ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 7 (446)

УДК 512.532

В.Н. САЛИЙ

КВАЗИБУЛЕВЫ СТЕПЕНИ ПОЛУРЕШЕТОК

Известно [1], что среди полугрупповых многообразий лишь многообразие полугрупп с нулевым умножением обладает свойством замкнутости относительно квазибулевых степеней. В [2] была найдена система аксиом для универсального класса группоидов, порожденного квазибулевыми степенями левосингулярных полугрупп (полугрупп левых нулей). Из соображений двойственности получается характеризация универсального замыкания класса квазибулевых степеней правосингулярных полугрупп (полугрупп правых нулей). В данной статье описывается класс группоидов, вложимых в квазибулевы степени полурешеток, чем завершается рассмотрение в этом аспекте минимальных негрупповых многообразий полугрупп.

Пусть L — полная решетка. Под ортогональными системами в ней понимаются такие подмножества $\{l_i \mid i \in I\}$, что $l_i \wedge l_j = 0$ при $i \neq j$ и $\bigvee\limits_{i\in I} l_i = 1$. Ортогональная система $\{l_i \mid i \in I\}$ по определению независима, если $\bigvee\limits_{j\in J} l_j \wedge \bigvee\limits_{k\in K} l_k = 0$ для любого разбиения $I = J \cup K$, $J \cap K = \emptyset$. Полная решетка с дополнениями называется квазибулевой, если в ней все ортогональные системы независимы. В частности, квазибулевыми являются все полные булевы решетки. Полная решетка с дополнениями тогда и только тогда будет квазибулевой, когда она допускает $\wedge$-гомоморфизм на полную булеву решетку, который сохраняет точные верхние грани ортогональных систем и при котором единственным прообразом нуля является нуль и единственным прообразом единицы — единица ([3], с. 271). Такой $\wedge$-гомоморфизм называется каноническим.

Пусть $(S,\cdot)$ — полурешетка и L — квазибулева решетка. Конструкция L-степени $S[L]$ полурешетки S определяется следующим образом. Это группоид, элементами которого являются всевозможные отображения $\nu : S \to L$ с множеством значений $\{\nu(s) \mid s \in S\}$, представляющим собой ортогональную систему в L, а умножение определяется формулой

$$(\mu\nu)(s) = \bigvee_{s=xy} (\mu(x) \wedge \nu(y)) \tag{1}$$

для любых $\mu, \nu \in S[L]$, $s \in S$.

Когда L пробегает класс всех квазибулевых решеток, получаем квазибулевы степени полурешетки S. Среди них находятся и все ее булевы степени, если ограничиться только полными булевыми решетками L.

Булевы степени полурешетки являются полурешетками, т. к. булевы степени алгебры сохраняют ее эквациональную теорию [4]. Через $\mathcal{U}$ обозначим наследственный класс группоидов, порожденный квазибулевыми степенями полурешеток. Приведем пример неассоциативного группоида из класса $\mathcal{U}$, более простой, чем в [1]. Возьмем восьмиэлементную булеву решетку L^* с атомами a, b, c, дуальными атомами $A = a'$, $B = b'$, $C = c'$, наименьшим элементом 0 и наибольшим 1. "Расщепим" элементы a, b, A, C, заменив их двухэлементными цепями соответственно $a_0 < a_1$, $b_0 < b_1$, $A_0 < A_1$, $C_0 < C_1$. В полученном множестве L определим следующие покрытия: элемент 1 непосредственно следует за каждым из элементов A_1, B, C_1; каждый из элементов a_0, b_0, c является покрытием для 0; далее, $a_0 < C_0$, $b_0 < A_0$, $b_0 < C_0$, $c < A_0$, $c < B$, $a_1 < B$, $a_1 < C_1$, $b_1 < A_1$, $b_1 < C_1$. Построенная диаграмма изображает квазибулеву решетку L, канонический $\wedge$-гомоморфизм которой на L^* получается отождествлением элементов, обратных вышеуказанному расщеплению. Пусть $S = \{0, 1\}$ — двухэлементная полурешетка. В квазибулевой степени $S[L]$ элементы $\mu_0 = (C_0, c)$, $\mu_1 = (C_1, c)$, $\nu_0 = (a_0, A_0)$, $\nu_1 = (a_1, A_0)$, $\nu_2 = (a_0, A_1)$ образуют подгруппоид G_0 (отображение $\alpha : S \to L$ записывается в виде вектора $(\alpha(0), \alpha(1))$). Умножение в нем идемпотентно, коммутативно и дает следующие соотношения: $\mu_0\{\mu_1, \nu_0, \nu_1, \nu_2\} = \mu_0 = \mu_1\nu_0$, $\mu_1\{\nu_1, \nu_2\} = \mu_1$, $\nu_0\{\nu_1, \nu_2\} = \nu_0 = \nu_1\nu_2$. При этом $\mu_1(\nu_1\nu_2) = \mu_1\nu_0 = \mu_0 \neq \mu_1 = \mu_1\nu_2 = (\mu_1\nu_1)\nu_2$. Напомним, что в $S[L]$ произведения вычисляются по формуле (1), а именно, $(\alpha\beta)(0) = (\alpha(0) \wedge \beta(0)) \vee (\alpha(0) \wedge \beta(1)) \vee (\alpha(1) \wedge \beta(0))$, $(\alpha\beta)(1) = \alpha(1) \wedge \beta(1)$.

