, ε_1 всегда можно выбрать сколь угодно малым. В силу сказанного имеют место первое и второе утверждение теоремы 5.3. Труднее доказать третье утверждение.

Фиксируем j, при котором $\widetilde{\gamma}_j \geq 1$, и оператор $\widetilde{Q}$

$$\widetilde{Q}w = \sum_k w_k\left(\frac{2\pi i k_j}{b_j - a_j} + \widetilde{M}\right)\exp\left(2\pi i k \bullet \frac{x-a}{b-a}\right),$$

где $\widetilde{M}$ — достаточно большое вещественное число. Убедимся в выполнении аналогов предположений теоремы 2.4. Пусть φ-решение уравнения (7) существует. Обозначим его через u. Так как $u \in W_m^{\widetilde{\Phi},2}(b-a)$ и $e(j) \leq \beta$ при некотором $\beta \in \Phi$, то $u \in D_{\widetilde{Q}}$. Поэтому можно вести речь об уравнении (2.21). т. е. об уравнении

$$[\widetilde{Q}(P(x,\partial/\partial x) - \widetilde{\lambda}E)]v = \widetilde{Q}f(x) - \widetilde{\lambda}\widetilde{Q}u. \tag{5.37}$$

Чтобы доказать его разрешимость, достаточно убедиться в выполнении аналогов предположений теоремы 5.2 и аналогов оценок (5.17). Для рассматриваемого случая имеем

$$\widetilde{Q}(P(x,\partial/\partial x) - \widetilde{\lambda}E) \equiv \widetilde{P}(x,\partial/\partial x) \equiv \sum_{\alpha\in\Phi}(\partial/\partial x_j C_\alpha(x))(\partial/\partial x)^\alpha +$$
$$+\left(\sum_{\alpha\in\Phi}C_\alpha(x)(\partial/\partial x_j + \widetilde{M})(\partial/\partial x)^\alpha - \overline{\lambda}(\partial/\partial x_j + \widetilde{M})\right).$$

Обозначим

$$\widetilde{q}(-i\xi) \equiv \left(\frac{2\pi}{b_j - a_j}\xi_j + \widetilde{M}\right)q(-i\xi).$$

Очевидно, что для $\widetilde{q}(k)$ выполняется аналог оценок (5.15). Пусть $\delta < \alpha$ и $\alpha \in \Phi$. Тогда $\delta = \widetilde{\delta} + e(j)$, причем либо $\widetilde{\delta} < \beta$ при некотором $\beta \in \Phi$, либо $\widetilde{\delta} = \beta$ при некотором $\beta \in \Phi$. В первом случае при $|k| \geq N(\varepsilon_1)$

$$|(ik)^\delta|(|\widetilde{q}(k)|^{-1}) = |k_j|\,|(ik)^{\widetilde{\delta}}|\left(\left|-\frac{2\pi i k_j}{b_j - a_j} + \widetilde{M}\right|^{-1}\right)(|q(k)|^{-1}) \leq \left(\frac{b_j - a_j}{2\pi}\right)\varepsilon_1 \equiv M_1.$$

Во втором случае имеем

$$|(ik)^{\delta}|\,|(\widetilde{q}(k))^{-1}| \le \frac{1}{\widetilde{M}}|(ik)^{\beta}|\,|(q(k))^{-1}| \le \frac{c}{\widetilde{M}}, \quad \text{если} \quad |k| \ge N(\varepsilon_1),$$

причем c не зависит от $\widetilde{M}$ и k. Полагая $\widetilde{\varepsilon}_1 = \max\{M_1, \frac{c}{\widetilde{M}}\}$, окончательно убедимся в выполнимости для полинома $\widetilde{q}(-i\xi)$ аналога оценок (5.16). В силу (5.17) при $\widetilde{\lambda} = -\alpha_0 t$ имеем

$$\left|\widetilde{P}\left(x, \frac{2\pi i k}{b-a}\right)z\right|^2 = \left(\left|\frac{2\pi i k_j}{b_j - a_j} + \widetilde{M}\right|^2 - B_3\right)\left|P\left(\left(x, \frac{2\pi i k}{b-a}\right) + \alpha_0 t E\right)z\right|^2 \ge$$

$$\ge 0.5\left(\left(\frac{2\pi k_j}{b_j - a_j}\right)^2 + \widetilde{M}^2\right)\{d_1(t) + d_2|q(k)|^2\}|z|^2 \ge$$

$$\ge 0.5\left\{d_1(t) + d_2\left(\left|\left(\frac{2\pi i k_j}{b_j - a_j} + \widetilde{M}\right)q(k)\right|^2\right)\right\}|z|^2 = 0.5(d_1(t) + d_2|\widetilde{q}(k)|^2)|z|^2.$$

