ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2006 МАТЕМАТИКА № 9 (532)

УДК 517.956

Е.А. УТКИНА

ОБ ОДНОМ УРАВНЕНИИ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Для метода каскадного интегрирования для уравнения

$$u_{xy} + au_x + bu_y + cu = 0 \tag{1}$$

введем обозначения

$$u_1 = u_y + au, \quad u_2 = u_x + bu, \tag{2}$$

в которых (1) можно записать в виде

$$u_{1x} + bu_1 - hu = 0, \quad u_{2y} + au_2 - ku = 0, \tag{3}$$

где $h = a_x + ab - c$, $k = b_y + ab - c$. Если хотя бы одна из величин h, k равна нулю, то u_1 (или u_2) из (3) записываются в квадратурах, что позволяет определить u из (2). В случае, когда $hk \neq 0$, из (1) и (3) можно исключить $u(x, y)$ и перейти к новым уравнениям вида (1) относительно новой неизвестной функции. К двум полученным уравнениям применяется изложенная схема. Может оказаться на некотором шаге указанного процесса, что h или k для новых уравнений равно нулю. Это будет означать, что и исходное уравнение имеет решение, записываемое в квадратурах.

Кроме того, для частного случая уравнения (1), известного как уравнение Эйлера–Пуассона–Дарбу,

$$u_{xy} - \frac{\beta'}{x-y}u_x + \frac{\beta}{x-y}u_y = 0, \tag{4}$$

в ([1], с. 181) строится решение в квадратурах.

В данной работе метод каскадного интегрирования применяется к уравнению

$$u_{xxy} + au_{xx} + bu_{xy} + cu_x + du_y + eu = 0, \tag{5}$$

частный случай которого встречается при изучении процесса поглощения влаги корнями растений (уравнение Аллера ([2], с. 261; см. также [3])).

Используем обозначения (2). При этом существенную роль играют конструкции

$$h_{10} = 2a_x + ab - c, \quad h_{01} = b_x - d, \quad h_{00} = a_{xx} + (ab)_x - e, \quad k_{10} = b_y + a_x + ab - c, \quad k_{00} = b_{xy} + (ab)_x - e.$$

То есть если имеет место хотя бы одна из групп тождеств

$$h_{10} \equiv h_{01} \equiv h_{00} \equiv 0, \tag{6_1}$$

$$k_{10} \equiv h_{01} \equiv k_{00} \equiv 0, \tag{6_2}$$

то (5) разрешимо в квадратурах. При этом в случае выполнения (6_1) решение представляется формулой

$$u = e^{-\int a(x,y)dy}\left[\int e^{-\int b(x,y)dx}\left\{C_1(y)\int e^{b(x,y)dx}dx + C_2(y)\right\}e^{\int a(x,y)dy}dy + C_3(x)\right].$$

Работа поддержана фондом НИОКР АН РТ (проект 05-5.1-289/2004(Ф)).

Пусть вместо (6_1) выполняются соотношения $h_{10} \equiv h_{01} \equiv 0$, $h_{00} \neq 0$. Тогда (5) преобразуется к виду $u_{1xxy} + a^{(1)} u_{1xx} + b^{(1)} u_{1xy} + c^{(1)} u_{1x} + d^{(1)} u_{1y} + e^{(1)} u_1 = 0$, где $a^{(1)} = a - (\ln h_{00})_y$, $b^{(1)} = b$, $c^{(1)} = b_y + ba^{(1)}$, $d^{(1)} = b_x$, $e^{(1)} = b_{xy} + b_x a^{(1)} - h_{00}$.

В случае, когда вместо (6_2) выполняются соотношения $k_{10} \equiv h_{01} \equiv 0$, $k_{00} \neq 0$, уравнение (5) преобразуется к уравнению того же вида при $a^{(1)} = a$, $b^{(1)} = b - (\ln k_{00})_x$, $c^{(1)} = 2a_x + b^{(1)} a$, $d^{(1)} = 0$, $e^{(1)} = a_{xx} + a_x b^{(1)} - k_{00}$.

Пусть хотя бы одно из полученных уравнений решается в квадратурах, тогда и исходное уравнение имеет явное решение. В противном случае процесс может быть продолжен.

