

Л.А. АКСЕНТЬЕВ

**МНОГОЛИСТНЫЕ ФУНКЦИИ
ИЗ РАСШИРЕННЫХ КЛАССОВ БЕККЕРА И НЕХАРИ
И ИХ ГИДРОМЕХАНИЧЕСКОЕ ИСТОЛКОВАНИЕ**

В статье доказывається, что в расширенный класс Беккера аналитических функций $f(z)$ с условием

$$2 \operatorname{Re} z |f''(z)/f'(z)| \leq 1 + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \tag{1}$$

в полуплоскости $H = \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$ входят функции любой листности. Построение таких функций основано на степенном преобразовании вида $(w - a)^\alpha$ и на суперпозиции $T^{-1}f_0T(z) = f_0(Rz)/R$, содержащей экстремальную функцию $f_0(z)$ из [1] и линейную функцию $T(z) = Rz$. При этом показана связь $f_0(z)$ с комплексным потенциалом поступательного течения идеальной жидкости с вихрем в одной точке (п. 1). Кроме того, выяснена ядерная сходимость семейств конечнолистных и бесконечнолистных областей, которые характеризуют расширение класса Нехари [2] в форме $(2 \operatorname{Re} z)^2 |f, z| \leq 2 + \varepsilon, z \in H$, где $\{f, z\}$ является шварцианом. Дана гидромеханическая интерпретация соответствующих многолистных функций в виде комплексных потенциалов потоков с разрывами скоростей на граничных струях (п. 2). В п. 3 приведена характеристика потоков, обтекающих неоднolistные профили, которые возникают при расширении класса Беккера и Нехари во внешности единичного круга.

1. Начнем со вспомогательного течения в плоскости ω , которое образовано вихрем в поступательном потоке идеальной несжимаемой жидкости с $\vec{V}(\infty) = V > 0$. Комплексный потенциал такого течения имеет вид $\Omega = V\omega - \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(\omega - i)$. Критической точкой течения является

$$\omega_0 = -i \left(\frac{\Gamma}{2\pi V} - 1 \right) \quad (\vec{V}(\omega_0) = 0 \implies 2\pi i V(\omega_0 - i) = \Gamma).$$

Наиболее простой случай получается при скорости невозмущенного течения $V = 1$ и интенсивности вихря $\Gamma = 2\pi$. Тогда $\Omega = \omega + i \ln(\omega - i)$. Картина линий тока этого течения представлена в задачнике [3] (с. 372, рис. 252).

Сделав замены переменных $\Omega = i(z + i\pi/2)$ и $\omega = if(z)$, придем к соотношению $iz - \pi/2 = if(z) + i \ln i + i \ln(f(z) - 1)$, откуда

$$z = f(z) + \ln(f(z) - 1), \quad -\pi < \arg(f(z) - 1) < \pi, \quad f(2) = 2. \tag{2}$$

Функция, удовлетворяющая уравнению (2), обозначена в [1] через $f_0(z)$. Эта функция переводит полуплоскость $H = \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$ в область D_{f_0} с границей, проходящей через 0 — критическую точку течения (см. рис. 1 на с. ??). В [1] показано, что функция $f_0(z)$ в полуплоскости H удовлетворяет условию Беккера

$$|f_0''(z)/f_0'(z)| \leq 1/(2 \operatorname{Re} z),$$

и малым изменением $f_0(z)$ можно добиться двулиственности измененной функции с коэффициентом в условии Беккера, как угодно мало превышающим единицу. Измененная функция строится по

формуле

$$f_\varepsilon(z) = \int_2^z (f'_0(z))^{1+\varepsilon} dz + 2,$$

удовлетворяет условию (1) и отображает H на область с перекрытием образов полуокрестностей точек $\pm i\pi$.

Построим новую двулистную функцию, которая удовлетворяет неравенству (1) и имеет более простой геометрический смысл.

Теорема 1. Функция

$$f_0(\gamma, z) = (f_0(z) - 1)^{1+\gamma} + 1, \quad 0 < \gamma \leq 1, \quad (3)$$

является двулистной функцией в H и удовлетворяет неравенству

$$|f''_0(\gamma, z)/f'_0(\gamma, z)| \leq (1 + 4\gamma)/(2 \operatorname{Re} z), \quad z \in H. \quad (4)$$

Доказательство. Преобразование (3) переводит точки, расположенные на окружности $|w - 1| = 1$, в точки на той же окружности с двойным покрытием дуги, концы которой имеют центральные углы $\pm\pi(1 + \gamma)$. Эта двойная дуга превратится во всю дважды покрытую окружность при $\gamma = 1$. При $\gamma > 1$ появится третье покрытие. Функцию $f_0(\gamma, z)$ тоже можно связать с потоком, но на многолистной римановой поверхности.

Для обоснования неравенства (4) параметризуем уравнение (2) с помощью двух функций

$$w = e^\zeta + 1, \quad z = e^\zeta + \zeta + 1 \quad (w(0) = 2, \quad z(0) = 2), \quad (5)$$

которые эквивалентны (2). Нетрудно представить область D_ζ в плоскости ζ , которая переводится функциями (5) в полуплоскость H и в область D_{f_0} . Область D_ζ занимает часть горизонтальной полосы $\{-\pi < \operatorname{Im} \zeta < \pi\}$. Ее граница состоит из трех аналитических дуг. В точках $\pm i\pi$ эти дуги стыкуются под углом $\pi/2$. Одна из них ограничена, лежит в полуплоскости $\operatorname{Re} \zeta < 0$ и соединяет точки $-i\pi, \zeta_0, i\pi$; точка ζ_0 удовлетворяет уравнению $e^{\zeta_0} + \zeta_0 + 1 = 0$, $\zeta_0 \approx -1, 3$. Две остальные дуги неограничены, содержатся в полуплоскости $\operatorname{Re} \zeta > 0$, симметричны относительно вещественной оси и имеют горизонтальные асимптоты, проведенные через точки $\pm i\pi/2$.

Вторая функция из (5) связана с конденсатором Роговского, и представление об отображении, которое она осуществляет, дано в книге ([4], сс. 116, 249).

