ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2006 МАТЕМАТИКА № 8 (531)

УДК 517.927

Э.И. АБДУРАГИМОВ

ПОЛОЖИТЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим на отрезке $[0,1]$ двухточечную краевую задачу

$$y^{(4)} = f(x,y), \quad 0 < x < 1, \tag{1}$$

$$y(0) = y'(0) = y(1) = y'(1) = 0, \tag{2}$$

где $f(x,z)$ — непрерывная по обоим аргументам функция. Предположим, что $f(x,z)$ имеет непрерывную частную производную $\frac{\partial f}{\partial z}$ при $x \in [0,1], z \geq 0$ и

$$\frac{\partial f(x,z)}{\partial z} \geq 0. \tag{3}$$

Предположим еще, что существуют непрерывные и неотрицательные при $x \in [0,1]$ функции $a(x)$ и $b(x)$ такие, что выполняются условия

$$a(x)z^n \leq f(x,z) \leq b(x)z^n, \quad n = \mathrm{const} > 1, \tag{4}$$

при $x \in [0,1]$, $z \geq 0$, причем $a(x) \leq b(x)$.

Очевидно, $y(x) \equiv 0$ — тривиальное решение этой задачи. Под положительным решением этой задачи понимается функция $y \in C^4[0,1]$, удовлетворяющая уравнению (1), краевым условиям (2) и положительная при $x \in (0,1)$.

В данной работе доказывается существование и единственность положительного решения задачи (1), (2) и приводятся положительные решения при $f(x,y) = y^2$, $f(x,y) = y^4$ и $f(x,y) = e^x y^2$. Ранее аналогичные вопросы рассматривались для уравнения второго порядка в [1].

1. Существование положительного решения

Лемма. *Если функция $f(x,z)$ непрерывна, имеет непрерывную частную производную $\frac{\partial f}{\partial z}$ и удовлетворяет условиям* (3), (4), *то для положительного решения задачи* (1), (2) *справедлива априорная оценка*

$$\max_{[0,1]} y(x) \leq M. \tag{1.1}$$

Доказательство. Нетрудно убедиться, что

$$G(x,s) = \begin{cases} \frac{3s - x(1+2s)}{6}(1-s)^2 x^2, & \text{если } 0 \leq x \leq s; \\ \frac{3(1-s)-(1-x)(3-2s)}{6} s^2 (1-x)^2, & \text{если } s \leq x \leq 1, \end{cases} \tag{1.2}$$

является функцией Грина оператора $\frac{d^4}{dx^4}$ с граничными условиями (2). Очевидно, $G(x,s) \geq 0$ при $x \in [0,1]$ и $s \in [0,1]$. С помощью $G(x,s)$ задачу (1), (2) можно записать в эквивалентной форме

$$y(x) = \int_0^1 G(x,s) f(s, y(s)) ds.$$

Отсюда следует

$$y'(x) = \int_0^1 \frac{\partial G(x,s)}{\partial x} f(s, y(s))ds,$$
$$y''(x) = \int_0^1 \frac{\partial^2 G(x,s)}{\partial x^2} f(s, y(s))ds. \tag{1.3}$$

Из (1.1) получим

$$\frac{\partial G(x,s)}{\partial x} = \begin{cases} G_{11}(x,s)(1-s)^2, & \text{если } 0 \le x \le s; \\ G_{12}(x,s)s^2, & \text{если } s \le x \le 1, \end{cases}$$
$$\frac{\partial^2 G(x,s)}{\partial x^2} = \begin{cases} G_{21}(x,s)(1-s)^2, & \text{если } 0 \le x \le s; \\ G_{22}(x,s), & \text{если } s \le x \le 1, \end{cases}$$

где

$$G_{11}(x,s) = x\left[s - \frac{x(1+2s)}{2}\right], \qquad G_{12} = (1-x)\left[\frac{(1-x)(3-2s)}{2} - 1 + s\right],$$
$$G_{21}(x,s) = [s - x(1+2s)](1-s)^2, \quad G_{22}(x,s) = [(1-s) - (1-x)(3-2s)]s^2.$$

Легко проверить, что $\frac{\partial^2 G(x,s)}{\partial x^2} \ge 0$ при $x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$. Следовательно, на отрезке $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ функция $y(x)$ выпукла вверх. Также легко проверить, что $y'(x) > 0$ при $x \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$ и $y'(x) < 0$ при $x \in \left(\frac{2}{3}, 1\right)$. Отсюда следует, что равенство $y'(x) = 0$ возможно только в точке $x_0 \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$. А из выпуклости $y(x)$ на этом отрезке следует неравенство

$$y(x) \ge 3\|y\|\psi(x), \tag{1.4}$$

где $\psi(x)$ — расстояние от точки x до границы отрезка $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$, $\psi(x) = \min\left(x - \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, а

$$\|y\| = \max_{0 \le x \le 1} y(x).$$

Обозначим через $\phi(x)$ расстояние от точки x до границы отрезка $[0,1]$, $\phi(x) = \min(x, 1-x)$. Можно показать, что

$$G(x,s) \ge \frac{\phi^3(x)\phi^3(s)}{3}. \tag{1.5}$$

Тогда в силу (1.4) и (1.5)

$$y(x) \ge \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} G(x,s)g(s)|y(s)|^n ds \ge 3^{n-1}\phi^3(x)\|y\|^n \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \phi^3(s)\psi^n(s)g(s)ds.$$

