ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2007 МАТЕМАТИКА № 6 (541)

УДК 519.633

А.В. ГУЛИН, Н.И. ИОНКИН, В.А. МОРОЗОВА

КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ ДЛЯ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Для разностной схемы с весами, аппроксимирующей уравнение теплопроводности с нелокальным граничным условием, получены необходимые и достаточные условия устойчивости по начальным данным в некоторой специальным образом построенной энергетической норме. Устойчивость разностных схем для нелокальных задач теплопроводности изучалась ранее в работах [1]–[5]. В данной работе новым является отыскание таких условий устойчивости, которые невозможно ослабить за счет выбора нормы.

1. Абстрактная схема с весами. Теория устойчивости двуслойных и трехслойных разностных схем, представляющих собой операторно-разностные уравнения в евклидовых пространствах, развита в работах А.А. Самарского (см. библиографию в [6]). Любая линейная двуслойная разностная схема записывается в канонической форме

$$B\frac{y_{n+1}-y_n}{\tau}+Ay_n=0, \quad n=0,1,\dots, \quad y_0 \ \text{задан}, \tag{1}$$

где $y_n = y(t_n) \in H$ — функция дискретного аргумента $t_n = n\tau$ со значениями в конечномерном линейном пространстве H и A, B — линейные операторы, действующие в H.

В дальнейшем, не оговаривая этого специально, считаем, что операторы A и B не зависят от n (постоянные операторы). Возможность перехода к переменным операторам обоснована, например, в ([7], с. 122). Считаем также, что оператор B имеет обратный и, следовательно, уравнение (1) однозначно разрешимо относительно y_{n+1}. Предположим, что в H задано скалярное произведение (y, v) и определена норма $\|y\| = \sqrt{(y,y)}$. Пусть задан самосопряженный положительный оператор $D : H \to H$. Норму $\|y\|_D = \sqrt{(Dy,y)}$ будем называть энергетической нормой, а сам оператор D — оператором нормы. Под пространством H_D понимается множество всех элементов $y \in H$ с нормой $\|y\|_D$. Разностная схема называется устойчивой в пространстве H_D, если при любых начальных данных $y_0 \in H$ для ее решения выполняются неравенства

$$(Dy_{n+1}, y_{n+1}) \leqslant (Dy_n, y_n), \quad n = 0,1,\dots$$

Из определения следует, что для устойчивости в H_D необходимо и достаточно выполнения операторного неравенства

$$D \geqslant S^*DS, \tag{2}$$

где $S = E - \tau B^{-1}A$ — оператор перехода схемы (1), S^* — сопряженный ему оператор и E — единичный оператор.

В данной работе рассматривается схема с весами

$$\frac{y_{n+1}-y_n}{\tau}+\sigma Ay_{n+1}+(1-\sigma)Ay_n=0, \quad n=0,1,\dots, \quad y_0 \ \text{задан}, \tag{3}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 07-01-00674).

которая является частным случаем схемы (1), когда $B = E + \sigma\tau A$. Здесь σ — заданный вещественный параметр и A — линейный оператор в H. Пусть задан не зависящий от n оператор $D = D^* > 0$.

Теорема 1. *Для устойчивости разностной схемы* (3) *в пространстве* H_D *необходимо и достаточно выполнения операторного неравенства*

$$DA + A^*D + (2\sigma - 1)\tau A^*DA \geqslant 0. \tag{4}$$

Доказательство. Запишем критерий устойчивости (2) в виде ограничения на оператор A. Подставляя в (2) вместо S оператор $E - \tau B^{-1}A$, получим

$$DB^{-1}A + A^*B^{*-1}D \geqslant \tau A^*B^{*-1}DB^{-1}A.$$

Поскольку операторы A и $B = E + \sigma\tau A$ перестановочны, последнее неравенство можно записать в виде

$$DAB^{-1} + B^{*-1}A^*D \geqslant \tau B^{*-1}A^*DAB^{-1}.$$

Умножая это неравенство слева на B^* и справа на B, приходим к эквивалентному неравенству

$$B^*DA + A^*DB \geqslant \tau A^*DA.$$

Наконец, подставляя сюда $B = E + \sigma\tau A$, получаем условие устойчивости в виде (4). $\square$

Предположим теперь, что оператор A подобен некоторому оператору $J : H \to H$, т. е. существует обратимый оператор M, для которого

$$A = MJM^{-1}. \tag{5}$$

В приложениях оператор J будет представлен либо жордановой, либо диагональной матрицей, однако сейчас это несущественно.