Поскольку из (4) имеем $\zeta = \ln(f_0(z) - 1)$, то в силу $D_\zeta \subset \{\zeta : -\pi < \operatorname{Im} \zeta < \pi\}$ получим (\prec — знак подчинения)

$$\ln[f_0(z) - 1] \prec 2 \ln z - 2 \ln 2 \implies \ln[f_0(z) - 1] = 2 \ln \varphi(z) - 2 \ln 2, \quad (6)$$

где $\varphi(z)$ — аналитическая функция в H , причем $\varphi(H) \subset H$ и $\varphi(2) = 2$. По дифференциальной форме леммы Шварца (напр., [5], с. 322), примененной к полуплоскости H , после дифференцирования равенства (6) запишем

$$\left| \frac{f'_0(z)}{f_0(z) - 1} \right| = \frac{2|\varphi'(z)|}{|\varphi(z)|} \leq \frac{2|\varphi'(z)|}{\operatorname{Re} \varphi(z)} \leq \frac{2}{\operatorname{Re} z} = \frac{4}{2 \operatorname{Re} z}.$$

После этого неравенство (4) получается просто. Именно,

$$f'_0(\gamma, z) = (1 + \gamma)(f_0(z) - 1)^\gamma f'_0(z) \implies \left| \frac{f''_0(\gamma, z)}{f'_0(\gamma, z)} \right| \leq \frac{\gamma |f'_0(z)|}{|f_0(z) - 1|} + \left| \frac{f''_0(z)}{f'_0(z)} \right| \leq \frac{1 + 4\gamma}{2 \operatorname{Re} z}. \quad \square$$

Заметим, что второе соотношение из (5) в доказательстве теоремы 1 не участвовало.

По терминологии Ф.Г. Авхадиева ([6], § 2.5) функционал Беккера является 1-допустимым, т. к. неравенство

$$\sup_{z \in H} (2 \operatorname{Re} z |f''(z)/f'(z)|) \leq 1 \quad (7)$$

выделяет класс однолистных функций в H . Пример из [1] и пример из теоремы 1 показывают невозможность увеличения коэффициента 1 в правой части (7) без потери однолиственности хотя бы на отдельных функциях. Докажем более сильное утверждение (ср. с [7]): невозможность существования при $p \geq 2$ неравенств

$$2 \operatorname{Re} z |f''(z)/f'(z)| \leq N(p), \quad N(p) > N(1) = 1,$$

гарантирующих, что порядок листности функции $f(z)$ не превосходит p .

В этом качестве функционал Беккера похож на функционал Нехари $\sup_{z \in H} [(2 \operatorname{Re} z)^2 |f'(z)|]$, для которого 1-допустимость и невозможность p -допустимости известна с 1949 г. [2], [8].

Теорема 2. Функционал $\sup_{z \in H} (2 \operatorname{Re} z |f''(z)/f'(z)|)$ не является p -допустимым в H при $p \geq 2$.

Доказательство. Для обоснования теоремы построим (при как угодно малом $\varepsilon > 0$) примеры функций, удовлетворяющих условию (1) и являющихся p -листными. Проведем подробное доказательство при $p = 3$.

Вначале построим два семейства двулистных в \overline{H} функций с предельной функцией z , которые равномерно сходятся в сегментах

$$\overline{D}(\xi, \rho) = \{z : |z| \leq \rho, \operatorname{Re} z \geq \xi\}$$

при любых $\rho > \pi$ и $\xi > 0$. Для этого подставим в соотношение (2) Rz вместо z

$$f_0(Rz) + \ln[f_0(Rz) - 1] = Rz \tag{8}$$

и учтем, что в силу (6)

$$\frac{1}{R} \ln[f_0(Rz) - 1] < \frac{2}{R} \ln(Rz) - \frac{2}{R} \ln 2 \implies \frac{1}{R} \ln[f_0(Rz) - 1] \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

равномерно относительно $z \in \overline{D}(\xi, \rho)$. После деления (8) на $R > 0$ и перехода к пределу при $R \rightarrow \infty$ будем иметь

$$\lim_{R \rightarrow \infty} [\frac{1}{R} f_0(Rz)] = z. \tag{9}$$

Предельный переход (9) будет неравномерным для $z \in H$ и равномерным при $z \in \overline{D}(\xi, \rho)$, когда ξ и ρ фиксированы.

Предельный переход (8)–(9) имеет прозрачное гидромеханическое пояснение. Если обозначить $f_0(Rz)/R = w$, то (8) перепишется в виде $w + \frac{1}{R} \ln(Rw - 1) = z$. Функция $iz(w)$ из этого соотношения является комплексным потенциалом течения, образованного соединением невозмущенного потока (с потенциалом iw) и вихря в точке $1/R$ (с потенциалом $(i/R) \ln(w - 1/R)$), интенсивность которого равна $(-2\pi/R)$. Это значит, что при $R \rightarrow \infty$ вихрь подходит к $w = 0$ и затихает. Поэтому в пределе останется только невозмущенный поток, т. е.

$$\lim_{R \rightarrow \infty} z(w) = w \iff \lim_{R \rightarrow \infty} w(z) = z \iff (9).$$

Итак, первое семейство функций $f_0(Rz)/R$ построено и обоснован предельный переход (9), который эквивалентен представлению

$$\frac{1}{R} f_0(Rz) = z + a_1(R, z), \quad \lim_{R \rightarrow \infty} a_1(R, z) = 0. \tag{10}$$

Для построения второго семейства приведем некоторые геометрические пояснения.