Поэтому выполняется аналог оценок (5.17). Таким образом, доказано, что к оператору $\widetilde{P}_0$, порожденному полиномом $\widetilde{P}(x,\xi)$, применимы аналоги утверждений теоремы 5.2 и следствий 5.1, 5.2, 5.3. Следовательно, уравнение (5.37) разрешимо. Пусть v — его φ-решение, т. е.

$$\sum_k \widetilde{Q}(P(x, \partial/\partial x) - \widetilde{\lambda}E)\left(v_k \exp\left(2\pi i k \bullet \frac{x-a}{b-a}\right)\right) = \widetilde{Q}f(x) - \widetilde{\lambda}\widetilde{Q}u,$$

и ряд сходится в H по норме. Так как оператор $\widetilde{Q}$ имеет непрерывный обратный, то

$$\sum_k (P(x, \partial/\partial x) - \widetilde{\lambda}E)\left(v_k \exp\left(2\pi i k \bullet \frac{x-a}{b-a}\right)\right) = f(x) - \widetilde{\lambda}u,$$

причем ряд снова сходится в H по норме. Отсюда следует, что v — φ-решение уравнения $(P(x,\partial/\partial x) - \widetilde{\lambda}E)v = f(x) - \widetilde{\lambda}u$, причем u — также его φ-решение. Однако $\widetilde{\lambda} = -\alpha_0 t$, поэтому можно считать $\widetilde{\lambda}$ несобственным значением оператора $P_{\widetilde{\lambda}}$ и, следовательно, $u = v$. Так как $v \in D_{(Q\widetilde{Q})}$, т. е. $v \in W_m^{\widetilde{\Phi}+e(j),2}(b-a)$, то $u \in W_m^{\widetilde{\Phi}+e(j),2}(b-a)$. Таким образом, доказана справедливость утверждения 3 в том случае, когда $\widetilde{\gamma} = e(j)$. Повторив приведенные выше рассуждения многократно, окончательно докажем теорему 5.3. □

3. *Функции $\varphi_{(p)}$, $p \in N$, являются сужениями на Ω некоторых функций из $W_m^{\Phi,2}(b-a)$.* В данном пункте предполагается, что $H = L_m^2(\Omega)$, $\varphi = \{e(j)y_{(p)},\ j = 1,\dots,m,\ p \in N\}$, и функции $y_{(p)} \equiv y_{(p)}(x)$ являются сужениями на Ω некоторых функций $\widetilde{y}_{(p)} \in W_m^{\Phi,2}(b-a)$. Выделим случаи, когда φ-решения уравнения (7), в случае их существования, также будут сужениями на Ω некоторых $(b-a)$-периодических решений соответствующих уравнений.

Отмеченная ситуация типична для многих линейных задач, особенно в случае $\Omega = (\widetilde{a}, \widetilde{b}) \subset [a,b]$ (см. сс. 30, 31 из [1]). Предположим, что открытое множество $\Omega \subset [a,b]$ имеет такую границу, что имеет смысл запись $C_0^{+\infty}(\Omega)$, причем при некоторых $h_{(k,r)}(x) \in C_0^{+\infty}(\Omega)$ и каждом $k \in N$

$$\sum_{\alpha\in\Phi\cup\{0\}} \|h_{(k,r)}^{(\alpha)}(x) - y_{(k)}^{(\alpha)}(x)\| \to 0 \quad \text{при} \quad r \to +\infty. \tag{5.38}$$

Тогда при каждом k функции $y_{(k)}$ являются сужениями на Ω некоторых функций $\widetilde{y}_{(k)} \in W_1^{\Phi,2}(b-a)$. Убедимся в этом. Очевидно, каждая функция $h_{(k,r)}(x)$ является сужением на Ω некоторой функции $\widetilde{h}_{(k,r)}(x) \in W_1^{+\infty,2}(b-a)$. В силу (5.38) имеем

$$\sum_{\alpha\in\Phi\cup\{0\}} \|\widetilde{h}_{(k,r)}^{(\alpha)}(x) - \widetilde{h}_{(k,v)}^{(\alpha)}(x)\|_1 \to 0 \quad \text{при} \quad r \ge v \to +\infty,$$

где $\|\cdot\|_1$ — символ нормы в $L_1^2(b-a)$. Отсюда следует, что для каждого k последовательность $\{\widetilde{h}_{(k,\nu)}(x)\}$ сходится к некоторой функции $\widetilde{y}_{(k)}(x) \in W_1^{\Phi,2}(b-a)$. Очевидно, на Ω функции $y_{(k)}(x)$, $\widetilde{y}_{(k)}(x)$ совпадают.

