ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 3 (466)

УДК 514.764.352

О.С. ГЕРМАНОВ

О ПОДВИЖНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ВЕЙЛЯ С РАЗЛОЖИМЫМ ЛИНЕЙНЫМ ЭЛЕМЕНТОМ

Изучение преобразований пространств аффинной связности, сохраняющих те или иные их свойства, началось с работ С. Ли и Б. Римана, впервые поставивших вопрос о движениях в евклидовых и псевдоевклидовых пространствах. Под движениями при этом понимались такие бесконечно малые (инфинитезимальные) преобразования, которые сохраняют расстояние между бесконечно близкими точками пространства.

В дальнейшем в связи с обобщением понятия евклидова, а затем и риманова, пространств появились и обобщения понятия движения. Называемые этим термином преобразования уже не сохраняют расстояние, которое в этих обобщенных пространствах далеко не всегда определяется, но сохраняют некоторые другие объекты, определенные в них: углы (конформные преобразования), геодезические линии (проективные преобразования, проективные движения) и другие. Заметим, что эти преобразования, как правило, не сохраняют связность самого пространства. Самым общим, пожалуй, понятием движения в пространстве аффинной связности, сохраняющим его связность, является аффинная коллинеация, — преобразование, переводящее геодезические линии исследуемого пространства снова в геодезические и сохраняющее аффинный параметр геодезической ([1], гл. VII, § 75, с. 126).

Пространства Вейля занимают промежуточное положение между римановыми пространствами и пространствами аффинной связности общего вида — они обобщают первые и являются частным случаем вторых. В силу этого в настоящее время нет общепринятого понятия движения в пространстве Вейля. Некоторые авторы понимают под движением аффинные коллинеации [2], другие — преобразования, сохраняющие меру угла, определенную основным псевдотензором пространства Вейля (конформные движения) [3], третьи — преобразования, сохраняющие его связность [4].

Исследованием подвижности пространств Вейля как пространств аффинной связности впервые занимался, по-видимому, Дж. Левин [2]. Он рассматривал аффинные коллинеации и отыскивал классы пространств, их допускающих, исходя из условия сохранения связности при таких преобразованиях.

В данной работе рассматривается более узкий класс преобразований пространств Вейля — преобразования, сохраняющие основной псевдотензор и аффинную связность пространства (т. е. преобразования, непосредственно обобщающие на случай связности Вейля гомотетии риманова пространства ([5], гл. 7, § 5, с. 168)), и указывается способ построения некоторого класса пространств Вейля, допускающих указанные преобразования.

1. Постановка задачи

Под движением в пространстве Вейля $W_n(g_{ij}, \omega_k)$ с основным тензором g_{ij} и дополнительным вектором $\omega_k \neq \partial_k \omega$ $(i, j, k \ldots = \overline{1, n}$, $n = \dim W_n$, $\nabla_k g_{ij} = 2\omega_k g_{ij}$, ∇_k — символ ковариантного дифференцирования в $W_n)$ понимается [6] инфинитезимальное преобразование $x'^i = x^i + \xi^i(x^j)\delta t$ (x^i — координаты в W_n, штрих обозначает координаты образа при преобразовании, δt — вариация группового параметра), порожденное векторным полем $\xi^i(x^j)$ и сохраняющее связность и основной тензор пространства. Движение в пространстве Вейля, таким образом, одновременно является его конформным преобразованием и аффинной коллинеацией.

Как показано в [6], уравнения, определяющие такое преобразование, можно записать в виде

$$D_\xi g_{ij} = 2\phi g_{ij}, \tag{1a}$$
$$D_\xi \omega_k = \partial_k \phi, \tag{1b}$$

где D_ξ обозначает дифференцирование Ли вдоль векторного поля ξ^i, $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$, ϕ — некоторая функция координат ($\phi = \xi^k\omega_k + \frac{1}{n}\nabla_k\xi^k$).

Как известно ([7], гл. IV, с. 160–161), с каждым пространством Вейля W_n ассоциируется пучок римановых пространств, находящихся в конформном соответствии с исходным W_n и, естественно, друг с другом. Для получения пространства из этого пучка необходимо, выбрав нормирование основного тензора пространства Вейля, преобразовать это пространство конформно с вектором конформного преобразования $p_k = -\omega_k$. Всякое другое риманово пространство из ассоциированного пучка получается при аналогичном преобразовании исходного пространства W_n, но при ином нормировании основного тензора.