Следующая теорема дает описание группоидов класса $\mathcal{U}$, т. е. группоидов, вложимых в квазибулевы степени полурешеток.

Теорема. *Группоид G тогда и только тогда допускает вложение в квазибулеву степень некоторой полурешетки, когда выполняются условия*

I. *в G истинны тождества $xx = x$, $xy = yx$, $x(xy) = xy$;*

II. *на G существует конгруэнция θ, все классы которой — полурешетки и фактор-группоид G/θ — также полурешетка;*

III. *отношение $\omega = \{(\alpha, \beta) \in G \times G \mid (\alpha, \beta) \in \theta \,\&\, \alpha\beta = \alpha\}$ представляет собой стабильный порядок на G.*

Доказательство. Необходимость. Пусть S — полурешетка, L — квазибулева решетка и группоид G является подгруппоидом квазибулевой степени $S[L]$. Идемпотентность и коммутативность умножения в $S[L]$ очевидны (идемпотентность, конечно, следует из II и включена в I для большей ясности). Покажем, что $\mu(\mu\nu) = \mu\nu$ для любых $\mu, \nu \in S[L]$. Для произвольного $s \in S$ имеем

$$(\mu(\mu\nu))(s) = \bigvee_{s=uv} (\mu(u) \wedge (\mu\nu)(v)) = \bigvee_{s=us} (\mu(u) \wedge (\mu\nu)(s)) \vee \bigvee_{s=uv, v\neq s} \Big(\mu(u) \wedge \bigvee_{v=xy} (\mu(x) \wedge \nu(y))\Big) =$$

[среди элементов x нет u, иначе $v = uy$, $s = uv = u \cdot uy = uy = v$, что невозможно; но тогда в силу независимости ортогональных систем в L получаем равенство $\mu(u) \wedge \bigvee_{v=xy} (\mu(x) \wedge \nu(y)) = 0$]

$$= \bigvee_{s=us} (\mu(u) \wedge (\mu\nu)(s)) \leqslant (\mu\nu)(s),$$

т. е. $(\mu(\mu\nu))(s) \leqslant (\mu\nu)(s)$. С другой стороны,

$$(\mu(\mu\nu))(s) = \bigvee_{s=us} \Big(\mu(u) \wedge \bigvee_{s=xy} (\mu(x) \wedge \nu(y))\Big) \geqslant$$

$$\geqslant \bigvee_{s=us} \Big(\bigvee_{s=uy} (\mu(u) \wedge \nu(y)) \wedge (\bigvee_{s=uy} (\mu(u) \wedge \nu(y)) \vee \bigvee_{s=xy, x\neq u} (\mu(x) \wedge \nu(y)))\Big) =$$

$$= \bigvee_{s=us} \bigvee_{s=uy} (\mu(u) \wedge \nu(y)) = \bigvee_{s=uy} (\mu(u) \wedge \nu(y)) = (\mu\nu)(s),$$

т. е. $(\mu(\mu\nu))(s) \geqslant (\mu\nu)(s)$. Следовательно, $\mu(\mu\nu) = \mu\nu$, и значит, в G истинно тождество $x(xy) = xy$.

В [5] было показано, что отношение $\theta_0 \subseteq S[L] \times S[L]$, определяемое условием $(\mu, \nu) \in \theta_0 \iff (\forall a, b \in S,\ a \neq b)(\mu(a) \wedge \nu(b) = 0)$, является конгруэнцией на квазибулевой степени $S[L]$, причем все θ_0-классы оказываются полурешетками, как и фактор-группоид $S[L]/\theta_0$. Ограничение θ конгруэнции θ_0 на группоиде G будет конгруэнцией на G, удовлетворяющей условиям II.