Наряду с φ рассмотрим последовательность $\{e(j)\widetilde{y}_{(k)}(x),\ j=1,\dots,m,\ k\in N\} = \widetilde{\varphi}$, полином $\widetilde{P}(x,z) = \sum\limits_{\alpha\in\Phi} \widetilde{C}_\alpha(x)(z^\alpha)$, в котором $\widetilde{C}_\alpha(x) \in L_{m,m}^2(b-a)$ совпадают на Ω с $C_\alpha(x)$, причем элементы матриц $\widetilde{C}_\alpha(x)$ ограничены в существенном в $[a,b]$,

Теорема 5.4. *Предположим, что $\widetilde{\varphi}$-задача для уравнения*

$$(\widetilde{P}(x,\partial/\partial x) - \lambda E)\widetilde{v} = \widetilde{f}(x),\quad x\in(a,b);\quad \widetilde{f}(x) = f(x)\ \text{ при }\ x\in\Omega \tag{5.39}$$

имеет при некоторой $\widetilde{f}(x)\in L_m^2(b-a)$ решение $\widetilde{v}$. Тогда сужение на Ω $\widetilde{\varphi}$-решения $\widetilde{v}$ является φ-решением уравнения (7).

Доказательство. Последовательность $\widetilde{\varphi}$ имеет биортогональную, ибо биортогональную имеет φ и $\Omega\subset[a,b]$. Так как $\widetilde{v}$ — $\widetilde{\varphi}$-решение уравнения (5.39), то

$$\sum_{k,j} v_{k,j}(\widetilde{P}(x,\partial/\partial x) - \lambda E)(e(j)\widetilde{y}_{(k)}(x)) = \widetilde{f}(x),$$

причем ряд сходится в H по норме. Рассмотрим φ-распределение v, определяемое коэффициентами Фурье $v_{k,j}$, $j=1,\dots,m$, $k\in N$ (см. замечания 1.2, 1.3). Именно это φ-распределение будем называть сужением на Ω $\widetilde{\varphi}$-распределения $\widetilde{v}$. Легко убедиться в том, что в регулярном случае, т. е. в случае $\widetilde{v}\in L_m^2(b-a)$, предложенное понятие совпадает с классическим понятием сужения функций. Так как $\Omega\subset[a,b]$, то последний ряд сходится и в $L_m^2(\Omega)$ по норме, причем его сумма в $L_m^2(\Omega)$ совпадает с $f(x)$. А это означает, что v — φ-решение уравнения (7). $\square$

Замечание 5.6. Если известно, что φ-задача для уравнения (7) не имеет двух решений, и $\widetilde{\varphi}$-задача для уравнения (5.39) разрешима, что φ-решение уравнения (7) существует, единственно и является сужением на Ω $\widetilde{\varphi}$-решений уравнения (5.39).

Обозначим через $\widetilde{P}_\lambda$ оператор, порожденный $\widetilde{\varphi}$-задачей для (5.39); через $\widetilde{\widetilde{P}}_\lambda$ — оператор, порожденный $\widetilde{\widetilde{\varphi}}$-задачей для (5.39). Пусть $\widetilde{\widetilde{\varphi}}$ совпадает с (1.4). Другими словами, $\widetilde{\widetilde{\varphi}}$-задача для уравнения (5.39) является $(b-a)$-периодической задачей, исследованной в п. 2.

Теорема 5.5. *Предположим, что $D_{\widetilde{P}_\lambda} = D_Q$, $D_{\widetilde{\widetilde{P}}_\lambda} = D_{\widetilde{Q}}$ и операторы Q, $\widetilde{Q}$ соответственно $\widetilde{\varphi}$-, $\widetilde{\widetilde{\varphi}}$-стационарные и взаимно однозначные. Тогда в случае существования $\widetilde{\varphi}$-решение $\widetilde{v}$ уравнения* (5.39) *продолжается до $(b-a)$-периодического решения $\widetilde{\widetilde{v}}$ того же уравнения; если, кроме того, $\widetilde{\varphi}$ — базис в $L_m^2((a-b))$ и $D_{\widetilde{Q}}\subset L_m^2(b-a)$, то $\widetilde{v}=\widetilde{\widetilde{v}}$ как элементы пространства $L_m^2(b-a)$.*

Доказательство. Так как $\widetilde{\varphi}_{(p)}(x)\in W_m^{\Phi,2}(b-a)$, то

$$\widetilde{\varphi}_{(p)}^{(\alpha)}(x) = \sum_{q_0} a_{p,q_0}\left(\frac{2\pi i q_0}{b-a}\right)^\alpha \exp\left(2\pi i q_0 \bullet \frac{x-a}{b-a}\right)\ \ \forall\,\alpha\in\Phi,$$

причем ряды сходятся в $L_m^2((a,b))$ по норме. С другой стороны, элементы матриц $\widetilde{C}_\alpha(x)$ ограничены в существенном, поэтому

$$\widetilde{P}_\lambda\widetilde{\varphi}_{(p)}(x) = \sum_{q_0}(\widetilde{P}(x,\partial/\partial x) - \lambda E)\left(a_{p,q_0}\exp\left(2\pi i q_0\bullet\frac{x-a}{b-a}\right)\right),$$