Преобразование связности пространства Вейля влечет за собой некоторое изменение связности каждого из пространств ассоциированного пучка. Для определения этого изменения заметим, что $\nabla_k\xi^k = \overset{R}{\nabla}_k\xi^k - n\omega_k\xi^k$ ($\overset{R}{\nabla}_k$ — символ ковариантного дифференцирования в ассоциированном римановом пространстве). Тогда из (1a) получим, что деформация рассматриваемого риманова пространства описывается уравнениями

$$D_\xi g_{ij} = \frac{2}{n}\overset{R}{\nabla}_k\xi^k g_{ij}. \tag{2a}$$

Следовательно, при движении пространства Вейля $W_n(g_{ij}, \omega_k)$ ассоциированное пространство $V_n(g_{ij})$ подвергается конформному преобразованию. Как показывают уравнения (1b), при этом в пространстве V_n существует некоторый ковектор ω_i, удовлетворяющий уравнению

$$D_\xi \omega_i = \frac{1}{n}\partial_i(\overset{R}{\nabla}_k\xi^k). \tag{2b}$$

Итак, ассоциированное с подвижным пространством Вейля риманово пространство характеризуется тем, что, являясь конформно подвижным, допускает существование некоторого ковектора, удовлетворяющего уравнению (2b). Заметим, что ковекторы ω_i и $\overline{\omega}_i$, соответствующие двум (конформным друг другу и исходному W_n) римановым пространствам $V_n(g_{ij})$ и $\overline{V}_n(\overline{g}_{ij} = e^{2\sigma}g_{ij})$ из ассоциированного с W_n пучка, связаны равенством $\overline{\omega}_i = \omega_i + \partial_i\sigma$. Следовательно, величины ω_i образуют нормализатор ([7], гл. IV, § 55, с. 192).

Таким образом, для построения подвижной связности Вейля достаточно в конформно-подвижном римановом пространстве, описываемом уравнениями (2a), отыскать неградиентные решения уравнений (2b), после чего подвижная связность Вейля определяется по найденной паре g_{ij} и ω_k формулами ([7], гл. IV, § 42, с. 154)

$$\Gamma^i_{jk} = \{^{\,i}_{jk}\} - \omega_j\delta^i_k - \omega_k\delta^i_j + \omega_l g^{ie} g_{jk}, \tag{3}$$

где $\{^{\,i}_{jk}\}$ — скобки Кристоффеля тензора g_{ij}, а δ^i_j — символы Кронекера.

2. Конформный вектор

Как известно [8], решением уравнений (2b) в конформно-подвижном римановом пространстве $V_n(g_{ij})$ является конформный вектор веса $\frac{1}{2}$ метрики g_{ij}. Напомним, что конформным вектором веса p риманова пространства называется [8] любой ковектор q_i, построенный в этом V_n по некоторому правилу по его метрическому тензору и его частным производным и связанный с ковектором $\overline{q}_i$ риманова пространства $\overline{V}_n(\overline{g}_{ij} = e^{2\sigma} g_{ij})$, построенным по тому же правилу следующим образом: $\overline{q}_i = q_i + 2p\partial_i\sigma$. Выясним, какие римановы пространства допускают такие векторные поля.

Заметим, что в римановом пространстве $V_n(g_{ij})$, допускающем существование тензорного поля a_{ij} (поля конусов 2-го порядка [9]), ковариантная производная которого удовлетворяет условию

$$\nabla_{(k} a_{ij)} = M_{(k} a_{ij)} + R_{(k} g_{ij)} \tag{4}$$

(скобки обозначают симметрирование по индексам, содержащимся в них) с некоторыми векторными полями M_k и R_k, вектор M_k является нормализатором. Справедливость этого факта проверяется непосредственно: в $\overline{V}_n(\overline{g}_{ij} = e^{2\sigma} g_{ij})$ тензорное поле a_{ij} подчиняется условию $\overline{\nabla}_{(k} a_{ij)} = \overline{M}_{(k} a_{ij)} + \overline{R}_{(k} \overline{g}_{ij)}$ при $\overline{R}_k = e^{-2\sigma} R_k + 2\partial_i \sigma \overline{g}^{ij} a_{jk}$, $\overline{M}_k = M_k - 2\partial_k \sigma$ ($\overline{\nabla}_k$ — символ ковариантного дифференцирования в $\overline{V}_n$).

3. Разложимые римановы пространства и конформный вектор

Выясним, как связан нормализатор M_k тензорного поля (4) с метрическим тензором риманова пространства некоторого специального вида.