Если $(\mu, \nu) \in \theta_0$ и $\mu\nu = \mu$, то, поскольку в θ_0-классах $\mu\nu = \mu \wedge \nu$, получаем $\mu(s) \leqslant \nu(s)$ для любого $s \in S$. Следовательно, отношение ω на G будет порядком, стабильным относительно умножения (1).

Достаточность. Пусть группоид G удовлетворяет условиям теоремы. Присоединим к нему единицу e и нуль o и продолжим конгруэнцию θ из II на множество $G \cup \{o, e\}$, полагая $\theta(o) = \{o\}$,

$\theta(e) = \{e\}$. Фактор-группоид $(G \cup \{o, e\})/\theta$ обозначим через S. Это полурешетка с наибольшим элементом $\{e\}$ и наименьшим $\{o\}$.

Пусть $L^* = P(S)$ — булева решетка всех подмножеств множества S. Построим вложение полурешетки S в булеву степень $S[L^*]$. Для элементов $a, b \in S$ положим $(b : a) = \{x \in S \mid ax = b\}$. Каждому $a \in S$ сопоставим отображение $\nu_a : S \to L^*$ такое, что $\nu_a(s) = (s : a)$ для любого $s \in S$. Очевидно, при $b \neq c$ будет $\nu_a(b) \wedge \nu_a(c) = \emptyset$ и $\bigcup\limits_{s \in S} \nu_a(s) = \bigcup\limits_{s \in S} (s : a) = S$, т. е. $\nu_a \in S[L^*]$.

Лемма 1. $\bigcup\limits_{s=uv} ((u : a) \cap (v : b)) = (s : ab)$.

Доказательство. Так как

$$x \in \bigcup_{s=uv} ((u : a) \cap (v : b)) \Rightarrow (\exists u, v \in S)(s = uv \,\&\, ax = u \,\&\, bx = v) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\exists u, v \in S)(s = uv \,\&\, (ab)x = ax \cdot bx = uv) \Rightarrow x \in (s : ab),$$

то $\bigcup\limits_{s=uv} ((u : a) \wedge (v : b)) \subseteq (s : ab)$. С другой стороны,

$$x \in (s : ab) \Rightarrow (ab)x = s \Rightarrow ax \cdot bx = s \Rightarrow (\exists u, v \in S)(s = uv \,\&\, ax = u \,\&\, bx = v) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x \in \bigcup_{s=uv} ((u : a) \cap (v : b)),$$

и, значит, $(s : ab) \subseteq \bigcup\limits_{s=uv} ((u : a) \cap (v : b))$. Полученные включения дают требуемое равенство. $\square$

Из леммы 1 следует, что соответствие $a \mapsto \nu_a$ является гомоморфизмом, т. е. $\nu_a \nu_b = \nu_{ab}$ для любых $a, b \in S$. Действительно,

$$(\nu_a \nu_b)(s) = \bigcup_{s=uv} (\nu_a(u) \cap \nu_b(v)) = \bigcup_{s=uv} ((u : a) \cap (v : b)) = (s : ab) = \nu_{ab}(s)$$

для любого $s \in S$.

Если $\nu_a = \nu_b$, то, в частности, $\nu_a(a) = \nu_b(a)$, откуда $a \in \nu_b(a)$, и, значит, $ab = a$, т. е. $a \leqslant b$. Аналогично, $\nu_a(b) = \nu_b(b)$ влечет $b \leqslant a$. Таким образом, соответствие $a \mapsto \nu_a$ является вложением полурешетки S в полурешетку $S[L]$.

Трансформацией этого представления и будет получено вложение группоида G в группоид $S[L]$, где L — квазибулева решетка, к построению которой мы сейчас переходим.

Через $M_{|S|}$ обозначим решетку высоты 2 с наименьшим элементом 0, наибольшим 1 и $|S|$ атомами, помеченными элементами полурешетки S. Под идеалами упорядоченного множества далее понимаются его минорантно насыщенные подмножества. Наименьший идеал, содержащий подмножество A, обозначается через $I(A)$. Для $\alpha_i, \alpha_j \in G$ вместо $(\alpha_i, \alpha_j) \in \omega$ будем писать $\alpha_i \leqslant \alpha_j$.