Теорема 2. *Пусть операторы* A *и* J *связаны равенством* (5) *и пусть задан оператор* $D = D^* > 0$. *Для устойчивости разностной схемы* (3) *в* H_D *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось операторное неравенство*

$$\widetilde{D}J + J^*\widetilde{D} + (2\sigma - 1)\tau J^*\widetilde{D}J \geqslant 0, \tag{6}$$

где $\widetilde{D} = M^*DM$.

Доказательство. Подставляя в (4) операторы $D = M^{*-1}\widetilde{D}M^{-1}$ и $A = MJM^{-1}$, приходим к неравенству

$$M^{*-1}(\widetilde{D}J + J^*\widetilde{D} + (2\sigma - 1)\tau J^*\widetilde{D}J)M^{-1} \geqslant 0,$$

эквивалентному (6). $\square$

В дальнейшем при изучении конкретных разностных схем будем задавать оператор $\widetilde{D}$ в виде диагональной матрицы, а оператор нормы D определять как

$$D = M^{*-1}\widetilde{D}M^{-1}.$$

При этом проверка условий устойчивости в виде неравенства (6) оказывается гораздо проще проверки условия (4).

2. Схема с нелокальными граничными условиями. Рассмотрим разностные схемы для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \quad u(x, 0) = u_0(x) \tag{7}$$

с нелокальными граничными условиями

$$u(0, t) = 0, \quad \gamma\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1, t), \tag{8}$$

где $\gamma \in (0,\ 1]$ — числовой параметр. На отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$ введем равномерную сетку ω_h с шагом h, составленную из узлов $x_i = ih$, $i = 0, 1, \ldots, N$, причем $hN = 1$. Обозначим $y_i = y(x_i)$, $y_{\overline{x},i} = (y_i - y_{i-1})/h$, $y_{x,i} = (y_{i+1} - y_i)/h$, $y_{\overline{x}x,i} = (y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1})/h^2$. Сеточное пространство H состоит из функций $y(x_i)$, удовлетворяющих условию $y_0 = 0$. Будем рассматривать H как N-мерное вещественное линейное пространство, состоящее из векторов $y = (y_1 y_2 \ldots y_N)^T$ и снабженное скалярным произведением и нормой

$$(y, v] = \sum_{i=1}^{N-1} h y_i v_i + 0{,}5 h y_N v_N, \quad \|y|] = \sqrt{(y, y]}. \tag{9}$$

Введем равномерную сетку по времени ω_τ с шагом $\tau > 0$, состоящую из узлов $t_n = n\tau$, $n = 0, 1, \ldots$, и обозначим $y_i^n = y(x_i, t_n)$, $y_n = (y_1^n y_2^n \ldots y_N^n)^T$.

Заменим исходную дифференциальную задачу (7), (8) разностной схемой с весами

$$\begin{aligned}
&\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} = \sigma y_{\overline{x}x,i}^{n+1} + (1-\sigma) y_{\overline{x}x,i}^n, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1, \\
&\frac{y_N^{n+1} - y_N^n}{\tau} = \frac{2}{h}\left[\sigma(\gamma y_{x,0}^{n+1} - y_{\overline{x},N}^{n+1}) + (1-\sigma)(\gamma y_{x,0}^n - y_{\overline{x},N}^n)\right], \\
&y_i^0 = u_0(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, N, \quad y_0^{n+1} = 0, \quad n = 0, 1, \ldots
\end{aligned} \tag{10}$$

Разностную схему (10) можно представить в виде абстрактной схемы с весами (3), где оператор $A : H \to H$ определен правилом

$$\begin{aligned}
&(Ay)_i = -y_{\overline{x}x,i}, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1, \\
&y_0 = 0, \quad (Ay)_N = -\frac{2}{h}\left(\gamma y_{x,0} - y_{\overline{x},N}\right).
\end{aligned} \tag{11}$$

В дальнейшем при изучении разностных операторов будем отождествлять и обозначать одной и той же буквой разностный оператор и его матрицу в единичном базисе.