Отметим прежде всего, что тензорное поле a_{ij} не вырождается ($|a_{ij}| \neq 0$) тогда и только тогда, когда все корни характеристического уравнения этого поля

$$|a_{ij} - \rho g_{ij}| = 0 \tag{5}$$

отличны от нуля.

Предположим далее, что это уравнение имеет N различных и отличных от нуля действительных корней ρ_α ($\alpha = \overline{1, N}$) кратностей n_α соответственно ($n_1 + n_2 + \cdots + n_N = n = \dim V_n$), обладающих следующими свойствами:

1) размерность векторного пространства B_α, образованного собственными векторами, соответствующими корню ρ_α, равна кратности этого корня ($\alpha = \overline{1, N}$),
2) все подпространства B_α неизотропны,
3) поля этих подпространств голономны.

Следуя [9], тензорное поле a_{ij}, характеристическое уравнение (5) которого удовлетворяет перечисленным выше условиям, будем называть специальным.

Если координаты x^i в V_n выбраны так, что подпространства B_α ($\alpha = \overline{1, N}$) в каждой точке M из V_n совпадают с касательными подпространствами к проходящим через эту точку координатным многообразиям, то условия 1)–3), характеризующие специальное тензорное поле a_{ij} (4), эквивалентны [9] следующему представлению форм ds^2 и $a_{ij} dx^i dx^j$:

$$\begin{gathered} ds^2 = \sum_{\alpha=1}^{n} ds_\alpha^2, \quad ds_\alpha^2 = g_{i_\alpha j_\alpha} dx^{i_\alpha} dx^{j_\alpha}, \quad \det \| g_{i_\alpha j_\alpha} \| \neq 0, \quad \alpha = \overline{1, N}, \\ a_{ij} dx^i dx^j = \sum_{\alpha=1}^{N} \rho_\alpha ds_\alpha^2, \end{gathered} \tag{6}$$

$i_1, j_1, k_1, \ldots = \overline{1, n_1}$; $i_\alpha, j_\alpha, k_\alpha, \ldots = \sum\limits_{\beta=1}^{\alpha-1} n_\beta + 1, \ldots, \sum\limits_{\beta=1}^{\alpha} n_\beta$ при $\alpha > 1$.

Отступая от принятой терминологии ([10], с. 523), метрику (6) риманова пространства будем называть разложимой.

Заметим, что число различных корней уравнения (5) больше единицы, иначе при $N = 1$ $a_{ij} = \rho g_{ij}$, что исключено.

Расписав, считая $N > 1$, условие (4) во введенных координатах, получим

$$(\rho_\beta - \rho_\alpha)\partial_{k_\beta} g_{i_\alpha j_\alpha} = (\rho_\alpha M_{k_\beta} + R_{k_\beta} - \partial_{k_\beta}\rho_\alpha) g_{i_\alpha j_\alpha}, \quad \alpha \neq \beta,$$
$$\partial_{k_\alpha}\rho_\alpha = M_{k_\alpha}\rho_\alpha + R_{k_\alpha}, \quad \alpha = \overline{1, N},$$

откуда следует

$$(\rho_\beta - \rho_\alpha)\partial_{k_\beta} g_{i_\alpha j_\alpha} = [-M_{k_\beta}(\rho_\beta - \rho_\alpha) + \partial_{k_\beta}(\rho_\beta - \rho_\alpha)] g_{i_\alpha j_\alpha} \tag{7}$$
$$(\alpha, \beta = \overline{1, N}, \quad \alpha \neq \beta).$$

Эти уравнения являются основными для определения нормализатора M_k. Поскольку для любого α хотя бы одна из компонент $g_{i_\alpha j_\alpha}$ отлична от нуля (в противном случае метрика рассматриваемого пространства была бы вырождена), то из (7) выводим

$$M_{k_\beta} = \frac{1}{N-1} \sum_{\alpha \neq \beta}{}' [\partial_{k_\beta} \ln|\rho_\beta - \rho_\alpha| - \tfrac{1}{n_\alpha} g^{i_\alpha j_\alpha} \partial_{k_\beta} g_{i_\alpha j_\alpha}], \quad \beta = \overline{1, N}.$$

Здесь штрих у знака суммы означает, что суммирование идет по всем α от 1 до N, кроме α, равного β.