Рассмотрим теперь уравнения, являющиеся аналогами (4) в том смысле, что к ним будем применять указанный метод решения:

$$L(u) \equiv u_{xxy} - \frac{\beta}{x-y} u_{xx} + \frac{\beta'}{x-y} u_{xy} + \frac{\beta(2-\beta')}{(x-y)^2} u_x - \frac{\beta'}{(x-y)^2} u_y = 0, \tag{7_1}$$

$$u_{xxy} - \frac{\beta}{x-y} u_{xx} + \frac{\beta'}{x-y} u_{xy} + \frac{\beta + \beta'(1-\beta')}{(x-y)^2} u_x - \frac{\beta'}{(x-y)^2} u_y = 0. \tag{7_2}$$

Здесь $h_{00} = \frac{2\beta(\beta'-1)}{(x-y)^3}$, $k_{00} = \frac{2\beta'(\beta-1)}{(x-y)^3}$. Таким образом, очевидно, если $\beta = 0$ или $\beta' = 1$ либо $\beta' = 0$ или $\beta = 1$, то (7) разрешимы в квадратурах. Пусть, например, $\beta' = 1$. Тогда

$$u = (x-y)^{\beta} \left[\int \frac{1}{x-y} \left(C_1(y) \left(\frac{x^2}{2} - xy \right) + C_2(y) \right) (x-y)^{-\beta} dy + C_3(x) \right]. \tag{8}$$

Рассмотрим подробнее (7_1). Пусть $h_{00} \neq 0$. Непосредственные вычисления показывают

$$h_{00}^{(1)} = h_{00} + \frac{2\beta' - 2(\beta+3) + \beta'(\beta+3)}{(x-y)^3}.$$

Понятно, что в случае равенства $h_{00}^{(1)}$ нулю получаем решение уравнения (7_1) в квадратурах. Продолжение процесса позволяет построить цепочку уравнений вида (7_1), для которых $h_{00}^{(n)}$ определяется с помощью рекуррентного соотношения

$$h_{00}^{(n)} - h_{00}^{(n-1)} = \frac{2\beta' - 2(\beta+3n) + \beta'(\beta+3n)}{(x-y)^3}.$$

Для уравнения (7_2) соотношение имеет вид

$$k_{00}^{(n)} - k_{00}^{(n-1)} = \frac{2\beta - 2(\beta+3n) + \beta'(\beta+3n)}{(x-y)^3}.$$

Если $k_{00}^{(n)} = 0$ (или $h_{00}^{(n)} = 0$) при некотором n , то исходное уравнение разрешимо в квадратурах. Так, если $n = 2$, то β и β' связаны соотношением $4\beta'\beta - 6\beta + 13\beta' = 18$, получаемым из формулы для $h_{00}^{(2)}$. Оно имеет нетривиальные решения, например, $\beta' = 0$, $\beta = -3$.

Рассмотрим для (7_1) *задачу Гурса*. Пусть D — треугольная область, ограниченная характеристиками $x = 0$, $y = a$ и прямой $x = y$. Найдем решение $u \in C^{2,1}(\overline{D})$, удовлетворяющее условиям

$$u(0,y) = \varphi(y), \quad u_x(0,y) = \varphi_1(y), \quad u(x,a) = \psi(x), \tag{9}$$

$\varphi, \varphi_1 \in C^1(p)$, $\psi \in C^2(p)$, $p = [0,a]$. В точке $(0,a)$ предполагаем условие согласования $\varphi(a) = \psi(0)$.

Перейдем от уравнения (7_1) к

$$(x-y)^2 u_{xxy} - \beta(x-y) u_{xx} + \beta'(x-y) u_{xy} + \beta(2-\beta') u_x - \beta' u_y = 0. \tag{10}$$

Рассуждение для вырождающегося уравнения (10) проведем по той же схеме, что и в варианте метода Римана из [4], [5]. То есть введем функцию Римана $R(x,y,\xi,\eta)$ как решение интегрального уравнения

$$(x-y)^2 V(x,y) + \int_\eta^y \beta(x-\tau) V(x,\tau)\,d\tau - \int_\xi^x \beta'[(t-y)+(x-t)] V(t,y)\,dt + \\ + \int_\xi^x \int_\eta^y \beta(2-\beta') V(t,\tau)\,d\tau\,dt = 1, \quad (11)$$