3. Свойства основного разностного оператора. Случай $\gamma = 1$. Перечислим свойства разностного оператора (11). Рассмотрим сначала случай $\gamma = 1$, который является особым, т. к. в этом случае система собственных функций оператора (11) не составляет базиса в H и ее приходится пополнять присоединенными функциями. Подробное изучение оператора (11) проведено в работе [1]. Предположим сначала, что число точек N нечетно и обозначим $m = (N-1)/2$. Собственные значения λ_k оператора A имеют вид

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_k = \frac{4}{h^2}\sin^2(\pi k h), \quad k = 1, 2, \ldots, m.$$

Число $\lambda_0 = 0$ является простым собственным значением, ему отвечает собственная функция $\mu^{(0)}(x_i) = x_i$. Остальные собственные значения имеют алгебраическую кратность 2. Для $k = 1, 2, \ldots, m$ каждому собственному значению λ_k отвечают одна собственная функция $\mu^{(2k)}(x_i) = \sin(2\pi k x_i)$ и одна присоединенная функция $\mu^{(2k-1)}(x_i) = x_i \cos(2\pi k x_i)$, так что выполнены равенства

$$\begin{gathered}
A\mu^{(2k)}(x_i) = \lambda_k \mu^{(2k)}(x_i), \quad A\mu^{(2k-1)}(x_i) = \lambda_k \mu^{(2k-1)}(x_i) + p_k \mu^{(2k)}(x_i), \\
i = 1, 2, \ldots, N, \quad k = 1, 2, \ldots, m,
\end{gathered} \tag{12}$$

где $p_k = 2\cos(\pi k h)\sqrt{\lambda_k} = 2h^{-1}\sin(2\pi k h)$.

Введем матрицу

$$M = \left[\mu^{(0)} \mu_1 \ldots \mu_m\right], \tag{13}$$

столбцами которой являются собственные и присоединенные векторы матрицы A с $\gamma = 1$. Здесь μ_k — матрица, имеющая два столбца, $\mu_k = \left[\mu^{(2k-1)}\ \mu^{(2k)}\right]$, $k = 1, 2, \ldots, m$, и $\mu^{(l)} = \left(\mu_1^{(l)}\ \mu_2^{(l)}\ \cdots\ \mu_N^{(l)}\right)^T$, $l = 1, 2, \ldots, N-1$.

Можно считать матрицу M линейным оператором, действующим в H. В этом случае через M^* обозначается оператор, сопряженный M в смысле скалярного произведения (9). Запишем равенства (12) в матричном виде

$$AM = MJ, \tag{14}$$

где A — матрица оператора (11) с $\gamma = 1$ и J — блочно-диагональная матрица

$$J = \mathrm{diag}\left[J_0, J_1, \ldots, J_m\right] \tag{15}$$

с блоками

$$J_0 = 0, \quad J_k = \begin{bmatrix} \lambda_k & 0 \\ p_k & \lambda_k \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2, \ldots, m.$$

В случае четного N выполнены равенства (12) с $m = N/2 - 1$ и, кроме того, добавляется простое собственное значение $\lambda_{N/2} = 4/h^2$. Матрицы (13) и (15) принимают вид

$$M = \left[\mu^{(0)}\mu_1 \ldots \mu_m \mu^{(N/2)}\right], \quad J = \mathrm{diag}\left[J_0, J_1, \ldots, J_m, J_{N/2}\right], \tag{16}$$