Найденный вектор M_k, являясь нормализатором, не будет, как легко видеть, конформным вектором, ибо в его строение входят функции ρ_α, не связанные непосредственно с метрическим тензором пространства. Однако, пользуясь им, можно построить и искомый конформный вектор веса 1. В разложимом римановом пространстве (6) он имеет вид

$$N_{k_\alpha} = \frac{1}{N-1} \sum_{\beta \neq \alpha}{}' \frac{1}{n_\beta} g^{i_\beta j_\beta} \partial_{k_\alpha} g_{i_\beta j_\beta}, \quad \alpha = \overline{1, N}.$$

Проверим, что построенный вектор является конформным вектором веса 1, а вектор $\omega_k = \frac{1}{2} N_k$ является решением уравнений (2b). В римановом пространстве с метрическим тензором $\overline{g}_{ij} = e^{2\sigma} g_{ij}$, конформном разложимому пространству (6), построим вектор

$$\overline{N}_{k_\alpha} = \frac{1}{N-1} \sum_{\beta \neq \alpha}{}' \frac{1}{n_\beta} \overline{g}^{i_\beta j_\beta} \partial_{k_\alpha} \overline{g}_{i_\beta j_\beta}, \quad \alpha = \overline{1, N}.$$

Поскольку $\overline{g}^{ij} = e^{-2\sigma} g^{ij}$, $\partial_{k_\alpha} \overline{g}_{i_\beta j_\beta} = \partial_{k_\alpha}(e^{2\sigma} g_{i_\beta j_\beta}) = 2\partial_{k_\alpha}\sigma e^{2\sigma} g_{i_\beta j_\beta} + e^{2\sigma}\partial_{k_\alpha} g_{i_\beta j_\beta}$, то $\overline{g}^{i_\beta j_\beta}\partial_{k_\alpha}\overline{g}_{i_\beta j_\beta} = 2\partial_{k_\alpha}\sigma n_\beta + g^{i_\beta j_\beta}\partial_{k_\alpha} g_{i_\beta j_\beta}$, следовательно, $\overline{N}_{k_\alpha} = \frac{1}{N-1}\sum_{\beta\neq\alpha}{}'(2\partial_{k_\alpha}\sigma n_\beta + g^{i_\beta j_\beta}\partial_{k_\alpha} g_{i_\beta j_\beta}) = 2\partial_{k_\alpha}\sigma + N_{k_\alpha}$, $\alpha = 1, N$, т. е. $\overline{N}_k = N_k + 2\partial_k\sigma$ и вектор N_k — конформный вектор веса 1.

Пусть далее риманова метрика (6) конформно-подвижна. Тогда для метрического тензора этой метрики выполняются условия (2a). Обозначив снова $\frac{1}{n}\overset{R}{\nabla}_k \xi^k$ через ϕ, подсчитаем производную Ли векторного поля N_k вдоль векторного поля ξ^k, определяющего конформное преобразование. Имеем

$$D_\xi N_k = \frac{1}{N-1} \sum_{\beta \neq \alpha}{}' \frac{1}{n_\beta} [D_\xi g^{i_\beta j_\beta} \partial_{k_\alpha} g_{i_\beta j_\beta} + g^{i_\beta j_\beta} D_\xi(\partial_{k_\alpha} g_{i_\beta j_\beta})].$$

Но $D_\xi g^{ij} = -2\phi g^{ij}$, а $\partial_{k_\alpha} g_{i_\beta j_\beta} = \Gamma^{m_\beta}_{k_\alpha i_\alpha} g_{m_\beta j_\beta} + \Gamma^{m_\beta}_{k_\alpha j_\beta} g_{m_\beta i_\beta}$, где Γ^i_{jk} — символы Кристоффеля метрики (6), которые изменяются при конформном преобразовании (2a) метрики следующим образом ([5], гл. I, § 3, с. 16): $D_\xi \Gamma^i_{jk} = \delta^i_j \partial_k \phi + \delta^i_k \partial_j \phi - g_{jk} g^{im} \partial_m \phi$. Поэтому $D_\xi \partial_k g_{ij} = 2\partial_k(\phi g_{ij})$ и $D_\xi N_k = 2\partial_k \phi$. Очевидно, для векторного поля $\omega_k = \frac{1}{2} N_k$ имеем $D_\xi \omega_k = \partial_k \phi$, т. е. ω_k является решением уравнений (2b).

Замечание 1. Исследование уравнений (4) специального тензорного поля приводит к построению класса римановых пространств, уравнения геодезических линий которых допускают первый квадратичный интеграл (см. [11]). Задачей данной работы является построение конформного вектора веса 1/2 для некоторого класса римановых пространств. Проведенное выше исследование показывает, как это сделать.