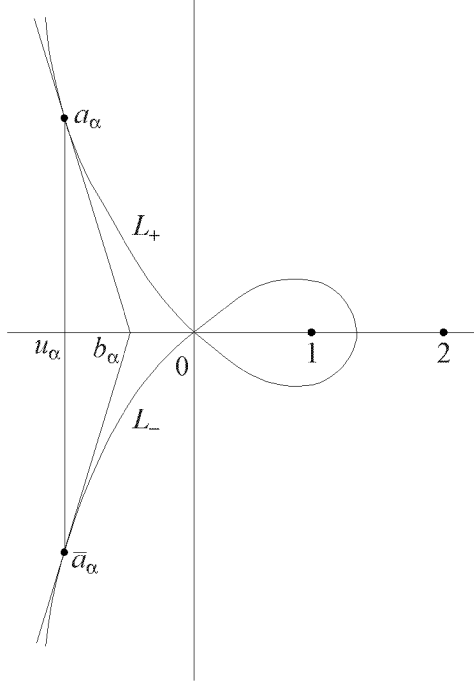


Рис. 1

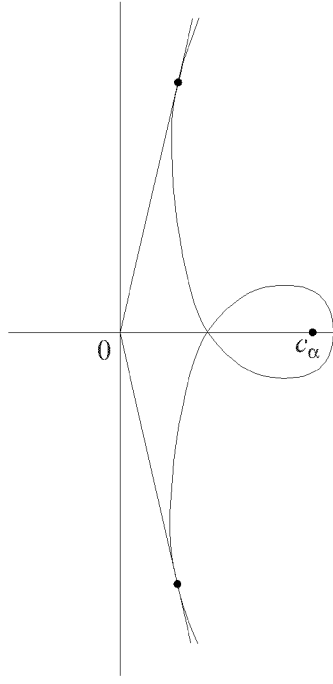


Рис. 2

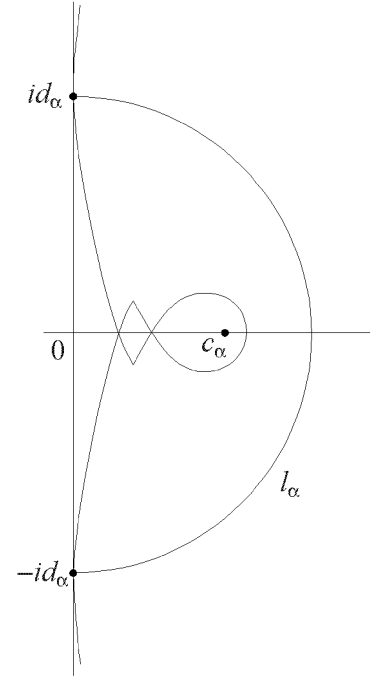


Рис. 3

При любых значениях $R \geq 1$ в образ $(1/R)f_0(RH)$ будут входить правая полуплоскость без овальной области (внутри которой лежит точка $1/R$) и две взаимно симметричные относительно вещественной оси конусообразные области, границы которых состоят из мнимой оси и двух бесконечных кривых, выходящих из 0. Запишем уравнения этих кривых при $R = 1$ с использованием параметрических уравнений (5). Лучу $z = iy$, $\pi \leq y < \infty$, соответствует линия в плоскости $\zeta = \xi + i\eta$ с уравнением

$$\{e^\xi \cos \eta + \xi + 1 = 0, e^\xi \sin \eta + \eta = y\} \implies \cos \eta = -(\xi + 1)e^{-\xi} \implies \sin \eta = \sqrt{1 - (\xi + 1)^2 e^{-2\xi}}. \quad (11)$$

Так как для $w = u + iv$ в силу (5) и (11)

$$u + iv = e^\xi \cos \eta + 1 + ie^\xi \sin \eta = -\xi + i\sqrt{e^{2\xi} - (\xi + 1)^2},$$

то уравнения отмеченных кривых запишутся в форме $v = \pm\sqrt{e^{-2u} - (1 - u)^2}$. Точнее, осуществляются такие переходы

$$z = \pm iy, \pi \leq y < \infty \xrightarrow{w=f_0(z)} L_\pm : v = \pm\sqrt{e^{-2u} - (1 - u)^2}, -\infty < u \leq 0$$

(см. рис. 1).

Теперь убедимся в том, что при знаке (+) найденная зависимость $v = v(u)$ на $(-\infty, 0)$ обладает первой и второй знакопостоянными производными. Действительно,

$$\frac{dv}{du} = -\frac{e^{-2u} - 1 + u}{\sqrt{e^{-2u} - (1 - u)^2}} < 0, \quad \frac{d^2v}{du^2} = \frac{e^{-2u}(e^{-2u} - 1 + 2u - 2u^2)}{[e^{-2u} - (1 - u)^2]^{3/2}} > 0, \quad u \in (-\infty, 0).$$

Первая производная монотонно возрастает от

$$\frac{dv}{du}(-\infty) = -\infty \quad \text{до} \quad \frac{dv}{du}(-0) = \lim_{u \rightarrow -0} \left(-\frac{-u + 2u^2 - \dots}{\sqrt{u^2 - 4u^3/3 + \dots}} \right) = -1.$$

Поэтому угол $\Gamma(u)$, составленный касательной к линии L_+ с положительным направлением вещественной оси в точке $u + iv \in L_+$, будет монотонно возрастать от $-\pi/2$ до $-\pi/4$ при $u \in (-\infty, -0)$.

В силу монотонности $\Gamma(u)$ существует единственная точка $a_\alpha = u_\alpha + iv_\alpha \in L_+$, в которой

$$\Gamma(u_\alpha) = -\pi/2 + \alpha\pi/2, \quad 0 < \alpha < 1/2.$$

Касательная к L_+ в точке a_α будет пересекать вещественную ось в точке с координатой

$$u_\alpha + v_\alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha\pi}{2} \stackrel{\text{def}}{=} b_\alpha < 0, \quad 0 < \alpha < 1/2.$$

Для построения второго семейства функций образуем при малых α функции

$$\Phi(\alpha, z) = (f_0(z) - b_\alpha)^{1/(1+2\alpha)}, \quad (12)$$

которые будут неоднолиственными в замкнутой полуплоскости \overline{H} , но область значений которых принадлежит H (см. рис. 2). Как и при доказательстве теоремы 1, обосновывается импликация

$$\left\{ \Phi'(\alpha, z) = \frac{1}{1+2\alpha} (f_0(z) - b_\alpha)^{-2\alpha/(1+2\alpha)} f_0'(z), \quad \ln(f_0(z) - b_\alpha) < (1+\alpha) \ln z + \ln \frac{2-b_\alpha}{2^{1+\alpha}} \right\} \implies \\ \implies \left| \frac{\Phi''}{\Phi'}(\alpha, z) \right| \leq \frac{2\alpha}{1+2\alpha} \frac{|f_0'(z)|}{|f_0(z) - b_\alpha|} + \left| \frac{f_0''}{f_0'}(z) \right| \leq \frac{1+4\alpha(1+\alpha)/(1+2\alpha)}{2 \operatorname{Re} z} < \frac{1+4\alpha}{2 \operatorname{Re} z}. \quad (13)$$

После этого свяжем функции (12) с предельным переходом (9) и с функцией (3), составив суперпозицию при $R = e^{-2u_\alpha}$

$$\Phi(\alpha, \beta; z) = \{\Phi(\alpha, Rz)/R^{1/(1+2\alpha)} - c_\alpha\}^{1+\beta} + c_\alpha, \quad c_\alpha = [(1-b_\alpha)/R]^{1/(1+2\alpha)}.$$

Величина $\beta > 0$ подбирается так, чтобы образ полуплоскости H при отображении функцией $\Phi(\alpha, \beta; z)$ не выходил за H и чтобы линия $\partial\Phi(\alpha, \beta; z)$ касалась ∂H (см. рис. 3). Второе семейство построено.