и ряд сходится в $L_m^2((a,b))$ по норме. Последние равенства вместе с остальными предположениями теоремы гарантируют выполнимость аналогов предположений теоремы 3.1. Из последней следует, что $\widetilde{v}$ продолжается до $(b-a)$-периодического решения $\widetilde{\widetilde{v}}$ уравнения (5.39). Однако $\widetilde{\widetilde{v}}\in L_m^2((a,b))$, поэтому $\widetilde{v}\in L_m^2((a,b))$ и $(\widetilde{v}-\widetilde{\widetilde{v}})(\widetilde{\varphi}_{(p)}(x)) = 0$. В частности, если $\widetilde{\varphi}$ — базис в $L_m^2((a,b))$, то $\widetilde{v}=\widetilde{\widetilde{v}}$ как элементы пространства $L_m^2((a,b))$. $\square$

Следствие 5.4. Пусть выполняются предположения теоремы 5.5, последовательность $\widetilde{\varphi}$ является базисом в $L^2_m((a,b))$, и уравнение (5.39) имеет $\widetilde{\varphi}$-решение. Тогда одно из φ-решений уравнения (7) является сужением на Ω $(b{-}a)$-периодического решения уравнения (5.39). Если, кроме того, уравнение (7) не может иметь двух φ-решений, то φ-решение уравнения (7) является сужением на Ω $(b{-}a)$-периодического решения уравнения (5.39).

Доказательство. Пусть $\widetilde{v}$ — $\widetilde{\varphi}$-решение уравнения (5.39). В силу теоремы 5.5 оно продолжается до $(b{-}a)$-периодического решения $\widetilde{\widetilde{v}}$ уравнения (5.39). Итак, $\widetilde{v} = \widetilde{\widetilde{v}}$ как φ-распределения. Однако сужение на Ω $\widetilde{\varphi}$-распределения $\widetilde{v}$ (а значит, и $\widetilde{\widetilde{v}}$), как доказано в теореме 5.4, является φ-решением уравнения (7). Первое утверждение доказано. В силу первого утверждения второе почти очевидно. $\square$

Замечание 5.7. Понятно, что из результатов части III следует теория периодической задачи, изложенная в [4]. Обратное невозможно в принципе. Действительно, если уравнение $P(x,\partial/\partial x)u = f(x)$ имеет $(b{-}a)$-периодическое решение, и $\widetilde{\widetilde{P}}(\partial/\partial x)$ — линейный дифференциальный квазиполином с постоянными коэффициентами, удовлетворяющий условию $\det(\widetilde{\widetilde{P}}(2\pi i\frac{k}{b-a})) \neq 0\ \forall k \in \mathbb{Z}^n$, то и уравнение $P(x,\partial/\partial x)\widetilde{\widetilde{P}}(\partial/\partial x)v = f(x)$ имеет $(b{-}a)$-периодическое решение. Понятие периодического решения, использованное в [4], делает отмеченное утверждение невозможным. В этом мы убедились, рассматривая математическую модель колебаний струны. Аналогичное можно сказать и о других φ-задачах, в том числе и о задаче, рассмотренной в ([2], п. 1). Для последней вместо $\widetilde{\widetilde{P}}(\partial/\partial x)$ следует взять $\widetilde{\widetilde{P}}((\partial/\partial x)^2 + h)$ и предположить $\det(\widetilde{\widetilde{P}}(\Lambda_k)) \neq 0\ \forall k \in \mathbb{Z}^n$. В тех случаях, когда $\Phi = \{\alpha : |\alpha| \leq n_1\}$, $m = 1$, и (5.17) имеет место при всех $k \in \mathbb{R}^n$, в [5] дифференциальный полином $P(x,\partial/\partial x)$ называется оператором главного типа.

Литература

1. Мокейчев В.С., $\boxed{\text{Мокейчев А.В.}}$ *Новый подход к теории линейных задач для систем дифференциальных уравнений в частных производных.* I // Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 1. – С. 25–35.
2. Мокейчев В.С., $\boxed{\text{Мокейчев А.В.}}$ *Новый подход к теории линейных задач для систем дифференциальных уравнений в частных производных.* II // Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 7. – С. 30–41.
3. Мокейчев В.С. *Дифференциальные уравнения с отклоняющимися аргументами.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1985. – 222 с.
4. Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. *Уравнения с частными производными.* – М.: Мир, 1966. – 357 с.
5. Егоров Ю.В. *Линейные дифференциальные уравнения главного типа.* – М.: Наука, 1984. – 359 с.

Казанский государственный университет

Поступила
18.03.1996