ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 10 (437)

УДК 517.956

М.К. БУГИР

ОЦЕНКИ УСЛОВНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ДВУХКОНТУРНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В КРУГЕ

1. В [1]–[3] рассматривалась разноконтурная краевая задача для полигармонического уравнения

$$\Delta^n u + c_1 \Delta^{n-1} u + \cdots + c_n u = 0 \tag{1_{2n}}$$

с оператором Лапласа Δ и постоянными коэффициентами $c_1, \dots, c_n$, когда краевые условия задавались на разных контурах

$$u(x)\big|_{\Gamma_1} = \varphi_1(x), \dots, \quad u(x)\big|_{\Gamma_n} = \varphi_n(x), \tag{2_{2n}}$$

где замкнутые контуры Γ_k ограничивают области D_k, причем $D_1 \subset D_2 \subset \cdots \subset D_n \subseteq D$. Кроме того, как показано в [2], [3], результаты практически не меняются, если вместо оператора Лапласа Δ взять оператор Лапласа–Бельтрами L и рассмотреть краевую задачу (2) для соответствующих уравнений в пространствах постоянной кривизны. Отметим, кроме того, что такие задачи являются одним из возможных обобщений многоточечных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и возникают в самых разнообразных прикладных проблемах, связанных, например, с геологическими, геофизическими и другими наблюдениями [4], когда измерение экспериментальных данных осуществляется не только на границе области, но и внутри нее.

Ниже будет показано, что задача (1_{2n}), (2_{2n}) некорректная, поэтому важную роль играют оценки условной устойчивости задачи, классическим результатом в этом смысле можно считать оценки для задачи аналитического продолжения Адамара ([4], с. 26–27). В данной работе мы также остановимся на оценках условной устойчивости для задачи (1_{2n}), (2_{2n}) при $n = 2$, т. е. рассмотрим уравнение четвертого порядка

$$K_4 u = \Delta^2 u + c_1 \Delta u + c_2 u = 0, \tag{1_4}$$

когда контуры Γ_1 и Γ_2 имеют вид концентрических окружностей радиусов R_1 и R_2, $R_2 > R_1$. (В дальнейших обозначениях (1), (2) нижний индекс 4 будем опускать, если это не вызывает недоразумений.)

Уравнение (1) через корни квадратного уравнения

$$\lambda^2 + c_1 \lambda + c_2 = 0 \tag{3}$$

можно переписать в виде суперпозиции двух операторов второго порядка $K_4 u = (\Delta - \lambda_2)(\Delta - \lambda_1) u = 0$ или эквивалентной системы уравнений второго порядка

$$\begin{cases} (\Delta - \lambda_1) u = v, \\ (\Delta - \lambda_2) v = 0. \end{cases} \tag{4}$$

В силу (4) произвольное решение (1) представляется в виде

$$u = u_1 + \widetilde{v}, \tag{5}$$

где u_1 — произвольное решение уравнения

$$K_{i,2}u_i = (\Delta - \lambda_i)u_i = 0 \quad (i = 1, 2) \tag{6_i}$$

при $i = 1$, а $\widetilde{v}$ — частное решение неоднородного уравнения

$$(\Delta - \lambda_1)u = v. \tag{4_1}$$

В [5] представление произвольного решения (5) в зависимости от вида корней уравнения (3) выписано более точно. В частности, если эти корни разные, то

$$u = u_1 + u_2, \tag{$5'$}$$

где u_i — произвольные решения уравнений (6_i) $(i = 1, 2)$ и

$$u = u_0 + r\frac{\partial u_1}{\partial r} \tag{$5''$}$$

для кратного корня уравнения (3), где u_0 и u_1 — произвольные решения уравнения $\Delta u - \lambda u = 0$.

Определение. Нетривиальное решение уравнения (1) будем называть колеблющимся в области D, если найдутся хотя бы два замкнутых контура Γ_1 и Γ_2, ограничивающие области D_1 и D_2, $D_1 \subset D_2 \subseteq D$, такие, что

$$u(x)\big|_{\Gamma_1} = 0 = u(x)\big|_{\Gamma_2},$$

и неколеблющимся в противном случае. Уравнение (1) будем называть неколеблющимся, если все его решения неколеблющиеся.

Данное определение колеблемости связано с порядком уравнения и легко обобщается на уравнения порядка $2n$.