где $J_{N/2} = \lambda_{N/2}$ и $\mu^{(N/2)}$ — собственная функция оператора A, отвечающая собственному значению $\lambda_{N/2}$, а именно $\mu^{(N/2)}(x_i) = (-1)^i x_i$, $i = 1, 2, \ldots, N$. Остается в силе матричное равенство (14). В дальнейшем под M понимается матрица (13), если N нечетное, и матрица (16), если N четное. Точно так же, в зависимости от четности N, матрица J определяется согласно (15) или (16). Доказано [1], что система собственных и присоединенных функций $\left\{\mu^{(k)}\right\}_{k=0}^{N-1}$ оператора A образует базис в H. Поэтому матрица M^{-1} существует, и равенство (14) означает подобие матрицы A блочно-диагональной матрице J, т. е.

$$A = MJM^{-1}.$$

В заключение раздела приведем оценки границ спектра оператора A. По-прежнему обозначаем $m = (N-1)/2$ для нечетного N и $m = N/2 - 1$ для четного N.

Лемма 1. *Справедливы оценки*

$$\lambda_1 \geqslant \frac{2}{1 + \sqrt{1 - h^2}}, \quad \lambda_m \leqslant \frac{2}{1 - \sqrt{1 - h^2}}. \tag{17}$$

Доказательство. Из выражений для собственных значений получаем, что минимальное положительное собственное значение равно $\lambda_1 = 4h^{-2}\sin^2(\pi h)$. Поэтому первое из неравенств (17) эквивалентно неравенству

$$\sin^2(\pi h) \geqslant \frac{1 - \sqrt{1 - h^2}}{2}$$

или

$$\cos(2\pi h) \leqslant \sqrt{1 - h^2}. \tag{18}$$

Далее, если N четное и $m = N/2 - 1$, то $\lambda_m = 4h^{-2}\cos^2(\pi h)$ и второе из неравенств (17) снова приводит к (18). Если же N нечетное и $m = (N-1)/2$, то $\lambda_m = 4h^{-2}\cos^2(0{,}5\pi h)$ и второе из неравенств (17) эквивалентно неравенству

$$\cos^2\left(\frac{\pi h}{2}\right) \leqslant \frac{1 + \sqrt{1 - h^2}}{2}$$

или

$$\cos(\pi h) \leqslant \sqrt{1 - h^2}. \tag{19}$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $h \leqslant 0{,}5$, тогда $2\pi h \leqslant \pi$ и $\cos(2\pi h) \leqslant \cos(\pi h)$. Таким образом, неравенство (18) следует из (19) и для доказательства леммы достаточно проверить неравенство (19).

Возводя (19) в квадрат, приходим к неравенству

$$\sin^2(\pi h) \geqslant h^2. \tag{20}$$

Поскольку $h \leqslant 0{,}5$, имеем $\pi h \leqslant 0{,}5\pi$. Замечая, что для $x \in [0,\ \pi/2]$ выполняется неравенство $\sin x \geqslant 2x/\pi$, получаем $\sin^2(\pi h) \geqslant 4h^2$, так что неравенство (20), а следовательно, и (19), выполнены. $\square$

Из леммы 1 следует, что справедливы неравенства

$$\frac{2}{1+\sqrt{1-h^2}} \leqslant \lambda_k \leqslant \frac{2}{1-\sqrt{1-h^2}}, \quad k = 1, 2, \ldots, m.$$

4. Случай $\gamma \in (0,\ 1)$. Принципиальным отличием от случая $\gamma = 1$ является базисность системы собственных функций оператора A при $\gamma \in (0,\ 1)$. Собственные значения оператора (11) имеют вид

$$\lambda_0 = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\psi}{2N}, \quad \lambda_{2k-1} = \frac{4}{h^2}\sin^2\left((\pi k - 0{,}5\psi)h\right),$$
$$\lambda_{2k} = \frac{4}{h^2}\sin^2\left((\pi k + 0{,}5\psi)h\right), \quad k = 1, 2, \ldots, m,$$