Заменим в $M_{|S|}$ элемент 0 решеткой $\mathrm{Id}(G \times G)$ идеалов упорядоченного множества $(G \times G, \leqslant)$. Пустой идеал обозначим символом 0. Заменим атом a решеткой $\mathrm{Id}(a)$ идеалов полурешетки a (согласно II все θ-классы являются полурешетками). Пустой идеал в $\mathrm{Id}(a)$ обозначим символом $\emptyset_a$. Пусть $\Lambda_e = \mathrm{Id}(G \times G) \cup \bigcup\limits_{a \in S} \mathrm{Id}(a) \cup \{1\}$. На множестве Λ_e, кроме порядковых связей, имеющихся в составляющих его решетках идеалов, введем новые. Будем считать, что 1) элемент 1 непосредственно следует за каждым из элементов $a \in S$ (здесь a рассматривается как наибольший элемент решетки $\mathrm{Id}(a)$); 2) элемент $\emptyset_a$ решетки $\mathrm{Id}(a)$ покрывает элемент 0 для каждого $a \in S$; 3) элемент $I \in \mathrm{Id}(a)$ непосредственно следует за элементом решетки $\mathrm{Id}(G \times G)$, имеющим вид $I(\{(\beta_k, \gamma_m) \in G \times G \mid \beta_k \in I$ или $\gamma_m \in I$ или $\beta_k \gamma_m \in I\})$. Транзитивное замыкание построенного отношения, состоящего из объединения порядков в решетках идеалов, образующих Λ_e, и дополнительных покрытий, упорядочивает множество Λ_e.

Покажем, что Λ_e с введенным порядком — полная решетка. Здесь необходимо рассмотреть два случая.

1) $I_1, I_2 \in \mathrm{Id}(a)$. Пара идеалов $\{I_1, I_2\}$ имеет в $\mathrm{Id}(a)$ наибольшую нижнюю грань $I_1 \cap I_2$. Но у этих идеалов есть общие нижние грани и в $\mathrm{Id}(G\times G)$. Наибольшей из них является пересечение идеалов $I(\{(\beta_k, \gamma_m) \in G \times G \mid \beta_k \in I_i$ или $\gamma \in I_i$ или $\beta_k\gamma_m \in I_i\})$, $i = 1, 2$. Но это пересечение содержится в идеале $I(\{(\beta_k, \gamma_m) \in G \times G \mid \beta_k \in I_1 \cap I_2$ или $\gamma_m \in I_1 \cap I_2$ или $\beta_k\gamma_m \in I_1 \cap I_2\})$, поскольку в полурешетке a, если $\alpha_i \in I_1$, $\alpha_j \in I_2$, то $\alpha_i\alpha_j \in I_1 \cap I_2$, и в силу тождества $x(xy) = xy$ выполняются все равенства типа $\beta_k(\beta_k\gamma_m) = \beta_k\gamma_m$. Следовательно, $I_1 \cap I_2 = \inf(I_1, I_2)$ в Λ_e.

2) $I_1, I_2 \in \mathrm{Id}(G \times G)$. Пара идеалов $\{I_1, I_2\}$ имеет в $\mathrm{Id}(G \times G)$ наименьшую верхнюю грань $I_1 \cup I_2$. Но у этих идеалов есть общие верхние грани и вне $\mathrm{Id}(G\times G)$. Наименьшей из них является объединение

$$\bigcup_{a\in S} \bigcup_{i=1}^{2} \Big(I(\mathrm{pr}_1 I_i \cap a) \cup I(\mathrm{pr}_2 I_i \cap a) \cup I(\{\beta_k\gamma_m \mid (\beta_k, \gamma_m) \in I_i\} \cap a) \Big),$$

где $\mathrm{pr}_1 I$ — множество первых элементов пар, входящих в состав I, а $\mathrm{pr}_2 I$ — множество их вторых элементов. Если финальное объединение (по элементам $a \in S$) содержит более одного члена, оно равно 1 и, значит, мажорирует $I_1 \cup I_2$. Предположим, что это не так, т. е. $\mathrm{pr}_1 I_i \subseteq a$, $\mathrm{pr}_2 I_i \subseteq a$, $\beta_k\gamma_m \in a$ для каждой пары $(\beta_k, \gamma_m) \in I_i$, $i = 1, 2$. В этом случае наименьшей верхней гранью для I_1, I_2 в $\mathrm{Id}(a)$ будет объединение $\mathrm{pr}_1(I_1 \cup I_2) \cup \mathrm{pr}_2(I_1 \cup I_2) \cup I(\{\beta_k\gamma_m) \mid (\beta_k, \gamma_m) \in I_1 \cup I_2\})$, которое мажорирует $I_1 \cup I_2$. Следовательно, $I_1 \cup I_2 = \sup(I_1, I_2)$ в Λ_e.