Будем предполагать, что корни уравнения (3) неотрицательные, что обеспечивает неколеблемость уравнения (1).

Решение уравнения (1) для разных корней уравнения (3) в полярных координатах (r, θ) с помощью метода разделения переменных запишем через модифицированные функции Бесселя $I_m(t)$ следующим образом:

$$u(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{2} c_{m,j} I_m(\sqrt{\lambda_j} r) e^{im\theta}, \quad i = \sqrt{-1}. \tag{7}$$

Для вычисления коэффициентов Фурье представления (7) получим систему алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов $c_{m,j}$ $(j = 1, 2;\ m = 0, 1, 2, \dots)$

$$\sum_{j=1}^{2} c_{m,j} I_m(\sqrt{\lambda_j}\, r) = \varphi_{m,l} \quad (l = 1, 2),$$

где правые части суть коэффициенты разложения Фурье контурных условий (2). Единственность решения последней алгебраической системы уравнений зависит от значения определителя

$$\Delta_m = \begin{vmatrix} I_m(\sqrt{\lambda_1} R_1) & I_m(\sqrt{\lambda_2} R_1) \\ I_m(\sqrt{\lambda_1} R_2) & I_m(\sqrt{\lambda_2} R_2) \end{vmatrix} \quad (m = 0, 1, 2, \dots).$$

Очевидно, необходимым и достаточным условием единственности решения двухконтурной краевой задачи (1), (2) будет

$$\Delta_m \neq 0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots). \tag{8}$$

Последнее условие обеспечивается, как уже упоминалось, условиями

$$\lambda_1 \geq 0, \quad \lambda_2 \geq 0. \tag{9}$$

Используем обозначения работ [1]–[3] $R_2/R_1=\tau$, $\delta_m(t)=I_m(t)/I_m(\tau t)$, $\sigma_i=\sqrt{\lambda_i}\,R_1$ $(i=1,2)$. Если в ряде (7) сгруппируем выражения, стоящие при коэффициентах Фурье $\varphi_{m,1}$ и $\varphi_{m,2}$, то он перепишется в виде

$$u(r,\theta)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{2}B_{m,j}(r)e^{im\theta}\varphi_{m,j}, \tag{10}$$

где

$$B_{m,1}(r)=\frac{\begin{vmatrix}\dfrac{I_m(\sqrt{\lambda_1}r)}{I_m(\tau\sigma_1)} & \dfrac{I_m(\sqrt{\lambda_2}r)}{I_m(\tau\sigma_2)}\\ 1 & 1\end{vmatrix}}{\delta_m(\sigma_1)-\delta_m(\sigma_2)},\qquad B_{m,2}(r)=\frac{\begin{vmatrix}\delta_m(\sigma_1) & \delta_m(\sigma_2)\\ \dfrac{I_m(\sqrt{\lambda_1}r)}{I_m(\tau\sigma_1)} & \dfrac{I_m(\sqrt{\lambda_2}r)}{I_m(\tau\sigma_2}\end{vmatrix}}{\delta_m(\sigma_1)-\delta_m(\sigma_2)}.$$

2. Рассмотрим вопрос об условной устойчивости задачи (1), (2) при дополнительных условиях на решения уравнения (1). Как указано в работе [6], одним из таких естественных условий является

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)^2\right]\bigg|_{r=R_2}d\theta<E, \tag{11}$$

выражающее ограниченность энергии.

Некорректность двухконтурной задачи (1), (2) нетрудно заметить, если задать значения на контурах $\varphi_2(x)=0$, $\varphi_1(x)=\varepsilon e^{im\theta}$.

Рассмотрим пространства

$$L_2[0,2\pi]\quad\text{с нормой}\quad\|\varphi(\theta)\|=\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi^2(\theta)d\theta=\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k^2, \tag{12}$$

$$H_2\quad\text{с нормой}\quad\|u(r,\theta)\|_{H_2}^2=\max_{0\le r\le R_2}\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}u^2(r,\theta)d\theta=\max_{0\le r\le R_2}\sum_{k=0}^{\infty}u_k^2(r), \tag{12$'$}$$