где $\psi = \arccos\gamma$, $0 < \psi < \pi$, $m = (N-1)/2$, если N нечетное, и $m = N/2$, если N четное. Все собственные значения простые. Соответствующие собственные функции имеют вид

$$\mu^{(0)}(x_i) = \sin(\psi x_i), \quad \mu^{(2k-1)}(x_i) = \sin\left((2\pi k - \psi)x_i\right),$$
$$\mu^{(2k)}(x_i) = \sin\left((2\pi k + \psi)x_i\right), \quad i = 1, 2, \ldots, N, \quad k = 1, 2, \ldots, m,$$

и образуют базис в H. Введем матрицу

$$M = \left[\mu^{(0)}\ \mu^{(1)}\ \ldots\ \mu^{(N-1)}\right], \tag{21}$$

столбцами которой являются собственные векторы оператора (11) с $\gamma \in (0,\ 1)$. Равенства $A\mu^{(k)} = \lambda_k\mu^{(k)}$, $\quad k = 0, 1, \ldots, N-1$, можно записать в виде одного матричного уравнения $AM = M\Lambda$, где Λ — диагональная матрица, на главной диагонали которой расположены собственные значения оператора A, т. е. $\Lambda = \operatorname{diag}[\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{N-1}]$.

Тем самым при $\gamma \in (0,\ 1)$ матрица оператора (11) подобна диагональной матрице

$$A = M\Lambda M^{-1}. \tag{22}$$

5. Теоремы об устойчивости по начальным данным. Сформулируем критерии устойчивости разностной схемы (10) в пространствах H_D, где

$$D = (hMM^*)^{-1} \tag{23}$$

и M — матрица, приводящая A к жордановой (при $\gamma = 1$) или диагональной (при $\gamma \in (0,\ 1)$) форме. В [5] доказана

Теорема 3. *Пусть $\gamma = 1$ и матрица M определена согласно* (13) *или* (16) *в зависимости от четности N. Пусть оператор нормы D определен согласно* (23)*. Для устойчивости разностной схемы* (10) *в пространстве H_D необходимо и достаточно выполнения неравенств*

$$\sigma \geqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{\tau\lambda_k} + \frac{|p_k|}{2\tau\lambda_k^2}, \quad k = 1, 2, \ldots, m. \tag{24}$$

Докажем теперь следующее уточнение теоремы 3.

Теорема 4. *Если схема* (10) *с* $\gamma = 1$ *устойчива в каком-либо пространстве* H_D, *то справедливо неравенство*

$$\sigma \geqslant \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4\tau}. \tag{25}$$

Обратно, если выполнено (25), *то схема* (10) *с* $\gamma = 1$ *устойчива в пространстве* H_D, *где* D — *оператор* (23), *а матрица* M *определена согласно* (13) *или* (16).

Доказательство. Необходимость. Пусть λ_k — собственные значения оператора A. Тогда собственные значения s_k оператора перехода $S = E - \tau B^{-1}A$ схемы (10) имеют вид

$$s_k = 1 - \frac{\tau\lambda_k}{1 + \sigma\tau\lambda_k}.$$

Если схема устойчива в каком-либо пространстве H_D, то для всех собственных значений выполняется неравенство $|s_k| \leqslant 1$ или

$$0 \leqslant \frac{\tau\lambda_k}{1 + \sigma\tau\lambda_k} \leqslant 2.$$

Поскольку $\tau\lambda_k \geqslant 0$, из первого неравенства получаем условие $1 + \sigma\tau\lambda_k > 0$, а второе неравенство дает

$$\sigma \geqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{\tau\lambda_k} \tag{26}$$

для всех ненулевых собственных значений λ_k. В частности, при N четном и $k = N/2$ имеем $\lambda_k = 4h^{-2}$ и условие (26) совпадает с (25).