Образуем асимптотическое представление функции $\Phi(\alpha, \beta; z)$ при малых α . Для этого с учетом (10) и разложения по малому параметру будем иметь

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha, Rz)/R^{1/(1+2\alpha)} &= (z + a_1(R, z) - b_\alpha/R)^{1/(1+2\alpha)} = \\ &= (z + a_1(R, z) - b_\alpha/R) \exp \left[\frac{-2\alpha}{1+2\alpha} \ln(z + a_1(R, z) - b_\alpha/R) \right] = z + a_2(R, \alpha; z), \\ \lim_{\alpha \rightarrow 0} a_2(e^{-2u_\alpha}, \alpha; z) &= 0. \end{aligned}$$

И далее

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha, \beta; z) &= \{z + a_2(R, \alpha; z) - c_\alpha\} \exp[\beta \ln(z + a_2(R, \alpha; z) - c_\alpha)] + c_\alpha = \\ &= z + a_3(R, \alpha, \beta; z), \quad \lim_{\alpha, \beta \rightarrow 0} a_3(e^{-2u_\alpha}, \alpha, \beta; z) = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Предельный переход в (14) будет справедлив во всей полуплоскости H , а в каждом вложенном в H компакте этот переход будет равномерным.

Покажем, что полуокружность l_α (рис. 3) с диаметром на отрезке $[-id_\alpha, id_\alpha]$, который касается $\partial\Phi(\alpha, \beta; H)$, будет стягиваться к нулю при $\alpha \rightarrow 0$. Для этого сосчитаем расстояние от b_α до точки касания a_α (рис. 1). Именно,

$$|a_\alpha - b_\alpha| = v_\alpha / \cos \frac{\alpha\pi}{2} \approx e^{-u_\alpha},$$

поэтому при малых α

$$|a_\alpha - b_\alpha|^{1/(1+2\alpha)} \approx e^{-u_\alpha}.$$

Но тогда

$$d_\alpha \approx [|a_\alpha - b_\alpha|/R]^{(1+\beta)/(1+2\alpha)} \approx e^{u_\alpha} \xrightarrow{\alpha, \beta \rightarrow 0} 0.$$

Итак, двулистная часть образа $\Phi(\alpha, \beta; H)$ войдет в малую окрестность начала координат и будет там оставаться, уменьшаясь с уменьшением α . Весь образ $\Phi(\alpha, \beta; H)$ будет содержаться в полуплоскости H , причем граница будет как угодно близко прилегать к мнимой оси на сколь угодно большом отрезке $[-i\tilde{\rho}, i\tilde{\rho}]$. Поэтому $\Phi(\alpha, \beta; H) + i\pi$ будет двулистной областью в малой полукрестности точки $i\pi$. Обозначим ее через $\Delta_\alpha(w, i\pi)$ и добьемся за счет выбора α того, чтобы область $\Phi(\alpha, \beta; H) + i\pi$ имела непустое пересечение с симметричной (относительно вещественной оси) полукрестностью $\Delta_\alpha(w, -i\pi)$. Сами эти полукрестности выберем так, чтобы они склеивались функцией $f_0(\gamma, z)$ вида (3) при фиксированном значении γ . Тогда, при необходимости уменьшая α , добьемся того, что суперпозиция

$$\mathcal{F}_1(z) \equiv \mathcal{F}_1(\alpha, \beta, \gamma; z) = f_0(\gamma, \Phi(\alpha, \beta; z) + i\pi)$$

будет не менее, чем трехлистной в H .

Применив к ней процедуру получения функции $\Phi(\alpha, \beta; z)$, будем иметь

$$\Phi_1(\alpha_1, \beta_1; z) = \{\mathcal{F}_1(R_1 z)/R_1 - b_{1\alpha_1}/R_1\}^{1/(1+2\alpha_1)} - c_{1\alpha_1} + c_{1\alpha_1}, \quad c_{1\alpha_1} = [(1 - b_{1\alpha_1})/R_1]^{1/(1+2\alpha_1)},$$

которая является трехлистной в малой окрестности начала координат. Подходящая суперпозиция $f_0(\gamma_1, \Phi_1(\alpha_1, \beta_1; z) + i\pi)$ даст четырехлистную функцию и т.д.

Теперь покажем, что выбором α, β, γ можно добиться удовлетворения условия Беккера с коэффициентом, близким к единице. Для этого возьмем срезанную функцию

$$\mathcal{F}_1(z + \delta) = f_0(\gamma, \Phi(\alpha, \beta; z + \delta) + i\pi). \quad (15)$$

При малых δ эта функция сохранит трехлистность, и будет существовать вертикальная полоса $0 \leq \operatorname{Re} z \leq \xi$, внутри которой

$$\left| \frac{\mathcal{F}_1''}{\mathcal{F}_1'}(z + \delta) - \frac{\Phi''}{\Phi'}(\alpha, \beta; z + \delta) \right| \leq \frac{\varepsilon_1}{2 \operatorname{Re} z} \quad (16)$$

с малой величиной ε_1 .

Представление функции (15) приводит к соотношению (штрихами обозначены производные по z)

$$\frac{\mathcal{F}_1''}{\mathcal{F}_1'}(z + \delta) = \left[\frac{d^2 f_0}{d\Phi^2} / \frac{df_0}{d\Phi}(\gamma, \Phi(\alpha, \beta; z + \delta) + i\pi) \right] \Phi'(\alpha, \beta; z + \delta) + \frac{\Phi''}{\Phi'}(\alpha, \beta; z + \delta). \quad (17)$$

Оценки функций в (17) проведем в областях

$$\overline{D}_1 = \overline{H} \setminus \{z : |z| < \rho\} = \{z : \operatorname{Re} z \geq 0, |z| \geq \rho\},$$

$$\overline{D}_2 = \overline{D}(\xi, \rho) = \{z : \operatorname{Re} z \geq \xi, |z| \leq \rho\},$$

$$\overline{D}_3 = \{z : 0 \leq \operatorname{Re} z \leq \xi, |z| \leq \rho\},$$

объединением которых является замкнутая полуплоскость \overline{H} . Учтем еще (14) и неравенства (16), (4), а также

$$(13) \implies \left| \frac{\Phi''_{z^2}}{\Phi'_z}(\alpha, Rz) \right| \leq \frac{1 + 4\alpha}{2 \operatorname{Re} z}, \quad z \in H;$$

$$\left| \frac{\Phi''}{\Phi'}(\alpha, \beta; z) \right| \leq \beta \left| \frac{d}{dz} \ln[\Phi(\alpha, Rz)/R^{1/(1+2\alpha)} - c_\alpha] \right| + \left| \frac{\Phi''_{z^2}}{\Phi'_z}(\alpha, Rz) \right| \leq \frac{1 + 4\alpha + 4\beta}{2 \operatorname{Re} z}, \quad z \in H;$$

$$2 \operatorname{Re} z \left| \frac{f_0''}{f_0'}(z) \right| = \frac{2 \operatorname{Re} f_0(z) + 2 \ln |f_0(z) - 1|}{|f_0(z)|^2} \leq \frac{2}{|f_0(z)|} \left(1 + \frac{\ln |f_0(z) - 1|}{|f_0(z)|} \right) \leq \frac{4}{|f_0(z)|} \leq \frac{1}{A(\rho)}, \quad |z| \geq \rho,$$

причем выберем $4A(\rho) \leq \min_{|z|=\rho} \{|f_0(z)|, |f_0(\Phi(\alpha, \beta; z + \delta) + i\pi)|\}$ и $A(\rho) \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} \infty$.