где φ_k и $u_k(r)$ — коэффициенты разложения Фурье соответствующих функций. Рассмотрим решение $u_{m,\varepsilon}(x)=\varepsilon B_{m,1}(r)e^{im\theta}$, удовлетворяющее указанным выше условиям. В пространстве $L_2[0,2\pi]$ для произвольного m и произвольно малого $\varepsilon>0$ $\|\varphi_1\|_{L_2[0,2\pi]}=\varepsilon$, т.е. произвольно мала. С другой стороны, в силу оценки для функции $\delta_m(t)$ [2]

$$|B_{m,1}(r)|=\frac{\left|\dfrac{I_m(\sqrt{\lambda_1}r)}{I_m(\sqrt{\lambda_1}R_2)}-\dfrac{I_m(\sqrt{\lambda_2}r)}{I_m(\sqrt{\lambda_2}R_2)}\right|}{|\delta_m(\sqrt{\lambda_1}R_1)-\delta_m(\sqrt{\lambda_2}R_2)|}\ge\left[\max\left(\delta_m(\sqrt{\lambda_1}R_1)-\delta_m(\sqrt{\lambda_2}R_2)\right)\right]^{-1}=\widetilde{A}\tau^m.$$

Последнее выражение за счет m можно выбрать сколь угодно большим. Следовательно, некорректность двухконтурной задачи проявляется в том, что нет непрерывной зависимости по норме (12$'$) от исходных данных на внутреннем контуре Γ_1.

Замечание 1. Нетрудно проверить, что априорные оценки условной устойчивости двухконтурной задачи (1), (2) тесным образом связаны с условиями единственности аналитического продолжения функции $\widetilde{v}(x)$ с области D_1 на всю область D_2. Для этого достаточно записать систему интегральных уравнений, равносильную системе уравнений (4),

$$\begin{aligned}u(P_0)&=\int\limits_{D_2}\cdots\int(\lambda_1u+w)G_2(P,P_0)dP+\int\limits_{\Gamma_2}\cdots\int u(P)\frac{\partial G_2(P,P_0)}{\partial n_P}dP,\\ w(P_0)&=\int\limits_{D_1}\cdots\int(\lambda_2wG_1(P,P_0)dP+\int\limits_{\Gamma_1}\cdots\int w(P)\frac{\partial G_1(P,P_0)}{\partial n_P}dP,\end{aligned} \tag{13}$$

где через $G_i(P,P_0)$ обозначены функции Грина задачи с условиями Дирихле для уравнения Лапласа в областях D_i $(i=1,2)$. Как известно [7], второе уравнение (13) всегда имеет единственное решение в области D_1, и если его единственным образом продолжить на всю область, то первое уравнение также будет иметь единственное решение. В связи с этим сформулируем дополнительные условия типа условий (11), обеспечивающие условную устойчивость задачи (1), (2), через частное решение $\widetilde{v}(x)$ неоднородного уравнения (4_1).

Теорема 1. *Пусть частное решение $\widetilde{v}(r,\theta)$ неоднородного уравнения (4_1) удовлетворяет априорной оценке*

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}\widetilde{v}^{\,2}(R_2,\theta)d\theta < M^2 \tag{14}$$

и

$$\|\varphi_i(\theta,R_i)\|_{L_2[0,2\pi]} \le \varepsilon_i \quad (i=1,2).$$

Тогда задача (1), (2) условно устойчива и имеет место оценка

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}u^2(r,\theta)d\theta \le 2\Big\{\varepsilon_1+\frac{I_k(\sqrt{\lambda_2}r)}{I_k^2(\sqrt{\lambda_2}R_2)}M^2(\lambda_2-\lambda_1)^2\Big\}, \tag{15}$$

где число k определяется из неравенства

$$0\le k+(1/2)\ln 2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)M^{-2}/(\ln\tau\beta/\ln\tau), \tag{16}$$

если корни уравнения (3) разные, а для кратных корней уравнения (3)

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}u^2(r,\theta)d\theta \le 2\Big\{\varepsilon_1+M^2\Big[\frac{rI_k'(\sqrt{\lambda}r)}{R_2I'(\sqrt{\lambda}R_2)}\Big]\Big\}, \tag{17}$$

где k удовлетворяет уравнению

$$M\frac{R_1}{R_2}\frac{I_k'(\sqrt{\lambda}R_1)}{I_k'(\sqrt{\lambda}R_2)}=\sqrt{2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\,. \tag{18}$$