Достаточность. Согласно теореме 3 достаточно показать, что из (25) следуют все неравенства (24). Перепишем (25) в виде

$$\sigma - \frac{1}{2} \geqslant -\frac{h^2}{4\tau}$$

и докажем, что

$$-\frac{h^2}{4\tau} \geqslant -\frac{1}{\tau\lambda_k} + \frac{|p_k|}{2\tau\lambda_k^2}, \quad k = 1, 2, \dots m,$$

или

$$1 \leqslant \frac{4}{h^2\lambda_k}\left(1 - \frac{|p_k|}{2\lambda_k}\right), \quad k = 1, 2, \dots m. \tag{27}$$

Здесь и далее $m = (N-1)/2$ для нечетного N и $m = N/2 - 1$ для четного N.

Согласно (12) имеем

$$\lambda_k = \frac{4}{h^2}\sin^2(\pi kh), \quad p_k = \frac{2}{h}\sin(2\pi kh),$$

откуда получим

$$\sin(2\pi kh) = \frac{p_k h}{2}, \quad \cos(2\pi kh) = 1 - \frac{\lambda_k h^2}{2},$$

так что

$$\frac{p_k^2 h^2}{4} + \left(1 - \frac{\lambda_k h^2}{2}\right)^2 = 1.$$

Отсюда видно, что константы p_k и λ_k связаны равенством

$$p_k^2 = \lambda_k(4 - \lambda_k h^2).$$

Подставляя в (27)

$$\frac{|p_k|}{2\lambda_k} = \frac{h}{2}\sqrt{\frac{4}{h^2\lambda_k} - 1},$$

приходим к неравенствам

$$1 \leqslant z_k \left(1 - \frac{h}{2}\sqrt{z_k - 1}\right), \quad k = 1, 2, \ldots, m, \tag{28}$$

где обозначено

$$z_k = \frac{4}{h^2 \lambda_k} = \sin^{-2}(\pi k h).$$

Докажем, что неравенства (28) выполняются при всех $k = 1, 2, \ldots, m$. Найдем сначала решение одного неравенства

$$1 \leqslant z \left(1 - \frac{h}{2}\sqrt{z - 1}\right),$$

которое можно переписать в виде

$$\sqrt{z-1}\left(\sqrt{z-1} - \frac{hz}{2}\right) \geqslant 0. \tag{29}$$

Одним из решений является $z = 1$. Если же $z > 1$, то (29) сводится к неравенству

$$\sqrt{z-1} - \frac{hz}{2} \geqslant 0,$$

которое эквивалентно квадратичному неравенству

$$h^2 z^2 - 4z + 4 \leqslant 0.$$

Решая последнее неравенство, получим

$$\frac{2\left(1 - \sqrt{1-h^2}\right)}{h^2} \leqslant z \leqslant \frac{2\left(1 + \sqrt{1-h^2}\right)}{h^2}. \tag{30}$$

Заметим, что $2\left(1 - \sqrt{1-h^2}\right) > h^2$. Итак, решениями неравенства (29) является число $z = 1$ и множество чисел, удовлетворяющих неравенствам (30). Условию $z_k = 1$ удовлетворяет значение $z_{N/2}$ при четном N. Все остальные z_k удовлетворяют неравенствам (30). Действительно, подставляя в (30)

$$z = z_k = \frac{4}{h^2 \lambda_k},$$

получим неравенства

$$\frac{2}{1 + \sqrt{1-h^2}} \leqslant \lambda_k \leqslant \frac{2}{1 - \sqrt{1-h^2}},$$

уже доказанные в лемме 1. $\square$

Рассмотрим разностную схему (10) с $\gamma \in (0,\ 1)$. Пусть матрица M определена согласно (21). Тогда справедливо равенство (22), означающее подобие A диагональной матрице Λ. Для исследования разностной схемы (10) с $\gamma \in (0,\ 1)$ используем теорию устойчивости симметризуемых разностных схем. В дальнейшем через $S = E - \tau B^{-1} A$ обозначается оператор перехода разностной схемы (1).

Разностная схема (1) называется симметризуемой, если существует обратимый оператор $K : H \to H$ такой, что оператор

$$\widetilde{S} = K S K^{-1} \tag{31}$$

является самосопряженным.