Так как $\phi(x) \ge \frac{1}{3}$ при $x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$, то отсюда следует

$$\|y\|^{n-1} \le \left(3^{n-4}\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \phi^3\psi^n(s)g(s)ds\right)^{-1} \equiv B \quad \text{или} \quad \|y\| \le B^{\frac{1}{n-1}}. \quad \square$$

Обозначим $\int\limits_0^1 G(x,s)f(s,y(s))ds \equiv Ay$. Тогда уравнение (1) можно записать в операторной форме $y = Ay$. Обозначим через K конус непрерывных, неотрицательных на $[0,1]$ и выпуклых вверх на $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ функций банахова пространства $C^2[0,1]$ таких, что $\|u\| = \max\limits_{0 \le x \le 1} u(x)$ достигается в точке $x_0 \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ и $u(0) = u'(0) = u(1) = u'(1) = 0$. Полуупорядоченность в конусе K определим следующим способом: будем считать $u \prec v$, если $u(x) \le v(x)$ при $x \in [0,1]$.

Пусть $y \in K$. Как показано выше, $\frac{\partial^2 G(x,s)}{\partial x^2} \le 0$ при $x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$, поэтому

$$(Ay)'' = \int_0^1 \frac{\partial^2 G(x,s)}{\partial x^2} f(s, y(s))ds \le 0$$

при $x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$. Следовательно, функция $u = Ay$ выпукла вверх при $x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$, неотрицательна при $x \in [0,1]$, $u(0) = u'(0) = u(1) = u'(1) = 0$, если $y \in K$. Как показано выше, $\max\limits_{0 \le x \le 1} y(x)$ достигается в точке $x_0 \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$, в которой $\frac{\partial G(x_0,s)}{\partial x} = 0$. Тогда и $\max\limits_{0 \le x \le 1} u(x)$ достигается в этой же точке. Это означает, что A — положительный оператор на K. Его вполне непрерывность легко проверяется. Покажем, что A растягивает конус K. Действительно, пусть r_1 — некоторое число, которое будет уточнено ниже. Пусть $y \in K(0, r_1) = \{x \in K : \|x\| \le r_1\}$. Тогда в силу (4) имеем

$$Ay = \int_0^1 G(x,s)g(s)|y(s)|^n ds \le \|y\|^{n-1}\|y\|g_0 \int_0^1 G(x,s)ds \le r_1^{n-1} g_0 \|y\| \int_0^1 G(x,s)ds, \qquad (1.6)$$

где $b_0 = \max\limits_{0 \le x \le 1} b(x)$. Так как $y(x)$ выпукла вверх на отрезке $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$, то для нее справедлива оценка (1.4). Очевидно, $\max\limits_{\frac{1}{3} \le x \le \frac{2}{3}} \psi(x) = \psi(\frac{1}{3}) = \frac{1}{6}$. Поэтому $y(\frac{1}{2}) \ge \frac{\|y\|}{2}$ в силу (1.3). Следовательно,

$$\|y\| \le 2y\left(\frac{1}{2}\right). \qquad (1.7)$$

Функция $v(x) = \int\limits_0^1 G(x,s)ds$ является решением двухточечной краевой задачи

$$v^{(4)} = 1, \quad 0 < x < 1, \quad v(0) = v'(0) = v(1) = v'(1) = 0$$

и имеет вид $v(x) = \frac{[x(1-x)]^2}{24}$. С учетом этого и (1.7) из (1.6) получаем

$$Ay\left(\frac{1}{2}\right) \le \frac{b_0}{192} r_1^{n-1} y\left(\frac{1}{2}\right).$$

Возьмем $r_1 < (\frac{192}{b_0})^{\frac{1}{n-1}}$, тогда $Ay(\frac{1}{2}) < y(\frac{1}{2})$. Следовательно, $Ay - y \not\in K$ при $y \in K(0, r_1)$, где $r_1 < a$. Пусть r_2 — некоторое положительное число, которое будет уточнено ниже и пусть $y \in K(r_2, \infty) = \{x \in K : \|x\| \ge r_2\}$. Тогда при $x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ в силу (1.3) и (1.4)

$$Ay(x) \ge 3^{n-1}\phi^3(x) \int_0^1 \phi^3(s)g(s)|y(s)|^n ds \ge 3^{n-1}\phi^3(x) r_2^{n-1} y(x) \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \phi^3(s)g(s)\psi^n(s)ds.$$

Отсюда следует, что $Ay(\frac{1}{2}) \ge 3^{n-4} r_2^{n-1} y(\frac{1}{2}) \int\limits_{1/3}^{2/3} \phi^3(s)\psi^n(s)g(s)ds$. Возьмем $r_2 > \left(3^{\frac{n-4}{n-1}} c^{\frac{1}{n-1}}\right)^{-1}$, где $c = \int\limits_{1/3}^{2/3} \phi^3(s)\psi^n(s)g(s)ds$, тогда $Ay(\frac{1}{2}) > y(\frac{1}{2})$. Следовательно, $y - Ay \not\in K$ при $y \in K(r_2, \infty)$ с $r_2 < b$. Очевидно, $r_1 < r_2$. Таким образом, положительный вполне непрерывный оператор A растягивает конус K. Тогда, как известно [2], интегральное уравнение (1.2) в конусе K имеет по крайней мере одно ненулевое решение. Легко видеть, что это решение $y \in C^4[0,1]$.