Доказательство. В силу представления (5) решение задачи (1), (2) можно разбить на две задачи: задачу с условиями Дирихле

$$u_1\big|_{\Gamma_2}=\varphi_2(x)$$

для уравнения (6_1) и двухконтурную задачу для решения $\widetilde{v}(x)$

$$\widetilde{v}\big|_{\Gamma_2}=0,\quad \widetilde{v}\big|_{\Gamma_1}=\varphi_1-u_1\big|_{\Gamma_1}.$$

Из-за неколеблемости уравнений (6_i) имеет место принцип максимума для них, поэтому в круге $r\le R_2$ выполняются неравенства

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}u_i^2(r,\theta)d\theta<\varepsilon_2,\quad r\in[0,R_2]\ \ (i=1,2)$$

при условии $\|\varphi_2\|_{L_2}<\varepsilon_2$. Так как $-\widetilde{v}^{\,2}\le 2(\varphi_1^2+u_1^2\big|_{\Gamma_1})$ на контуре Γ_1, то

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}\widetilde{v}^{\,2}(R_1,\theta)d\theta<2(\varepsilon_1+\varepsilon_2). \tag{19}$$

Разделяя переменные в полярной системе координат, решения однородных уравнений (6_i) можно переписать в виде

$$u_i(r,\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}I_k(\sqrt{\lambda_i}r)a_ke^{ik\theta}.$$

Последнее выражение можно рассматривать как разложение в ряд Фурье на интервале $[0, 2\pi]$, поэтому

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} u_i^2(r,\theta)d\theta = \frac{A_0^2}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2 I_k^2(\sqrt{\lambda_i}r).$$

Перепишем частное решение неоднородного уравнения (4_1) [8]

$$\widetilde{v}(r,\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} I_k(\sqrt{\lambda_2}r)e^{ik\theta}\frac{A_k}{\lambda_2-\lambda_1} + \frac{A_0}{2},$$

когда $\lambda_1 \neq \lambda_2$, и

$$\widetilde{v}(r,\theta) = r\sum_{k=1}^{\infty} I_k'(\sqrt{\lambda}r)e^{ik\theta}A_k + r\frac{A_0}{2},$$

если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. (В дальнейшем ограничимся только первым случаем, когда $\lambda_1 \neq \lambda_2$, т. к. во втором случае рассуждения аналогичные с заменой функции $I_k^2(\lambda_2 r)$ на $r^2 I_k'^2(\lambda_2 r)$.)

Учитывая ортогональность множества функций $\{e^{ik\theta}\}$ в пространстве $L_2[0,2\pi]$ и условия (14) и (19) при разных корнях уравнения (3), получим систему неравенств-ограничений

$$\begin{cases} \dfrac{1}{(\lambda_1-\lambda_2)^2}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} A_k^2 I_k^2(\sqrt{\lambda_2}R_1) \le 2(\varepsilon_1+\varepsilon_2), \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} A_k^2 I_k^2(\sqrt{\lambda_2}R_2) \le M^2(\lambda_2-\lambda_1)^2. \end{cases} \tag{20}$$

Неизвестные A_k^2 при каждом $r \in [0, R_2]$ следует подобрать так, чтобы функция

$$F(r) = \int_0^{2\pi} v^2(r,\theta)d\theta = \frac{A_0^2}{4} + \sum_{k=0}^{\infty} A_k^2 I_k^2(\lambda_2 r)$$

принимала наибольшее значение. Нетрудно заметить, что построенная выше задача является задачей линейного программирования, поэтому оптимальное значение достигается на некотором опорном решении. Следовательно, существуют такие $k_1 < k_2$, что A_{k_1}, A_{k_2} отличны от нуля, а остальные $A_j = 0$, если оптимальное решение невырождено, и $A_k \neq 0$, если оно вырожденное. Используя обозначения $I_{k_j}^2(\sqrt{\lambda_2}R_i) = a_{ij}$, для определения неизвестных A_{k_1} и A_{k_2} получим систему уравнений

$$\begin{cases} A_{k_1}^2 a_{11} + A_{k_2}^2 a_{12} = 2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)(\lambda_2-\lambda_1)^2, \\ A_{k_1}^2 a_{21} + A_{k_2}^2 a_{22} = M^2(\lambda_2-\lambda_1)^2. \end{cases} \tag{21}$$