Лемма 2. *В решетке Λ_e элемент $I(\alpha_i) \wedge I(\beta_k)$, где $\alpha_i \in a = \theta(\alpha_i)$, $\beta_k \in b = \theta(\beta_k)$ и $s = ab$ в S, имеет одним из своих покрытий элемент $I(\alpha_i\beta_k) \in \mathrm{Id}(s)$.*

Доказательство. Действительно,

$$\begin{aligned} I(\alpha_i) \wedge I(\beta_k) = I(\{(\gamma_m, \delta_p) \in G \times G \mid \gamma_m = \alpha_i \ \text{ или } \ \delta_p = \alpha_i \ \text{ или } \ \gamma_m\delta_p \leqslant \alpha_i\}) \cap \\ \cap I(\{(\gamma_m, \delta_p) \in G \times G \mid \gamma_m = \beta_k \ \text{ или } \ \delta_p = \beta_k \ \text{ или } \ \gamma_m\delta_p \leqslant \beta_k\}) = \\ = I(\{(\gamma_m, \delta_p) \in G\times G \mid (\gamma_m, \delta_p) = (\alpha_i, \beta_k) \ \text{ или } \ (\gamma_m, \delta_p) = (\beta_k, \alpha_i) \ \text{ или } \ (\gamma_m\delta_p \leqslant \alpha_i \,\&\, \gamma_m\delta_p \leqslant \beta_k)\}). \end{aligned}$$

В силу идемпотентности и коммутативности умножения в G (условия I), а также стабильности порядка ω на G (условие III) получаем, что если $\gamma_m\delta_p \leqslant \alpha_i$ и $\gamma_m\delta_p \leqslant \beta_k$, то $\gamma_m\delta_p \leqslant \alpha_i\beta_k$. Следовательно, $I(\alpha_i) \wedge I(\beta_k) < I(\alpha_i\beta_k) \in \mathrm{Id}(s)$. Но т. к. $I(\alpha_i) \wedge I(\beta_k)$ содержит пару (α_i, β_k) (и пару (β_k, α_i)), то на самом деле $I(\alpha_i\beta_k)$ является покрытием для $I(\alpha_i) \wedge I(\beta_k)$. □

Пусть $A \subset S$, $A \neq \emptyset$. Решетка Λ_A получается из решетки Λ_e удалением всех компонент вида $\mathrm{Id}(a)$ для $a \notin A^\nabla$, где $A^\nabla = \{s \in S \mid (\forall a \in A)(s \leqslant a)\}$. Очевидно, при $A \subseteq B$ решетка Λ_B будет подрешеткой в Λ_A. Лемма 2, конечно, остается справедливой и для решетки Λ_A, если положить $a, b \in A^\nabla$.

Решетка L получается из булевой решетки $L^* = P(S)$ следующим путем. Каждый элемент $A \subset S$, $A \neq \emptyset$, решетки L^* заменяется решеткой Λ_A. В полученном множестве $L = \bigcup\limits_A \Lambda_A \cup \{\emptyset, S\}$, кроме порядковых связей, имеющихся в компонентах Λ_A, введем новые. Будем считать, что 1) элемент S непосредственно следует за каждым из элементов $1_{S\setminus\{a\}}$, $a \in S$, где $1_{S\setminus\{a\}}$ — наибольший элемент решетки $\Lambda_{S\setminus\{a\}}$, вставленной в L^* на место элемента $S\setminus\{a\}$; 2) элемент $\emptyset$ покрывается каждым из элементов $0_{\{a\}}$, $a \in S$, где $0_{\{a\}}$ — наименьший элемент решетки $\Lambda_{\{a\}}$; 3) если $A \subset B$, то каждый элемент подрешетки $\mathrm{Id}(s)$ решетки Λ_B, вставленной в L^* на место B, мажорирует одноименный элемент подрешетки $\mathrm{Id}(s)$ решетки Λ_A, вставленной в L^* на место A; 4) если $A \subset B$, то наименьший элемент 0_B решетки Λ_B мажорирует наименьший элемент 0_A решетки Λ_A, а наибольший элемент 1_B решетки Λ_B мажорирует наибольший элемент 1_A решетки Λ_A.

Транзитивное замыкание построенного на L отношения, состоящего из объединения порядков в решетках Λ_A и введенных дополнительных связей, упорядочивает множество L, превращая его в полную решетку. Отождествляя элементы каждой решетки Λ_A, получаем канонический

$\wedge$-гомоморфизм φ решетки L на полную булеву решетку $L^* = P(S)$. Следовательно, L — квазибулева решетка.