Таким образом, доказана

Теорема 1. *Существует по крайней мере одно положительное решение из класса* $C^4[0,1]$ *задачи* (1), (2).

2. Единственность положительного решения

Так как $\frac{\partial^2 G(0,s)}{\partial x^2} = s(1-s)^2 \geq 0$, $\frac{\partial^3 G(0,s)}{\partial x^3} = -(1+2s)(1-3)^2 \leq 0$, то из (1.3) следует

$$y''(0) = A > 0, \quad y'''(0) = -B < 0.$$

Теорема 2. *Предположим, что функция $f(x,z)$ непрерывна и имеет непрерывную частную производную $\frac{\partial f(x,z)}{\partial z}$ при $x \in [0,1]$, $z \geq 0$ и что выполняются условия (3), (4). Тогда положительное решение задачи (1), (2) единственно в $C^4[0,1]$.*

Доказательство. Пусть $y(x)$ и $y(x)+v(x)$ — различные положительные решения задачи (1), (2). Очевидно, они могут иметь лишь конечное число N общих точек $x_0 = 0 < x_1 < \cdots < x_{N-1} = 1$, в которых $v(x_k) = v'(x_k) = 0$, $k = 0,1,2,\ldots,N-1$. Через $y_k(x)$ и $y_k(x)+v_k(x)$ обозначим решения уравнения (1) на интервале (x_k, x_{k+1}), $k = 0,1,2,\ldots,N-2$, удовлетворяющие в граничных точках условиям $y_k(x_k) = y(x_k)$, $y_k'(x_k) = y'(x_k)$, $y_k(x_{k+1}) = y(x_{k+1})$, $y_k'(x_{k+1}) = y'(x_{k+1})$, $v_k(x_k) = v_k'(x_k) = v_k(x_{k+1}) = v_k'(x_{k+1}) = 0$, $k = 0,1,2,\ldots,N-2$. Вычитая из равенства $(y_k+v_k)^{(4)} = f(x, y_k+v_k)$ равенство $y_k{}^{(4)} + f(x,y_k) = 0$, получим линейное относительно $v_k(x)$ уравнение

$$v_k^{(4)} = b_k(x) v_k, \tag{2.1}$$

где $b_k(x) = \frac{\partial f(x,w_k)}{\partial y}$, $\min(y_k(x), y_k(x)+v_k(x)) \leq w_k(x) \leq \max(y_k(x), y_k(x)+v_k(x))$. В силу (1.1) получим оценку $0 \leq w_k(x) \leq M$. Тогда из (4) следует $0 \leq b_k(x) = \frac{\partial f(x,w_k)}{\partial y} \leq C(M,p)$, где $C(M,p)$ — некоторая положительная константа, зависящая лишь от M в (1.1) и p.

Как известно [3], расстояние d между двумя соседними нулями решения уравнения (2.1) удовлетворяет неравенству $d > \pi / \sqrt[4]{\max\limits_{[0,1]} b(x)}$, поэтому

$$x_{k+1} - x_k > \frac{\pi}{\sqrt[4]{C(M,p)}}, \quad k = 0,1,2,\ldots,N-2. \tag{2.2}$$

На интервале (x_k, x_{k+1}) функция $v_k(x)$ удовлетворяет уравнению (2.1), а в граничных точках условиям $v_k(x_k) = v_k(x_{k+1}) = v_k'(x_k) = v_{k+1}'(x_{k+1}) = 0$. Отсюда в силу (2.2) $v_k(x) \equiv 0$ при $x \in [x_k, x_{k+1}]$. Следовательно, $v(x) \equiv 0$ при $x \in [0,1]$ и $y(x)$ будет единственным положительным решением задачи (1), (2) из класса $C^4[0,1]$. □

Замечание. Очевидно, отрезок $[0,1]$ в теоремах 1, 2 можно заменить на произвольный отрезок $[0, x_0]$ с $x_0 > 0$.

Литература

1. Абдурагимов Э.И. *О единственности положительного решения одной нелинейной двухточечной краевой задачи* // Изв. вузов. Математика. – 2002. – № 6. – С. 3–6.
2. Красносельский М.А., Забрейко П.П. *Геометрические методы нелинейного анализа.* – М.: Наука, 1975. – 542 с.
3. Mikusinski J. *Об уравнении* $x^{(n)} + A(t)x = 0$ // Ann. Polon. Math. – 1955. – V. 1. – № 2. – P. 207-221.

Дагестанский государственный университет

Поступила 26.07.2004