Выпишем теперь оценки для выражения (17), используя дифференциальную форму леммы Шварца,

$$\left| \frac{\mathcal{F}_1''(z + \delta)}{\mathcal{F}_1'(z + \delta)} \right| \leq \frac{A_k |\Phi'(\alpha, \beta; z + \delta)|}{2 \operatorname{Re} \Phi(\alpha, \beta; z + \delta)} + \frac{B_k}{2 \operatorname{Re} z} \leq \frac{A_k + B_k}{2 \operatorname{Re} z}, \quad z \in \overline{D}_k, \quad k = 1, 2, 3.$$

При этом

$$A_1 = 1/A(\rho) + 4\gamma, \quad B_1 = 1/A(\rho) + 4\alpha + 4\beta; \quad A_2 = 1 + 4\gamma, \quad B_2 = \varepsilon_1; \quad A_3 = \varepsilon_1, \quad B_3 = 1 + 4\alpha + 4\beta.$$

Это значит, что выбором

$$4\alpha < \varepsilon/3, \quad 4\beta < \varepsilon/3, \quad 4\gamma < \varepsilon/3, \quad \varepsilon_1 < \varepsilon/3, \quad 2/A(\rho) < 1$$

добьемся того, чтобы $A_k + B_k < 1 + \varepsilon$ во всех трех случаях. Постоянные величины, характеризующие области D_k , выбираем в следующем порядке:

$$\rho \implies (2/A(\rho) < 1 \text{ в } \overline{D}_1); \quad \delta \text{ и } \xi \implies (A_3 = \varepsilon_1 < \varepsilon/3 \text{ в } \overline{D}_3); \quad \alpha < \varepsilon/3 \implies (B_2 = \varepsilon_1 < \varepsilon/3).$$

Тем самым обосновано неравенство (1) для трехлистной функции $\mathcal{F}_1(z + \delta)$. Аналогично проходит обоснование неравенства (1) для функций с большими порядками листности в форме последовательных суперпозиций $\mathcal{F}_{k+1}(z) = f_0(\gamma_k, \Phi_k(\alpha_k, \beta_k; z) + i\pi)$. \square

Ф.Г. Авхадиевым и И.Р. Каюмовым [7] представлен результат, аналогичный теореме 2 в применении к кругу. Этот результат получается из теоремы 2 как

Следствие. Функционал $\sup_{\zeta \in E} [(1 - |\zeta|^2)|f''(\zeta)/f'(\zeta)|]$ не является p -допустимым в круге $E = \{\zeta : |\zeta| < 1\}$ при $p > 2$.

Как и в [1], доказательство основано на исчерпании полуплоскости H кругами, которые получаются из E преобразованиями

$$\varphi_\rho(\zeta) = \frac{1 + \rho^2}{1 - \rho^2} + \frac{2\rho\zeta}{1 - \rho^2}, \quad \zeta \in E.$$

При ρ , близком к 1, функция $\mathcal{F}_1(\varphi_\rho(\zeta) + \delta)$ будет трехлистной в E (это очевидно) и будет удовлетворять в E условию Беккера с коэффициентом, мало превышающим 1. Действительно, пользуясь выкладками из [1], получим

$$\begin{aligned} (1 - |\zeta|^2) \left| \frac{d^2 \mathcal{F}_1}{d\zeta^2} / \frac{d\mathcal{F}_1}{d\zeta}(\varphi_\rho(\zeta) + \delta) \right| &\leq \frac{(1 + \varepsilon)(1 - |\zeta|^2)2\rho}{2 \operatorname{Re} \varphi_\rho(\zeta)(1 - \rho^2)} = \\ &= \frac{(1 + \varepsilon)\rho(1 - |\zeta|^2)}{1 + \rho^2 + 2\rho \operatorname{Re} \zeta} \leq \frac{(1 + \varepsilon)\rho(1 - |\zeta|^2)}{1 + \rho^2 - 2\rho|\zeta|} \leq (1 + \varepsilon)\rho, \end{aligned}$$

т. к. $1 - |\zeta|^2 \leq 1 + \rho^2 - 2\rho|\zeta| \iff (|\zeta| - \rho)^2 \geq 0$. Аналогичные выкладки можно провести для $\mathcal{F}_{k+1}(\varphi_\rho(\zeta) + \delta)$ при $k \geq 1$, т. е. в случае $p \geq 4$.

Две центральные идеи в изложенном доказательстве теоремы 2 заимствованы из доклада [7] и из статьи Ф.Г. Авхадиева и И.Р. Каюмова “Admissible functionals and infinite valent functions” (которая будет опубликована в журнале “Complex variables Theory Appl.”): 1) поведение суперпозиции $f_\varepsilon(\Phi(Rz)/R) = \mathcal{F}_\varepsilon(z)$, 2) обоснование оценок вида

$$\left| \frac{d^2 \mathcal{F}_\varepsilon}{dz^2} / \frac{d\mathcal{F}_\varepsilon}{dz} \right| \leq \frac{1 + \varepsilon}{1 - |z|^2}$$

для многолистных функций.

Дополнительно отметим, что Ф.Г. Авхадиев и И.Р. Каюмов ввели неудачный термин “катастрофичный” функционал, сославшись в [7] на книгу Ф.Г. Авхадиева [6] (однако в книге [6] этот термин отсутствует). Термин “катастрофичный” характеризует в лучшем случае не сами функционалы, а только окрестности экстремальных функций (типа $f_0(z)$ из теоремы 2) для этих

функционалов. Функции “общего положения” (не являющиеся экстремальными), которые входят в любой подкласс однолистных функций, определяемый соответствующим функционалом, катастрофичными не являются. Поэтому только окрестности экстремальных функций приводят к так называемым катастрофам¹ (катастрофичным объектам) Авхадиева-Каюмова и на “репутации” безупречных функционалов эти пограничные “катастрофы” отражаться не должны: ценность функционала определяется его внутренним содержанием!