Построим вложение группоида G в группоид $S[L]$. Для наглядности элемент l решетки Λ_A будем записывать в виде пары (l, A), отмечая в этих "координатах" сам элемент l решетки Λ_A и его образ A при каноническом $\wedge$-гомоморфизме $\varphi : L \to L^*$. Кроме того, под $(1, S) = (0, S)$ будем понимать наибольший элемент S решетки L, а под $(0, \emptyset)$ — наименьший элемент этой решетки.

Пусть $\alpha_i \in a = \theta(\alpha_i)$. Для $s \in S$ полагаем

$$\nu_{\alpha_i}(s) = \begin{cases} (I(\alpha_i), (a : a)), & \text{если} \quad s = a; \\ (0, (s : s)), & \text{если} \quad s \neq a. \end{cases}$$

При $s \neq t$ получаем $\varphi(\nu_{\alpha_i}(s) \wedge \nu_{\alpha_i}(t)) = (s : a) \cap (t : a) = \emptyset$, откуда $\nu_{\alpha_i}(s) \wedge \nu_{\alpha_i}(t) = (0, \emptyset)$, т. к. φ взаимно однозначно в нуле. Аналогично, $\varphi\Big(\bigvee\limits_{s\in S} \nu_{\alpha_i}(s)\Big) = \bigcup\limits_{s\in S}(s : a) = S$, откуда $\bigvee\limits_{s\in S} \nu_{\alpha_i}(s) = (1, S)$. Следовательно, $\nu_{\alpha_i} \in S[L]$.

Далее, если $\nu_{\alpha_i} = \nu_{\beta_k}$, то $a = \theta(\alpha_i) = \theta(\beta_k) = b$ и при этом $I(\alpha_i) = \nu_{\alpha_i}(a) = \nu_{\beta_k}(a) = I(\beta_k)$. Так что соответствие $\alpha_i \mapsto \nu_{\alpha_i}$ взаимно однозначно. Покажем, что оно является гомоморфизмом, т. е. $\nu_{\alpha_i}\nu_{\beta_k} = \nu_{\alpha_i\beta_k}$ для любых $\alpha_i, \beta_k \in G$.

1) Пусть $s \neq ab$. Так как $(l, A) \wedge (0, B) = (0, A \cap B)$ в L для любых $A, B \subseteq S$, то

$$\begin{aligned}(\nu_{\alpha_i}\nu_{\beta_k})(s) = \bigvee\{\nu_{\alpha_i}(u) \wedge \nu_{\beta_k}(v) \mid s = uv\} = \bigvee\{(I(\alpha_i), (a : a)) \wedge (0, (v : b)) \mid s = av\} \vee \\ \vee \bigvee\{(0, (u : a)) \wedge (I(\beta_k), (b : b)) \mid s = ub\} \vee \\ \vee \bigvee\{(0, (u : a)) \wedge (0, (v : b)) \mid s = uv, \{u, v\} \cap \{a, b\} = \emptyset\} = \\ = \bigvee\{(0, (a : a) \cap (v : b)) \mid s = av\} \vee \\ \vee \bigvee\{(0, (u : a) \cap (b : b)) \mid s = ub\} \vee \bigvee\{(0, (u : a) \cap (v : b)) \mid s = uv, \{u, v\} \cap \{a, b\} = \emptyset\} = \\ = \Big(0, \bigcup_{s=uv}((u : a) \cap (v : b))\Big) = (0, (s : ab)),\end{aligned}$$

последнее равенство обеспечивается леммой 1.

Итак, $(\nu_{\alpha_i}\nu_{\beta_k})(s) = (0, (s : ab)) = \nu_{\alpha_i\beta_k}(s)$.

2) Пусть $s = ab$, $s \notin \{a, b\}$. Проведя выкладки, аналогичные действиям в предыдущем случае, получаем

$$\begin{aligned}(\nu_{\alpha_i}\nu_{\beta_k})(s) = \bigvee\{\nu_{\alpha_i}(u) \wedge \nu_{\beta_k}(v) \mid s = uv\} = \\ = ((I(\alpha_i), (a : a)) \wedge (I(\beta_k), (b : b))) \vee \bigvee\{(0, (u : a) \cap (v : b)) \mid s = uv, \{u, v\} \neq \{a, b\}\} = \\ = (I(\alpha_i) \wedge I(\beta_k), (a : a) \cap (b : b)) \vee \Big(0, \bigcup_{s=uv}((u : a) \cap (v : b))\Big) = \\ = (I(\alpha_i) \wedge I(\beta_k), (a : a) \cap (b : b)) \vee (0, (s : ab)).\end{aligned}$$

В последнем переходе использована лемма 1.

