ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 9 (460)

УДК 517.12.252

Н.А. ЕРЗАКОВА

МЕРЫ НЕКОМПАКТНОСТИ В ИССЛЕДОВАНИИ НЕРАВЕНСТВ

Введение

В ([1], с. 74) рассматриваются банаховы пространства E_0, E, E_1, причем $E_0 \subset E \subset E_1$, и вложение E_0 в E компактно. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такая постоянная c_ε, что для всех $v \in E_0$

$$\|v\|_E \leq \varepsilon \|v\|_{E_0} + c_\varepsilon \|v\|_{E_1}. \tag{1}$$

В ([2], с. 154) изложен результат Ю.А. Дубинского, в котором E_0 заменяется множеством $\Im$, снабженным функцией $M : \Im \to R^+$, причем $\Im \subset E \subset E_1$, $M(v) \geq 0$,

$$M(\lambda v) = |\lambda| M(v) \tag{2}$$

для всех $v \in \Im$, множество $\Im_1$ относительно компактно в E, где

$$\Im_k = \{v \in \Im : M(v) \leq k\} \tag{3}$$

для всех $k \geq 0$. При этих условиях для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такая постоянная c_ε, что

$$\|u - v\|_E \leq \varepsilon(M(u) + M(v)) + c_\varepsilon \|u - v\|_{E_1} \tag{4}$$

для всех u, v из $\Im$.

Замечание 1 ([2], с. 154). Пусть $\Im = E_0$, M — норма в E_0. Тогда из неравенства (4) получается неравенство (1).

Введем величины

$$\tau(U) = \sup_{v \in U} M(v), \quad \widetilde{\tau}(U) = \inf_{v \in U} M(v).$$

Определение 1. Множество $U \subset \Im$ назовем M-ограниченным, если $\tau(U) < \infty$.

Определение 2. Будем говорить, что множество $U \subset \Im$ обладает M-свойством, если оно M-ограничено и $\widetilde{\tau}(U) > 0$.

Определение 3. Оператор (вообще говоря нелинейный) $A : \Im \to E$ назовем M-ограниченным, если любое M-ограниченное множество $U \subset \Im$ переводится оператором A в ограниченное подмножество пространства E.

Не предполагая (2), а также вложение $\Im_k$ компактным в E, будем исследовать условия справедливости утверждения: для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такая постоянная c_ε, что

$$\|Au - Av\|_E \leq \varepsilon(M(u) - M(v)) + c_\varepsilon ||u - v||_{E_1} \tag{5}$$

для всех u, v из произвольного множества $U \subset \Im$, обладающего M-свойством.

Замечание 2. В неравенстве (5) для каждого $\varepsilon > 0$ постоянная c_ε, вообще говоря, зависит еще и от U.

Если A — линейный оператор, выполнено (2), кроме того,

$$M(v) > 0 \quad (v \neq 0), \tag{6}$$

то справедливость неравенства (5) для любого множества $U \subset \Im$, обладающего M-свойством, влечет его справедливость для всех u, v из $\Im$ с одной и той же постоянной c_ε. Поскольку в ([2], с. 154) в силу предположения (2) и относительной компактности $\Im_1$ имеет место (6), неравенства (1) и (4) являются частными случаями неравенства (5).

Отличительной чертой исследований, проводимых в данной работе, является применение мер некомпактности.

Определение 4 ([3], с. 20). Пусть E — банахово пространство, а U — ограниченное подмножество E. Мерой некомпактности $\beta_E(U) = \beta(U)$ множества U называется супремум тех $r > 0$, для которых в U существует такая бесконечная последовательность $\{u_n\}$, что $\|u_n - u_m\| \geq r$ для всех $n \neq m$.

Мерой некомпактности Хаусдорфа $\chi_E(U) = \chi(U)$ множества U называется инфимум всех $\varepsilon > 0$, при которых U имеет в E конечную ε-сеть.

Итак, в ([1], с. 71; [2], с. 154) приведены достаточные условия справедливости неравенств (1) и (4), цель же данной работы — получить необходимые и достаточные условия справедливости обобщающего неравенства (5).

1. Основные результаты

Теорема 1. *Пусть A — M-ограниченный оператор из $\Im$ в E. Неравенство* (5) *справедливо, если и только если выполнено следующее условие:*

если последовательности $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ обладают M-свойством и, кроме того,

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - v_n\|_{E_1} = 0, \tag{7}$$

то

$$\varliminf_{n\to\infty} \|Au_n - Av_n\|_E = 0. \tag{8}$$

Доказательство. Предположим, что условие теоремы выполнено. Для доказательства справедливости неравенства (5) предположим противное: неравенство (5) не выполнено. Последнее означает, что найдутся множество U, обладающее M-свойством, $\varepsilon > 0$, последовательности элементов $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ ($u_n \in U$, $v_n \in U$ для каждого n) и чисел $\{c_n\}$ ($c_n \to \infty$), для которых справедливо неравенство

$$\|Au_n - Av_n\|_E > \varepsilon(M(u_n) - M(v_n)) + c_n\|u_n - v_n\|_{E_1} \tag{9}$$

при всех n.

По предположению оператор A является M-ограниченным. Так как $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ обладают M-свойством и, следовательно, M-ограничены, то последовательности $\{Au_n\}$, $\{Av_n\}$ равномерно ограничены в E. Отсюда последовательность $\{Au_n - Av_n\}$ также равномерно ограничена в E. В силу неравенства (9) и предположения о том, что $c_n \to \infty$, последнее возможно, если $\|u_n - v_n\|_{E_1} \to 0$. Поэтому имеет место (8). Полученное противоречие с (9) завершает доказательство.