2. В статьях Нехари [2] и Хилла [8] доказано достаточное условие однолистности функции $f(z)$, $z \in E$, в форме

$$|\{f, z\}| \leq 2/(1 - |z|^2)^2, \quad \{f, z\} = (f''/f')' - (f''/f')^2/2 \text{ — шварциан,} \quad (18)$$

и невозможность увеличения коэффициента 2 из-за бесконечнолистной функции

$$f_{i\beta} \left(\frac{1+z}{1-z} \right) = \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^{i\beta}, \quad \beta \neq 0, \quad \text{Im } \beta = 0, \quad (19)$$

для которой

$$\left\{ f_{i\beta} \left(\frac{1+z}{1-z} \right), z \right\} = \frac{2(1 + \beta^2)}{(1 - z^2)^2}.$$

В виде дополнения к анализу функции $f_{\alpha+i\beta} \left(\frac{1+z}{1-z} \right)$ из статьи Хилла [8] докажем утверждения, которые объединяет

Теорема 3. *Функции $f_{\alpha+i\beta}(z) = z^{\alpha+i\beta}$ являются m -листными в полуплоскости H при выполнении двух неравенств*

$$(|\alpha| - m + 1)^2 + \beta^2 > (m - 1)^2, \quad (|\alpha| - m)^2 + \beta^2 \leq m^2 \quad (m \geq 1).$$

При любом $m \geq 1$ (включая $m = \infty$) найдется m -листная функция $f_{\alpha+i\beta}(z)$ с $\alpha + i\beta$ из произвольно малой окрестности 0, которая расширяет условие Нехари в полуплоскости H

$$|\{f, z\}| \leq 2(2 \text{Re } z)^{-2}. \quad (20)$$

Функции $\frac{f_{\alpha+i\beta}(z)-1}{\alpha+i\beta}$ равномерно сходятся при $\alpha + i\beta \rightarrow 0$ внутри полуплоскости H к функции $\ln z$.

Доказательство. Докажем последовательно три утверждения, содержащиеся в формулировке теоремы 3.

1) Простой анализ функции e^w , периодической с периодом $2\pi i$, показывает, что эта функция будет m -листной в односвязной области D , которая является выпуклой в направлении мнимой оси, содержит вертикальный отрезок длины $2\pi(m - 1)$ и не содержит вертикального отрезка с длиной $2\pi m$, точнее, любой вертикальный отрезок длины $2\pi m$ можно расположить движением вверх-вниз так, чтобы его концы находились вне \overline{D} , в крайнем случае, на ∂D . В применении к функции

$$z^{\alpha+i\beta} = e^{(\alpha+i\beta) \ln z} = e^w, \quad w = u + iv,$$

найдем длину сечения мнимой осью $u = 0$ той полосы, которая получается из полуплоскости H под действием

$$w = (\alpha + i\beta) \ln z \implies u + iv = (\alpha + i\beta)(\ln |z| + i \arg z) = \alpha \ln |z| - \beta \arg z + i(\beta \ln |z| + \alpha \arg z).$$

Одна из точек пересечения границы полосы и мнимой оси при $\alpha \neq 0$ получится из системы

$$0 = u_0 = \alpha \ln |z| - \beta\pi/2, \quad v_0 = \beta \ln |z| + \alpha\pi/2$$

¹Примеры аналогичных “катастроф” дает ядерная сходимости областей, когда семейство бесконечнолистных областей сходится к однолистной области как к ядру. Правда, словосочетание “ядерная катастрофа” звучит совсем зловеще.

и поэтому

$$v_0 = \frac{\beta^2 \pi}{2\alpha} + \frac{\alpha \pi}{2} = \frac{\pi}{2} \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha}.$$

Так как длина сечения $l = 2|v_0| = \pi(\alpha^2 + \beta^2)/|\alpha|$, то из неравенств в условии теоремы получим

$$2|\alpha|(m-1) < \alpha^2 + \beta^2 \leq 2|\alpha|m \implies 2\pi(m-1) < l \leq 2\pi m,$$

т. е. условие m -листности функции $e^{(\alpha+i\beta)\ln z}$ выполнено. При $\alpha = 0$ длина сечения будет бесконечной, а соответствующая функция $\exp(i\beta \ln z)$ окажется бесконечнолистной.

2) Шварцман для функции $f_{\alpha+i\beta}(z)$ из (19) легко вычисляется

$$f''_{\alpha+i\beta}/f'_{\alpha+i\beta} = (\alpha + i\beta - 1)/z \implies \{f_{\alpha+i\beta}(z), z\} = [1 - (\alpha + i\beta)^2]/(2z^2)$$

и оценивается с использованием неравенства $|z| \geq \operatorname{Re} z$

$$|\{f_{\alpha+i\beta}(z), z\}| \leq \frac{2|1 - (\alpha + i\beta)^2|}{(2 \operatorname{Re} z)^2}, \quad z \in H.$$

Условие Нехари (20) нарушается за пределами круга $|\omega| \leq 1$,

$$\omega = 1 - (\alpha + i\beta)^2. \quad (21)$$

В плоскости $\alpha + i\beta$ этому кругу соответствуют две области, полученные преобразованием круга двумя ветвями функции $\alpha + i\beta = \sqrt{1 - \omega}$, с границей в виде лемнискаты. Окаймлению круга с помощью окружности $|\omega| = 1 + \varepsilon$ (точнее, двулистному кругу $|\omega| < 1 + \varepsilon$ с точкой ветвления $\omega = 1$) соответствует окаймленная лемниската. Две окружности $(\alpha \pm 1)^2 + \beta^2 = 1$ из криволинейной полосы окаймления высекают два криволинейных треугольника с нулевым углом при вершине 0. Части этих треугольников, которые заключены между окружностями

$$[\alpha \pm (m-1)]^2 + \beta^2 = (m-1)^2, \quad (\alpha \pm m)^2 + \beta^2 = m^2,$$

состоят из точек $\alpha + i\beta$, определяющих m -листные функции $f_{\alpha+i\beta}(z)$. Все точки мнимой оси (при $\alpha = 0, \beta \neq 0$) определяют бесконечнолистные функции $z^{i\beta}$.