которое существует и единственно ([6], § 30). Продифференцировав его, получим дифференциальное уравнение для V

$$\left((x-y)^2 V\right)_{xxy} + \left(\beta(x-y)V\right)_{xx} - \left(\beta'(x-y)V\right)_{xy} + \left(\beta(2-\beta')V\right)_x - \left(\beta' V\right)_y = 0.$$

Обозначим

$$M = \left((x-y)^2 R\right)_x - (x-y)\beta' R, \quad N = \left((x-y)^2 R\right)_y + (x-y)\beta R,$$
$$P = \left((x-y)^2 R\right)_{xy} + \left(\beta(x-y)R\right)_x - \left(\beta'(x-y)R\right)_y + \beta(2-\beta')R,$$
$$Q = \left((x-y)^2 R\right)_{xx} - \left(\beta'(x-y)R\right)_x - \beta' R,$$

где у R и ее производных аргументами являются (x,y,ξ,η). Из (11) легко усматривается, что

$$M(x,y,x,y) \equiv P(x,y,x,y) \equiv Q(x,y,x,y) \equiv 0,$$
$$N(x,y,x,\eta) \equiv P(x,y,x,\eta) \equiv Q(x,y,\xi,y) \equiv 0.$$

Тогда с учетом введенных обозначений для любой функции u из класса $C^{2,1}(D) \cap C^{1,0}(D \cup p) \cap C^{0,0}(D \cup p)$ имеет место непосредственно проверяемое тождество

$$\left(u(x-y)^2 R\right)_{xxy} \equiv RL(u)(x-y)^2 + [uM]_{xy} + [uN]_{xx} - [uP]_x - [uQ]_y + \\ + \left\{u_y\left((x-y)^2 R\right)_x - u\left(\beta(x-y)R\right)_x\right\}_x. \quad (12)$$

Поменяем в (12) переменные x, ξ и y, η ролями и вычислим интеграл в пределах $0 < \xi < x$, $y < \eta < a$, тогда с учетом граничных условий (9) получим

$$u_x(x,y) = \psi'(x) R(x,a,x,y)(x-a)^2 - \psi'(a) R(0,a,x,y) a^2 + \\ + \varphi_1(y) R(0,y,x,y) y^2 - \psi(x) M(x,a) + \psi(0) M(0,a) - \varphi(y) M(0,y) + \\ + \int_y^a \varphi_1(\eta) N(0,\eta)\,d\eta - \int_y^a \varphi(\eta) P(0,\eta)\,d\eta + \int_0^x \psi(\xi) Q(\xi,a)\,d\xi. \quad (13)$$

Отсюда решение задачи Гурса описывается формулой $u(x,y) = \varphi(y) + \int\limits_0^x H(\alpha,y)\,d\alpha$, где $H(\alpha,y)$ — правая часть (13).

При значениях β, β', указанных выше, решение задачи Гурса можно получить без использования функции Римана. Например, для $\beta' = 1$ из формулы (8) найдем

$$C_3(x) = \psi(x)(x-a)^{-\beta}, \quad C_2(y) = -y\varphi'(y) - \beta\varphi(y),$$
$$C_1(y) = -\frac{\varphi_1'(y)\,y + (\beta-1)\varphi_1(y)}{\beta} + \frac{(\beta+1)C_2(y)}{y^2}.$$

Литература

1. Трикоми Ф. *Лекции по уравнениям в частных производных.* – М.: Ин. лит., 1957.
2. Нахушев А.М. *Уравнения математической биологии.* – М.: Высш. школа, 1995. – ??? с.
3. Солдатов А.П., Шхануков М.Х. *Краевые задачи с общим нелокальным условием А.А. Самарского для псевдопараболических уравнений высокого порядка* // ДАН СССР. – 1987. – Т. 297. – № 3. – С. 547–552.
4. Rundell W., Stecher M. *Remarks concerning the supports of solution of pseudoparabolic equation* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1977. – V. 63. – № 1. – P. 77–81.
5. Жегалов В.И., Уткина Е.А. *Об одном псевдопараболическом уравнении третьего порядка* // Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 10. – С. 73–76.
6. Мюнтц Г. *Интегральные уравнения.* Т. 1. – М.: ГТТИ, 1934. – 320 с.

Казанский государственный
педагогический университет

Поступили
первый вариант 15.11.2004
окончательный вариант 30.03.2005