Для вырожденного опорного решения утверждение теоремы почти очевидно, поскольку $A_{k_1} = 0$, $A_{k_2}^2 = M^2(\lambda_2-\lambda_1)^2 I_{k_2}^{-2}(\sqrt{\lambda_2}R_2)$ или наоборот, а число k определяется из трансцендентного уравнения

$$M^2\frac{I_k^2(\sqrt{\lambda_2}R_1)}{I_k^2(\sqrt{\lambda_2}R_2)} = 2(\varepsilon_1+\varepsilon_2).$$

Используя определение функции $\delta_m(t)$ через ряды, имеем очевидную оценку $0 < \beta \le 2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\tau^{2k} < 1$. Отсюда, прологарифмировав ее, получим (16) и

$$F_{\max}(r) = M^2(\lambda_2-\lambda_1)^2 I_k^2(\sqrt{\lambda_2}r)I_k^{-2}(\sqrt{\lambda_2}R_2), \quad r \in [0, R_2].$$

Оценка (15) следует из представления частного решения $\widetilde{v}(r)$. В общем случае по формулам Крамера решим систему уравнений (21), причем

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{22}a_{21}[\delta_{k_1}(\sigma_2) - \delta_{k_2}(\sigma_2)];$$

$$\Delta_{1,k} = \begin{vmatrix} 2(\varepsilon_1+\varepsilon_2) & a_{12} \\ M^2(\lambda_2-\lambda_1)^2 & a_{22} \end{vmatrix}; \quad \Delta_{2,k} = \begin{vmatrix} a_{11} & 2(\varepsilon_1+\varepsilon_2) \\ a_{21} & M^2(\lambda_2-\lambda_1)^2 \end{vmatrix}.$$

Введем обозначение $I^2_{k_i}(\sqrt{\lambda_2}r) = a_i(r)$, тогда

$$F_{\max}(r) = \frac{\Delta_{1,k}}{\Delta_k} I^2_{k_1}(\sqrt{\lambda_2}r) + \frac{\Delta_{2,k}}{\Delta_k} I^2_{k_2}(\sqrt{\lambda_2}r) =$$
$$= \frac{\dfrac{a_1(r)}{a_{21}} - \dfrac{a_2(r)}{a_{22}}}{\delta^2_{k_1}(\sigma_2) - \delta^2_{k_2}(\sigma_2)} 2(\varepsilon_1+\varepsilon_2) + \frac{\dfrac{a_{11}a_2(r)}{a_{21}a_{22}} - \dfrac{a_{12}a_1(r)}{a_{22}a_{21}}}{\delta^2_{k_1}(\sigma_2) - \delta^2_{k_2}(\sigma_2)} M^2(\lambda_2-\lambda_1)^2.$$

Обе суммы монотонно возрастают по k_1 и монотонно убывают по k_2, что можно проверить с помощью дифференцирования или воспользоваться свойствами функции $\delta_k(t)$. Кроме того,

$$\lim_{k_1,k_2 \to \left[\frac{1}{2}\ln 2(\varepsilon_1+\varepsilon_2) - \ln\beta\right]/\ln\tau} \widetilde{v} \le M^2(\lambda_2-\lambda_1)^2 \frac{I^2_k(\sqrt{\lambda_2}r)}{I^2_k(\sqrt{\lambda_2}R_2)}.$$

Отсюда и из представления общего решения через (5) следует оценка (15). Из неравенства (16) следует, что $k\to\infty$, если $\varepsilon_1+\varepsilon_2\to 0$, и тогда для больших k имеем $I_k(\sqrt{\lambda_2}r)/I_k(\sqrt{\lambda_2}R_2) \cong r^k/R_2^k$. Таким образом, для $r<R_2$ правая часть (15) стремится к нулю, и решение краевой задачи (1), (2) единственно в указанном выше классе. $\square$

3. Используя дифференциальные свойства частного решения $v(r,\theta)$ по аргументам r и θ, можно получить более точные оценки, чем (18). Например, если вместо условия (15) потребовать выполнения условия

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial^m v}{\partial\theta^m}\bigg|_{r=R_2} \right)^2 d\theta \le M^2, \tag{22}$$

то для первого случая ($\lambda_1 \ne \lambda_2$) получим оценку

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} u^2(r,\theta)d\theta \le 2\left\{ \varepsilon_2 + \frac{M^2(\lambda_2-\lambda_1)^2}{k^{2m}} \frac{I^2_k(\sqrt{\lambda_2}r)}{I^2_k(\sqrt{\lambda_2}R_2)} \right\}, \tag{23}$$