Наглядной получается и картина в плоскости ω , где располагаются точки, определяющие нарушение условия Нехари (20) и соответствующие по формуле (21) тем значениям $\alpha + i\beta$, которые приводят к m -листным функциям $z^{\alpha+i\beta}$. Заметим, что окружности $(\alpha - m)^2 + \beta^2 = m^2$ перейдут под действием преобразования (21) в кардиоиды с угловой точкой 1. Кардиоида, которая получается при $m = 1$, содержит круг $|\omega| < 1$ и содержится в круге $|\omega| \leq 3$. Как отмечено в [8], точка $\omega = -3$ является единственной точкой кардиоиды $\omega = 1 - (1 + e^{i\theta})^2$, лежащей на окружности $|\omega| = 3$. Этой точке поставлена в соответствие функция z^2 , которая в суперпозиции с дробно-линейной функцией приводит к функции Кебе

$$\left[\left(\frac{1+z}{1-z} \right)^2 - 1 \right] / 4 = \frac{z}{(1-z)^2}.$$

Точки, порождающие функции любой листности с малым нарушением условия (18) или (20), располагаются между соседними кардиоидами в треугольнике с нулевым углом при точке 1 и со стороной, лежащей на окружности $|\omega| = 1 + \varepsilon$ против этого угла.

3) Разлагая функцию $f_{\alpha+i\beta}(z)$ в ряд по малому параметру $\alpha + i\beta$, получим

$$z^{\alpha+i\beta} = e^{(\alpha+i\beta)\ln z} = 1 + (\alpha + i\beta) \ln z + \frac{[(\alpha + i\beta) \ln z]^2}{2} + \dots$$

Отсюда видна сходимость

$$\lim_{\alpha+i\beta \rightarrow 0} \frac{z^{\alpha+i\beta} - 1}{\alpha + i\beta} = \ln z.$$

Предельная функция удовлетворяет условию Нехари

$$|\{\ln z, z\}| = \frac{1}{2|z|^2} \leq \frac{2}{(2 \operatorname{Re} z)^2}, \quad z \in H.$$

Сходимость будет равномерной в каждой замкнутой подобласти из H , т. к. на каждой такой подобласти семейство $\{[z^{\alpha+i\beta} - 1]/(\alpha + i\beta)\}$ является компактным семейством в топологии локально равномерной сходимости. Семейство областей, которые являются образами H при отображении функциями $\mathcal{F}_{\alpha+i\beta}(z) = \frac{z^{\alpha+i\beta}-1}{\alpha+i\beta}$, сходится к горизонтальной полосе $\ln H$ как к ядру ([5], с. 56). Стремление $\alpha + i\beta \rightarrow 0$ можно осуществить так, чтобы функции, образующие семейство $\{\mathcal{F}_{\alpha+i\beta}(z)\}$, имели либо одинаковый порядок листности (конечный или бесконечный), либо различные порядки листности. Рассмотрим подробнее случай бесконечнолистного семейства $\mathcal{F}_{i\beta}(z) = -i(z^{i\beta} - 1)/\beta$, $\beta > 0$.

Образ полуплоскости H при действии функцией $\mathcal{F}_{i\beta}(z)$ будет бесконечнолистным кольцом, граничные окружности которого проходят через точки

$$i(1 - e^{-\pi\beta/2})/\beta \quad \text{и} \quad -i(e^{\pi\beta/2} - 1)/\beta,$$

а центр находится в точке i/β . В пределе получится однолистная полоса, а допредельной области будет принадлежать часть бесконечнолистной полосы, проекция которой целиком лежит в полосе

$$\{w : -\pi/2 < \operatorname{Im} w < \pi/2\}. \quad \square$$

Замечание. Интересно отметить, что функция $\mathcal{F}_{i\beta}(z)$ является автоморфной относительно группы преобразований подобия

$$T_k(z) = R^k z, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Фундаментальной областью этой группы, принадлежащей полуплоскости H , будет полукольцо $\{z : 1/\sqrt{R} < |z| < \sqrt{R}, \operatorname{Re} z \geq 0\}$, которое отображается функцией $\mathcal{F}_{i\beta}(z)$ на кольцо с разрезом. Из условия автоморфности следует

$$\mathcal{F}_{i\beta}(Rz) = \mathcal{F}_{i\beta}(z) \implies e^{i\beta \ln R} e^{i\beta \ln z} = e^{i\beta \ln z} \implies i\beta \ln R = i2\pi, \quad R = e^{2\pi/\beta}.$$

Значит, одной из фундаментальных областей является центральное полукольцо с радиусами окружностей $e^{-\pi/\beta}$ и $e^{\pi/\beta}$. В пределе при $\beta \rightarrow 0$ это полукольцо займет всю полуплоскость H .

Рассуждение с преобразованием фундаментальных областей дает новое пояснение ядерности семейства областей $\mathcal{F}_{i\beta}(H)$ и равномерной сходимости $\{\mathcal{F}_{i\beta}(z)\}$ внутри H .

Дадим характеристику течения, которое является конформным перенесением невозмущенного потока из полуплоскости H со скоростью на бесконечности $\vec{V}(\infty) = -i$ в плоскость $w = z^{\alpha+i\beta}$. Это течение характеризуется тем, что при $\beta \neq 0$ на граничных струях происходит разрыв скорости течения (при $\alpha = 1$) или отношение скоростей (при $\alpha \neq 1$) в точке, соответствующей точке $z = 0$, при подходе к 0 сверху и снизу отличается от единицы. Действительно,

$$\left| \frac{\vec{V}(w(i\rho))}{\vec{V}(w(-i\rho))} \right| = \left| \frac{w'(i\rho)}{w'(-i\rho)} \right|^{-1} = \frac{|\exp[(\alpha - 1 + i\beta)(\ln \rho - i\pi/2)]|}{|\exp[(\alpha - 1 + i\beta)(\ln \rho + i\pi/2)]|} = e^{\beta\pi} \neq 1$$

при всех ρ , в том числе и в пределе при $\rho \rightarrow 0$.

Из гидромеханики известно ([9], гл. IV), что такие течения характеризуются однолистными или многолистными потоками между спиралями. Для подтверждения приведем цитату из ([9], с. 86): "... особенность типа $\zeta^{i/\beta}$ представляет собой единственную возможность локального соединения двух свободных линий тока с различными скоростями."

3. Кратко изложим гидромеханическую версию нарушения условий Беккера во внешности единичного круга. Это условие в области $E^- = \{z : |z| > 1\}$ для функции $F(z)$, регулярной в $E^- \setminus \{\infty\}$ и с полюсом первого порядка в ∞ , записывается в виде неравенства

$$\left| \frac{F''(z)}{F'(z)} \right| \leq \frac{1}{|z|^2 - 1}. \quad (22)$$

Функция, которая достигает знак равенства в (22) и которая является неодолистной в замкнутой области $\overline{E^-}$, имеет вид [1]

$$F_0(z) = \sqrt{z^2 - 1}.$$

По этой функции можно построить комплексный потенциал течения с диполем на ∞ и со скоростью невозмущенного потока $\vec{V}(\infty) = 1$. Проще представить преобразование потока, обтекающего круг, в поток, обтекающий профиль, у которого две боковые стороны имеют одну общую точку (в которую переходят ± 1). К течению на римановой поверхности придем, если возьмем измененную функцию в виде

$$F_\varepsilon(z) = \int_a^z \left(\frac{z}{\sqrt{z^2 - 1}} \right)^{1+\varepsilon} dz, \quad |a| \geq 1, \quad 0 < \varepsilon < 1. \quad (23)$$

При этом левая боковая сторона профиля сместится направо, а правая боковая сторона — налево.