4. Подвижные пространства Вейля

Отправляясь от разложимой метрики (6), построим пространство Вейля $W_n(g_{ij}, \omega_k)$, положив

$$g_{ij}dx^i dx^j = \sum_{\alpha=1}^{N} g_{i_\alpha j_\alpha} dx^{i_\alpha} dx^{j_\alpha}, \quad |g_{i_\alpha j_\alpha}| \neq 0, \tag{6a}$$

$$2\omega_{k_\alpha} = \frac{1}{N-1} \sum_{\beta\neq\alpha}{}' \frac{1}{n_\beta} g^{i_\beta j_\beta} \partial_{k_\alpha} g_{i_\beta j_\beta}, \quad \alpha = \overline{1, N}. \tag{8}$$

(Напомним, что коэффициенты связности пространства W_n имеют вид (3).)

Проверим, что конформная подвижность этого W_n влечет его аффинную подвижность. Если пространство Вейля с разложимым линейным элементом (6а) конформно-подвижно, то для него имеют место условия (1а), а для коэффициентов связности Γ^i_{jk} этого пространства выполняются равенства $D_\xi \Gamma^i_{jk} = \delta^i_j p_k + \delta^i_k p_j - g_{jk} g^{im} p_m$, где $p_k = D_\xi \omega_k - \partial_k \phi$. Но, как показано выше, для дополнительного вектора ω_k (8) построенного пространства Вейля $D_\xi \omega_k = \partial_k \phi$, поэтому $p_k = 0$ и, следовательно, $D_\xi \Gamma^i_{jk} = 0$.

Заметим, что, имея разложимый линейный элемент пространства Вейля (6а), можно группировать слагаемые в (6а) различным образом. Например, если разложение (6а) имеет вид

$$g_{ij}dx^i dx^j = g_{i_1 j_1} dx^{i_1} dx^{j_1} + g_{i_2 j_2} dx^{i_2} dx^{j_2} + g_{i_3 j_3} dx^{i_3} dx^{j_3},$$

то наряду с ним можно рассмотреть разложения

$$\begin{aligned}\check{g}_{ij}dx^i dx^j &= g_{i_1 j_1} dx^{i_1} dx^{j_1} + (g_{i_2 j_2} dx^{i_2} dx^{j_2} + g_{i_3 j_3} dx^{i_3} dx^{j_3}) = \\ &= g_{i_1 j_1} dx^{i_1} dx^{j_1} + g_{rs} dx^r dx^s, \quad r, s, \ldots = \overline{n_1 + 1, n},\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\tilde{g}_{ij}dx^i dx^j &= (g_{i_1 j_1} dx^{i_1} dx^{j_1} + g_{i_2 j_2} dx^{i_2} dx^{j_2}) + g_{i_3 j_3} dx^{i_3} dx^{j_3} = \\ &= g_{ab} dx^a dx^b + g_{i_3 j_3} dx^{i_3} dx^{j_3}, \quad a, b, \ldots = \overline{1, n_1 + n_2}.\end{aligned}$$

Для каждого из этих разложений по правилу (8) можно построить соответствующий дополнительный вектор:

$$2\omega_{k_\alpha} = \frac{1}{2} \sum_{\beta\neq\alpha}{}' \frac{1}{n_\beta} g^{i_\beta j_\beta} \partial_{k_\alpha} g_{i_\beta j_\beta}, \quad \alpha = \overline{1, 3};$$

$$\begin{cases} 2\check{\omega}_{k_1} = \frac{1}{n_2+n_3}(g^{i_2 j_2} \partial_{k_1} g_{i_2 j_2} + g^{i_3 j_3} \partial_{k_1} g_{i_3 j_3}), \\ 2\check{\omega}_r = \frac{1}{n_1} g^{i_1 j_1} \partial_r g_{i_1 j_1}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\tilde{\omega}_a = \frac{1}{n_3} g^{i_3 j_3} \partial_a g_{i_3 j_3}, \\ 2\tilde{\omega}_{k_3} = \frac{1}{n_1+n_2}(g^{i_1 j_1} \partial_{k_3} g_{i_1 j_1} + g^{i_2 j_2} \partial_{k_3} g_{i_2 j_2}). \end{cases}$$

Ясно, что все построенные векторы являются конформными векторами веса 1/2, поэтому подвижность пространств Вейля $W_n(g_{ij}\omega_k)$, $\check{W}_n(\check{g}_{ij}, \check{\omega}_k)$, $\widetilde{W}_n(\tilde{g}_{ij}, \tilde{\omega}_k)$, конформных друг другу, является следствием их аффинной подвижности.