где k удовлетворяет неравенству

$$0 < (1/2)\ln(\varepsilon_1+\varepsilon_2) + m\,\ln k + k\,\ln\tau - \ln\beta. \tag{24}$$

Доказательство аналогично доказательству оценки (15), если вместо условия (14) использовать условие (22). Следовательно, имеет место

Следствие 1. Пусть функция $\widetilde{v}(r,\theta)$ m раз дифференцируема по аргументу θ и выполняются неравенства $\|\varphi_i(\theta,R_i)\|_{L_2[0,2\pi]} \le \varepsilon_i$ $(i=1,2)$ и (22). Тогда для разных корней уравнения (3) имеет место оценка (23), где k определяется из (24), а для кратных корней — оценка

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} u^2(r,\theta)d\theta \le 2\left\{ \varepsilon_1 + k^{-m}\left[\frac{rI'_k(\sqrt{\lambda_2}r)}{R_2 I'_k(\sqrt{\lambda_2}R_2)} \right]^2 M^2 \right\},$$

где k определяется из уравнения

$$M\frac{R_1}{R_2}\frac{I'_k(\sqrt{\lambda_2}R_1)}{I'_k(\sqrt{\lambda_2}R_2)} = k^m\sqrt{2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}\,.$$

Введем обозначения

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial v}{\partial r}\bigg|_{r=R_2}\right)^2 d\theta=\frac{1}{(\lambda-\lambda_2)^2}\sum_{k=0}^{\infty}A_k^2\Psi_k(r),$$

$$\Psi_k(r)=\frac{k^2}{r^2}I_k^2(\sqrt{\lambda_2}r)+2\frac{\sqrt{\lambda_2}}{r}kI_k(\sqrt{\lambda_2}r)I_{k+1}(\sqrt{\lambda_2}r)+\lambda_2 I_{k+1}^2(\sqrt{\lambda_2}r).$$

По аналогии с предыдущими рассуждениями доказывается

Следствие 2. Пусть выполняются условия $\|\varphi_i(\theta,R_i)\|_{L_2[0,2\pi]}\le\varepsilon_i$ $(i=1,2)$, (4) и

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial v}{\partial r}\bigg|_{r=R_2}\right)^2 d\theta\le M^2.$$

Тогда для $\lambda_1\ne\lambda_2$ имеет место оценка

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}u^2(r,\theta)d\theta\le 2\Big\{\varepsilon_1+\frac{I_k^2(\sqrt{\lambda_2}r)}{\Psi_k(R_2)}M^2(\lambda_2-\lambda_1)^2\Big\},$$

где параметр k определяется из уравнения $M^2\dfrac{I_k^2(\sqrt{\lambda_2}R_1)}{\Psi_k(R_2)}=2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)$.

Замечание 2. Условия следствия 1 при $k=1$ и 2 можно заменить условием (11).

Аналогично рассматриваются вопросы условной устойчивости для уравнения (1) в пространствах с отличной от нуля кривизной [3].

4. Рассмотрим случай двухконтурной задачи, когда внешняя граница Γ_2 — окружность, а внутренняя задается уравнением $r=R_1(\theta)$, $r>0$. Обозначим определитель краевой задачи (2_4), когда контуры Γ_1 и Γ_2 задаются соответственно уравнениями $r=R_1(\theta)$ и $r=R_2$, через

$$\Delta_k(\theta)=\begin{vmatrix} I_m(\sqrt{\lambda_1}\,R_1(\theta)) & I_m(\sqrt{\lambda_2}\,R_1(\theta)) \\ I_m(\sqrt{\lambda_1}\,R_2) & I_m(\sqrt{\lambda_2}\,R_2)\end{vmatrix}.$$

Обозначим через R_{10} радиус максимальной концентрической сферы, которую можно вписать в область, ограниченную кривой $r=R_1(\theta)$.