В [10] изучалось поведение аналогичных профилей по распределению скоростей $V_\lambda(\theta) = \sin^\lambda \theta$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$ (с симметричными продолжениями на $(\pi/2, \pi)$ и далее на $(\pi, 2\pi)$), $0 \leq \lambda < 2$. Там же приведены последовательные стадии измененных профилей при $\lambda \in [0, 2)$. Отображающие функции, соответствующие распределению $V_\lambda(\theta)$, имеют вид

$$\begin{aligned} \ln \frac{df}{dz} &= -\frac{1-\lambda}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln(2|\sin \theta|) \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\theta + \ln C_\lambda = -(\lambda-1) \ln(1 - 1/z^2) + \ln C_\lambda, \\ \frac{df}{dz} &= C_\lambda \left(\frac{z^2}{z^2 - 1} \right)^{\lambda-1} \end{aligned} \quad (24)$$

и

$$f(z, \lambda) = C_\lambda \int_a^z \left(\frac{z^2}{z^2 - 1} \right)^{\lambda-1} dz + A_\lambda.$$

В частности, $f(z, 3/2) = CF_0(z) + A$. Функция $f(z, \lambda)$ при $3/2 < \lambda < 2$ отображает E^- на область, занятую двулиственным потоком. Сравнивая (23) и (24), имеем $\lambda - 1 = (1 + \varepsilon)/2$, $\varepsilon = 2\lambda - 3$, поэтому $\lambda \in [3/2, 2) \iff \varepsilon \in [0, 1)$.

Аналогичное гидромеханическое истолкование получают экстремальная функция $\Phi_0(z)$, для которой

$$|\{\Phi_0(z), z\}| \leq \frac{2}{(|z|^2 - 1)^2}, \quad z \in E^-, \quad (25)$$

и неодолистная функция

$$\Phi_\varepsilon(z) = \int_1^z [\Phi_0'(z)]^{1+\varepsilon} dz, \quad \varepsilon > 0,$$

для условия Нехари во внешности единичного круга.

Несложными вычислениями убедимся, что за $\Phi_0(z)$ можно взять функцию $2/\ln \frac{z+1}{z-1}$. Она отображает E^- на внешность двух касающихся окружностей, причем $\Phi_0(\infty) = \infty$, $\Phi_0'(\infty) = 1$ и $\{\Phi_0(z), z\} = 2/(z^2 - 1)^2$. Шварцман вычисляется следующим образом:

$$\{\Phi_0(z), z\} = \left\{ 1/\Phi_0\left(\frac{1}{z}\right), \frac{1}{z} \right\} \frac{1}{z^4} = \left\{ \frac{1}{2} \ln \frac{1+\zeta}{1-\zeta}, \zeta \right\} \Big|_{\zeta=1/z} \frac{1}{z^4} = \frac{2}{(1-\zeta^2)^2} \Big|_{\zeta=1/z} \frac{1}{z^4} = \frac{2}{(z^2-1)^2}.$$

Интересно отметить, что для функции

$$\Psi_{i\beta}(z) = 2i\beta / \left[\left(\frac{z+1}{z-1} \right)^{i\beta} - 1 \right]$$

получим $\{\Psi_{i\beta}(z), z\} = \frac{2+2\beta^2}{(z^2-1)^2}$ и $\lim_{\beta \rightarrow 0} \Psi_{i\beta}(z) = \Psi_0(z) \equiv \Phi_0(z)$. Однако функция $\Psi_{i\beta}(z)$, являясь бесконечнолистной функцией при любом $\beta \neq 0$, будет иметь бесчисленное множество полюсов в E^- , а функция, связанная с условием Нехари вида (25), должна иметь один полюс в ∞ .

Благодарю профессора С.Р. Насырова за ценные замечания и профессора А.М. Елизарова за обсуждение результатов статьи.

Примечание при корректуре. В статье Stowe D. *Injectivity and the pre-schwarzian derivative* // Michigan Math. J. – 1998. – V. 45. – № 3. – P. 537–546 из журнала, только что полученного библиотекой Казанского университета, на с. 539 содержится вывод улучшенного неравенства (4) с заменой коэффициента $1 + 4\gamma$ на $1 + 8\gamma/3$.

Литература

1. Becker J., Pommerenke Ch. *Schlichtheitskriterien und Jordangebiete* // J. reine und angew. Math. – 1984. – Bd. 354. – S. 74–94.
2. Nehari Z. *The Schwarzian derivative and schlicht functions* // Bull. Amer. Math. Soc. – 1949. – V. 55. – № 6. – P. 545–551.
3. Евграфов М.А., Бежанов К.А., Сидоров Ю.В. и др. *Сборник задач по теории аналитических функций*. – 2-е изд. – М.: Наука, 1972. – 415 с.
4. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. *Методы теории функций комплексного переменного*. – 5-е изд. – М.: Наука, 1987. – 688 с.
5. Голузин Г.М. *Геометрическая теория функций комплексного переменного*. – М.: Наука, 1966. – 628 с.
6. Авхадиев Ф.Г. *Конформные отображения и краевые задачи*. – Казань: Казанск. фонд “Математика”, 1996. – 216 с.
7. Авхадиев Ф.Г., Каюмов И.Р. *О бесконечнолистных функциях*¹ / Материалы конференции, посвященной 100-летию со дня рождения Б.М. Гагаева. – Казань, 1997. – С. 9–10.
8. Hille E. *Remarks on a paper by Zeev Nehari* // Bull. Amer. Math. Soc. – 1949. – V. 55. – № 6. – P. 552–553.
9. Биркгоф Г., Сарантонелло Э. *Струи, следы и каверны*. – М.: Мир, 1946. – 466 с.
10. Аксентьев Л.А., Решетников Ю.А. *Об однолистной разрешимости обратной задачи гидромеханики* // Тр. семин. по краевым задачам. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та. – 1971. – Вып. 8. – С. 12–21.

Казанский государственный
университет

Поступила
28.01.1998

¹ В РЖ “Математика”, 1999, № 3 содержится перепечатка этих тезисов в виде реферата авторов ЗБ109.