Возникает естественный вопрос: связаны ли между собой дополнительные векторы построенных пространств и, если связаны, то как?

Итак, пусть некоторая группа преобразований, порожденная векторным полем $\xi^i(x^j)$, является группой движений двух конформных друг другу пространств Вейля $W_n(g_{ij}, \omega_k)$ и $\overline{W}_n(\overline{g}_{ij}, \overline{\omega}_k)$ с вектором конформного соответствия $p_k = \overline{\omega}_k - \omega_k$ (не уменьшая общности, можно считать, что

$\overline{g}_{ij} = g_{ij}$). Тогда основные тензоры и дополнительные векторы рассматриваемых пространств удовлетворяют соотношениям (1a) и (1b). При этом из (1b) вытекает

$$D_\xi p_k = 0. \tag{9}$$

Понятно, что последнее условие является достаточным для того, чтобы некоторая группа преобразований, задающая движение в $W_n(g_{ij}, \omega_k)$, определяла движение в конформном ему пространстве Вейля $\overline{W}_n(g_{ij}, \omega_k + p_k)$.

Итак, дополнительный вектор подвижного пространства Вейля с разложимым линейным элементом (6a) имеет следующее строение: $\omega_k = \overset{\circ}{\omega}_k + p_k$, где $\overset{\circ}{\omega}_k$ определяется по правилу (8), а p_k является решением уравнений (9).

Замечание 2. Решением уравнений (9) в подвижном пространстве Вейля является поле градиента любого скалярного инварианта ψ группы, ибо при $D_\xi \psi = 0$ в силу перестановочности операторов ковариантного дифференцирования и дифференцирования Ли для аффинных преобразований пространства ([5], с. 16) $D_\xi(\partial_k \psi) = D_\xi(\nabla_k \psi) = \nabla_k D_\xi \psi = 0$. Таким инвариантом является, например, дивергенция $\nabla_k \xi^k$ векторного поля $\xi^i(x^j)$, порождающего данную группу [3]. Однако вопрос о том, исчерпывают ли эти градиенты решения уравнений (9), остается открытым.

Замечание 3. Поскольку нас интересуют только неградиентные решения уравнений (2b), то в (2a) $\partial_i \phi \neq 0$ хотя бы для одной координаты x^i [8].

Литература

1. Eisenhart L.P. *Non-Riemannian geometry.* – Amer. Math. Soc. Coll. Publ., VIII, 1927. – 184 p.
2. Levine J. *Collineations in Weyl spaces of two dimensions* // Proc. Amer. Math. Soc., Ser. 2. – 1951. – V. 2. – № 2. – P. 264–269.
3. Miron R. *Mouvements conformes dans les espaces W_n et N_n* // Tensor. – 1968. – V. 19. – № 1. – P. 33–41.
4. Яфаров Ш.А. *Инвариантный признак подвижных поверхностей Вейля W_2* // Сб. аспирантских работ. Математика. Механика. Физика. Бионика. – Казань, 1966. – С. 65–70.
5. Yano K. *The theory of Lie derivatives and its applications.* – Amsterdam: North-Holland, 1957. – 299 p.
6. Германов О.С. *О движениях в пространстве Вейля* // Тр. геометрич. семин. – Казань, 1976. – Вып. 9. – С. 26–31.
7. Норден А.П. *Пространства аффинной связности.* – 2-е изд. – М.: Наука, 1976. – 432 с.
8. Defrise-Carter L. *Conformal groups and conformally equivalent isometry groups* // Commun. math. phys. – 1975. – Bd. 40. – S. 273–282.
9. Шапиро Я.Л. *Об одном классе римановых пространств* // Тр. семин. по векторн. и тензорн. анализу с их прилож. к геом., механ. и физ. – М., 1963. – Вып. 12. – С. 203–212.
10. Фавар Ж. *Курс локальной дифференциальной геометрии.* – М.: Ин. лит., 1960. – 559 с.
11. Германов О.С. *Поля конусов 2-го порядка и порождаемые ими связности.* III. *Первые интегралы геодезических* // Изв. вузов. Математика. – 1996. – № 8. – С. 25–32.

Нижегородский государственный педагогический университет

Поступили
первый вариант 10.01.1997
окончательный вариант 07.07.1997