Так как $(a : a) \subseteq (ab : ab) = (s : ab)$ и $(b : b) \subseteq (s : ab)$, то $(\nu_{\alpha_i}\nu_{\beta_k})(s)$ имеет вид $(l, s : ab)$. Согласно конструкции порядка в L у элемента $(I(\alpha_i) \wedge I(\beta_k), (a : a) \cap (b : b))$ в $\Lambda_{(a:a)\cap(b:b)}$ имеются три покрытия: некоторый идеал I_1 — в составе подрешетки $\mathrm{Id}(a)$, некоторый идеал I_2 — в составе подрешетки $\mathrm{Id}(b)$ и по лемме 2 $I(\alpha_i\beta_k)$ — в составе подрешетки $\mathrm{Id}(ab)$. При этом $(I_i, (a : a) \cap (b : b)) \vee (0, (s : ab)) = (1, (s : ab))$, $i = 1, 2$, поскольку в решетке $\Lambda_{(s:ab)}$ нет подрешеток $\mathrm{Id}(a)$ и $\mathrm{Id}(b)$. В то же время, $(I(\alpha_i\beta_k), (a : a) \cap (b : b)) \vee (0, (s : ab)) = (I(\alpha_i\beta_k), (s : ab))$. Следовательно, $(\nu_{\alpha_i}\nu_{\beta_k})(s) = (I(\alpha_i) \wedge I(\beta_k), (a : a) \cap (b : b)) \vee (0, (s : ab)) = (I(\alpha_i\beta_k), (s : ab)) = \nu_{\alpha_i\beta_k}(s)$ (напомним, что $s = ab$).

3) Пусть $s = ab = a$. Так как $(b : b) \subseteq (a : a)$, то, действуя, как в предыдущем случае, получаем

$$(\nu_{\alpha_i}\nu_{\beta_k})(a) = (I(\alpha_i) \wedge I(\beta_k), (b : b)) \vee (0, (a : a)) \in \Lambda_{(a:a)}.$$

Согласно конструкции порядка в решетке L элемент $(I(\alpha_i) \wedge I(\beta_k), (b : b))$ имеет в $\Lambda_{(b:b)}$ два покрытия: некоторый идеал I в составе подрешетки $\mathrm{Id}(b)$ и по лемме 2 идеал $I(\alpha_i\beta_k)$ в составе подрешетки $\mathrm{Id}(a)$. При этом $(I, (b : b)) \vee (0, (a : a)) = (1, (a : a))$, поскольку в $\Lambda_{(a:a)}$ нет подрешетки $\mathrm{Id}(b)$. В то же время, $(I(\alpha_i\beta_k), (b : b)) \vee (0, (a : a)) = (I(\alpha_i\beta_k), (a : a))$. Так что $(\nu_{\alpha_i}\nu_{\beta_k})(s) = (I(\alpha_i\beta_k), (a : a)) = \nu_{\alpha_i\beta_k}(a)$ (напомним, что $s = a$).

4) Наконец, если $\alpha_i, \alpha_j \in a$ и $s = a$, то

$$(\nu_{\alpha_i}\nu_{\alpha_j})(a) = (I(\alpha_i, (a : a)) \wedge (I(\alpha_j), (a : a)) = (I(\alpha_i) \cap I(\alpha_j), (a : a)) = (I(\alpha_i\alpha_j), (a : a)) = \nu_{\alpha_i\alpha_j}(a),$$

а при $s \neq a$, очевидно, $(\nu_{\alpha_i}\nu_{\alpha_j})(s) = (0, (s : a)) = \nu_{\alpha_i\alpha_j}(s)$.

Итак, всегда $\nu_{\alpha_i}\nu_{\beta_k} = \nu_{\alpha_i\beta_k}$ — искомое вложение группоида G в квазибулеву степень $S[L]$ построено. Этим завершено доказательство теоремы.