Лемма. *Имеет место оценка*

$$\Delta_k(\theta)>\Delta_{k0},$$

где Δ_{k0} *— определитель двухконтурной задачи*

$$u(r,\theta)\big|_{r=R_{10}}=\varphi_{10}(x),\quad u(r,\theta)\big|_{r=R_2}=\varphi_2(x).$$

Доказательство. Перепишем в форме (8) определитель

$$\Delta_k(\theta)=I_k(\sqrt{\lambda_1}\,R_2)I_k(\sqrt{\lambda_2}\,R_2)\left[\frac{I_k(\sqrt{\lambda_1}\,R_1(\theta))}{I_k(\sqrt{\lambda_1}\,R_2)}-\frac{I_k(\sqrt{\lambda_2}\,R_1(\theta))}{I_k(\sqrt{\lambda_2}\,R_2)}\right]$$

и вычислим производную

$$\Delta_k'(\theta)=\Gamma_k\left[\frac{I_k'(\sqrt{\lambda_1}\,R_1(\theta))\sqrt{\lambda_1}\,R_1'(\theta)}{I_k(\sqrt{\lambda_1}R_2)}-\frac{I_k'(\sqrt{\lambda_2}\,R_1(\theta))\sqrt{\lambda_2}\,R_1'(\theta)}{I_k(\sqrt{\lambda_2}\,R_2)}\right],$$

где $\Gamma_k=I_k(\sqrt{\lambda_1}\,R_2)/I_k(\sqrt{\lambda_2}\,R_2)$. Используя формулу дифференцирования функций Бесселя, для определителя $\Delta_k(\theta)$ получим дифференциальное уравнение первого порядка

$$\Delta_k'(\theta)=\Gamma_k\frac{kR_1'(\theta)}{R_1(\theta)}\Delta_k(\theta)+g_k(\theta)R_1'(\theta),\tag{25}$$

где

$$g_k(\theta) = \Gamma_k \Big[\frac{I_{k+1}(\sqrt{\lambda_1}\, R_1(\theta))}{I_k(\sqrt{\lambda_1}\, R_2)} \sqrt{\lambda_1} - \frac{I_{k+1}(\sqrt{\lambda_2}\, R_1(\theta))}{I_k(\sqrt{\lambda_2}\, R_2)} \sqrt{\lambda_2} \Big],$$

общее решение которого запишем в виде

$$\Delta_k(\theta) = R_1^k(\theta) \Big[C_1 + \int R_1^{-k}(\tau) g_k(\tau) R_1'(\tau) d\tau \Big],$$

C_1 — произвольная константа. Нетрудно подсчитать, что $g_k(t) \geq 0$, тогда вместо (25) получим неравенство $\Delta_k(\theta) > R_1^k(\theta) C_1$. Положив $C_1 = R_{10}^{-k} \Delta_{k0}$ и учитывая, что $R_{10} = \min R_1(\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$, получим неравенство (20). □

Обозначим $\tau_0 = R_1/R_{10}$, тогда, следуя методике работ [2], [3], доказывается теорема существования и оценки условной устойчивости типа (15), (17) для двухконтурной задачи, если контуры Γ_1 и Γ_2 задаются соответственно уравнениями $r = R_1(\theta)$, $r = R_2$.

Литература

1. Бугир М.К. *Связь неколеблемости решений с некорректными задачами для уравнений эллиптического типа четвертого порядка* // Докл. РАН. – 1991. – Т. 319. – № 5. – С. 1053–1056.
2. Бугир М.К. *Некорректные краевые задачи для полигармонического уравнения n-го порядка* // Изв. вузов. Математика. – 1994. – № 10. – С. 19–25.
3. Бугир М.К. *Краевые задачи для уравнений с частными производными на многообразиях постоянной кривизны* // Препринт. Ин-т матем. АН Украины. – Киев, 1993. – № 93. – 58 с.
4. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. *Некорректные задачи математической физики и анализа.* – М.: Наука, 1980. – 286 с.
5. Векуа И.Н. *Новые методы решения эллиптических уравнений.* – М.–Л.: ГИТТЛ, 1948. – 296 с.
6. Пташнык Б.И., Фиголь В.В., Штабалюк П.И. *Разрешимость, устойчивость и регуляризация многоточечной задачи для гиперболических уравнений* // Тр. Львов. матем. о-ва. – 1991. – Т. 3. – С. 16–32.
7. Курант Р. *Уравнения с частными производными.* – М.: Мир, 1964. – 830 с.
8. Камке Э. *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.* – М.: Наука, 1971. – 576 с.

Тернопольская Академия народного хозяйства

Поступили
первый вариант 03.03.1995
окончательный вариант 18.07.1996