Лемма 2. *Разностная схема* (10) *с* $\gamma \in (0,\ 1)$ *симметризуема, причем равенство* (31) *выполнено с оператором* $K = (\sqrt{h} M)^{-1}$ *и* $\widetilde{S} = E - \tau(E + \sigma\tau\Lambda)^{-1}\Lambda$.

Доказательство. Из равенства (22) следует

$$KSK^{-1} = M^{-1}SM = M^{-1}(E - \tau(E + \sigma\tau A)^{-1}A)M = E - \tau M^{-1}(E + \sigma\tau A)^{-1}MM^{-1}AM =$$
$$= E - \tau M^{-1}(E + \sigma\tau A)^{-1}M(M^{-1}AM) = E - \tau(E + \sigma\tau\Lambda)^{-1}\Lambda = \widetilde{S}. \quad \square$$

Воспользуемся следующим критерием устойчивости симметризуемых разностных схем ([8], с. 40).

Теорема 5. *Пусть разностная схема* (1) *симметризуема. Если она устойчива в каком-либо пространстве H_D, то выполнены операторные неравенства*

$$-E \leqslant \widetilde{S} \leqslant E. \tag{32}$$

Обратно, если выполнены неравенства (32), *то схема* (1) *устойчива в H_{K^*K}.*

Из теоремы 5 вытекает

Теорема 6. *Если схема* (10) *с $\gamma \in (0,\ 1)$ устойчива в каком-либо пространстве H_D, то справедливо неравенство* (25). *Обратно, если выполнено* (25), *то схема* (10) *с $\gamma \in (0,\ 1)$ устойчива в пространстве H_D, где D определен согласно* (23), *а матрица M — согласно* (21).

Доказательство. По лемме 2 схема (10) с $\gamma \in (0,\ 1)$ является симметризуемой, причем $\widetilde{S} = E - \tau(E + \sigma\tau\Lambda)^{-1}\Lambda$ и преобразование к диагональному виду осуществляется оператором $K = (\sqrt{h}M)^{-1}$. Критерий устойчивости (32) симметризуемой схемы сводится к операторным неравенствам

$$0 \leqslant (E + \sigma\tau\Lambda)^{-1}\tau\Lambda \leqslant 2E,$$

которые эквивалентны числовым неравенствам

$$0 \leqslant \frac{\tau\lambda_k}{1 + \sigma\tau\lambda_k} \leqslant 2, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{33}$$

Поскольку $0 \leqslant \lambda_k \leqslant 4h^{-2}$ для всех указанных k, неравенства (33) сводятся к одному неравенству (25).

Литература

1. Ионкин Н.И. *Задача для уравнения теплопроводности с неклассическим (нелокальным) краевым условием.* – Будапешт: Numerikus Modzerek, Препринт № 14. – 1979. – 70 с.
2. Ионкин Н.И., Морозова В.А. *Устойчивость разностных схем с нелокальными граничными условиями* // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. – 2000. – № 3. – С. 19–23.
3. Goolin A.V., Ionkin N.I., Morozova V.A. *Difference schemes with nonlocal boundary conditions* // Comput. methods in appl. math. - 2001. – V. 1. – № 1. – P. 62–71.
4. Гулин А.В., Морозова В.А. *Об устойчивости нелокальной разностной краевой задачи* // Дифференц. уравнения. – 2003. – Т. 39. – № 7. – С. 912–917.
5. Гулин А.В., Ионкин Н.И., Морозова В.А. *Разностные схемы для нелокальных задач* // Изв. вузов. Математика. – 2005. – № 1. – С. 40–51.
6. Самарский А.А. *Теория разностных схем.* – М.: Наука, 1989. — 616 с.
7. Самарский А.А., Гулин А.В. *Устойчивость разностных схем.* – М.: УРСС, 2004. — 384 с.
8. Гулин А.В. *Симметризуемые разностные схемы.* – М.: МАКС Пресс, 2004. – 120 с.

Московский государственный университет

Поступила 29.11.2005