Пусть $\mathcal{K}$ — некоторый класс алгебр, $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — его подклассы. Мальцевским $\mathcal{K}$-произведением классов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ называется класс $\mathcal{A} \circ_{\mathcal{K}} \mathcal{B}$, состоящий из всех $\mathcal{K}$-алгебр A, на которых существует конгруэнция θ такая, что каждый ее класс, являющийся $\mathcal{K}$-алгеброй, принадлежит $\mathcal{A}$, а фактор-алгебра A/θ принадлежит $\mathcal{B}$ [6]. Таким образом, условие II в теореме означает, что группоид G, о котором идет речь, должен принадлежать мальцевскому квадрату $\mathcal{S} \circ_{\mathcal{I}} \mathcal{S}$, где $\mathcal{I}$ — многообразие всех идемпотентных коммутативных группоидов, а $\mathcal{S}$ — многообразие полурешеток. Из теоремы 3 в [5] следует, что, вообще, если $\mathcal{G}$ — многообразие всех группоидов, то для любого многообразия полугрупп $\mathcal{V}$ квазибулевы степени всех $\mathcal{V}$-полугрупп принадлежат произведению $\mathcal{S} \circ_{\mathcal{G}} \mathcal{V}$. При этом для $\mathcal{V}$-полугруппы A и квазибулевой решетки L мальцевской конгруэнцией на квазибулевой степени $A[L]$ будет уже упоминавшаяся в доказательстве необходимости конгруэнция θ_0. Если $\mathcal{V}$ — многообразие идемпотентных полугрупп, все θ_0-классы будут полурешетками, а порядок ω, определяемый в условии III, превращается в этом случае в естественный на $A[L]$ порядок $\mu \leqslant \nu \iff (\forall a \in A)(\mu(a) \leqslant \nu(a))$. Этот порядок очевидным образом стабилен относительно умножения в $A[L]$, определяемого формулой (1).

Проведенные рассуждения показывают, что система аксиом для класса группоидов G, вложимых в квазибулевы степени полугрупп идемпотентного многообразия $\mathcal{V}$, может быть составлена из условия типа II (“на группоиде G существует конгруэнция θ, все классы которой — полурешетки, а фактор-группоид G/θ — полугруппа из многообразия $\mathcal{V}$”), условия III и группы аксиом I, выражающей специфику многообразия $\mathcal{V}$ в рамках решаемой задачи. Выявление аксиом I и представляет основную трудность.

В случае сингулярных полугрупп мальцевская конгруэнция определяется однозначно. Она совпадает с θ_0 и выражается в терминах операции умножения $(\alpha, \beta) \in \theta_0 \iff \alpha\beta = \beta\alpha$, вследствие чего условия II и III допускают элементарную запись [2]. Для полурешеток это не так. Например, на уже рассматривавшемся группоиде G_0, кроме $\theta_0 = \{\mu_0, \mu_1\}, \{\nu_0, \nu_1, \nu_2\}$ (конгруэнции отождествляем с соответствующими разбиениями), условиям II и III удовлетворяют также конгруэнции $\theta' = \{\mu_0, \mu_1, \nu_0\}, \{\nu_1\}, \{\nu_2\}$ и $\theta_0 \cap \theta' = \{\mu_0, \mu_1\}, \{\nu_0\}, \{\nu_1\}, \{\nu_2\}$.

В [7] был приведен пример девятиэлементного группоида, принадлежащего квазимногообразию $\mathcal{S} \circ_{\mathcal{I}} \mathcal{S}$ и имеющего гомоморфный образ, лежащий вне $\mathcal{S} \circ_{\mathcal{I}} \mathcal{S}$. Нетрудно убедиться в том, что этот группоид содержится уже в классе $\mathcal{U} \subset \mathcal{S} \circ_{\mathcal{I}} \mathcal{S}$, описываемом условиями I–III теоремы. Следовательно, $\mathcal{U}$ не является гомоморфно замкнутым. Заметим, наконец, что полугрупповая часть класса $\mathcal{U}$ совпадает с многообразием S полурешеток.

Литература

1. Салий В.Н. *О квазибулевых степенях полугрупп* // Упорядочен. множества и решетки. – Саратов, 1991, вып. 10. – С. 104–108.

2. Салий В.Н. *Квазибулевы степени сингулярных полугрупп* // Изв. вузов. Математика. – 1994. – № 11. – С. 67–74.
3. *Общая алгебра.* Т. 2 / Под ред. Л.А. Скорнякова. – М.: Наука, 1991. – 480 с.
4. Пинус А.Г. *Булевы конструкции в универсальной алгебре* // УМН. – 1992. – Т. 47. – № 4. – С. 145–180.
5. Salii V.N. *Lattice extensions of algebras and Malcev products* // Tatra Mountains Math. Publ. – 1995. – V. 5. – P. 97–100.
6. Мальцев А.И. *Об умножении классов алгебраических систем* // Сиб. матем. журн. – 1967. – Т.8. – № 2. – С. 346–365.
7. Салий В.Н. *О мальцевском произведении многообразий: пример* // Упорядочен. множества и решетки. – Саратов, 1995, вып. 11. – С. 52–53.

Саратовский государственный университет

Поступила 28.03.1997