Предполагая теперь неравенство (5) выполненным, докажем справедливость условия теоремы. Пусть последовательности $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ обладают M-свойством. Это означает, что найдутся числа $0 < r \leq R$, для которых справедливо неравенство $r \leq M(u_n) + M(v_n) \leq R$ при всех n. И пусть, кроме того, имеет место (7). Покажем, что справедливо (8).

С целью построения нужной подпоследовательности для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем из $\{Au_n - Av_n\}$ элемент $Au_{n_\varepsilon} - Av_{n_\varepsilon}$ с номером n_ε, удовлетворяющим неравенству

$$\|u_{n_\varepsilon} - v_{n_\varepsilon}\|_{E_1} \leq \varepsilon / c_\varepsilon,$$

где c_ε — постоянная из (5). Из неравенства (5) получим

$$\|Au_{n_\varepsilon} - Av_{n_\varepsilon}\|_E \leq \varepsilon R + \varepsilon,$$

откуда следует справедливость условия теоремы. $\square$

В последующих результатах этого параграфа не предполагается, что множество $U \subset \Im$ обладает M-свойством.

Теорема 2. *Пусть задан M-ограниченный оператор $A : \Im \to E$. Пусть для некоторого $\varepsilon > 0$ найдется такая постоянная c_ε, что неравенство* (5) *справедливо для всех u, v из $\Im$. Тогда для этих же постоянных ε и c_ε имеет место неравенство*

$$\beta_E(AU) \leq 2\varepsilon\tau(U) + c_\varepsilon \beta_{E_1}(U) \tag{10}$$

для каждого множества $U \subseteq \Im$.

Доказательство. Итак, пусть неравенство (5) справедливо для всех u, v из $\Im$. Пусть U — произвольное подмножество $\Im$. Если $\beta_E(AU) = 0$, то утверждение очевидно. Пусть $\beta_E(AU) > 0$. По определению меры некомпактности β_E для произвольного $0 < \delta < \beta_E(AU)$ найдется такая последовательность $\{Au_n\} \subset AU$, что для всех $n \neq m$

$$\beta_E(AU) - \delta \leq \|Au_n - Av_m\|_E.$$

Из определения β нетрудно вывести, что в $\{u_n\}$ можно выбрать элементы $\widetilde{u}_n$, $\widetilde{u}_m$, удовлетворяющие неравенству

$$\|\widetilde{u}_n - \widetilde{u}_m\|_{E_1} \leq \beta_{E_1}(U) + \delta.$$

По предположению для некоторых ε и c_ε справедливо неравенство (5). Поэтому, применяя неравенство (5), получим

$$\beta_E(AU) - \delta \leq \|A\widetilde{u}_n - A\widetilde{u}_m\|_E \leq \varepsilon(M(\widetilde{u}_n) + M(\widetilde{u}_m)) + c_\varepsilon\|\widetilde{u}_n - \widetilde{u}_m\|_{E_1} \leq 2\varepsilon\tau(U) + c_\varepsilon(\beta_{E_1}(U) + \delta),$$

откуда в силу произвольности выбора δ следует (10). $\square$

Предложение 1. *Пусть для всех $\varepsilon > 0$ найдется такая постоянная c_ε, что для каждого $U \subseteq \Im$ имеет место неравенство* (10). *Тогда если $U \subseteq \Im$ является M-ограниченным и относительно компактным в E_1, то AU также относительно компактно в E.*

Доказательство. Допустим, что $U \subseteq \Im$ относительно компактно в E_1. Тогда в силу правильности меры некомпактности β_E ([2], с. 7) получим $\beta_{E_1}(U) = 0$. Отсюда и из неравенства (10) справедливо неравенство $\beta_E(AU) \leq \varepsilon\tau(U)$. Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то $\beta_E(AU) = 0$. Это означает, что AU относительно компактно в E. $\square$

2. Приложения для линейного оператора

Предложение 2. *Пусть множество $\Im_k$, определенное равенством* (3), *относительно компактно в E для всех $k \geq 0$, $E = E_0$, A — тождественный оператор, тогда справедливо неравенство* (5) *для U, обладающих M-свойством.*

Доказательство. В предположениях доказываемого утверждения выполнено условие теоремы 1. Действительно, если последовательности $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ обладают M-свойством и, кроме того, имеет место (7), то в силу относительной компактности последовательностей $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ в E имеем

$$\varliminf_{n\to\infty} \|u_n - v_n\|_E = 0.$$

Отсюда, учитывая эквивалентность условия теоремы 1 неравенству (5), получаем справедливость (5). $\square$

Замечание 3. Принимая во внимание замечания 1, 2, приходим к выводу, что предложение 2 является обобщением теоремы 16.4 из ([1], с. 126) и леммы 12.1 из ([2], с. 154), в которой предполагается (2).

Теорема 3. *Пусть A — оператор вложения из E_0 в E, $\Im = E_0$, M — норма в E_0, и любое множество U, ограниченное в E_0 и относительно компактное в E_1, также относительно компактно в E. Тогда выполнено неравенство* (5) *для всех u и v.*

Доказательство. Предполагая все предположения теоремы 3 выполненными, покажем справедливость условия теоремы 1. Пусть последовательность $\{u_n - v_n\}$ такова, что $u_n, v_n \in E_0$ для всех n, $0 < r \le \|u_n\|_{E_0} + \|v_n\|_{E_0} \le R$ для некоторых r и R и, кроме того, имеет место (7). Но тогда, поскольку $\{u_n - v_n\}$ относительна компактна в E_1, по предположению доказываемой теоремы $\{u_n - v_n\}$ также относительно компактна в E и для некоторой подпоследовательности $\{\widetilde{u}_n - \widetilde{v}_n\}$ найдется такой элемент $u_0 \in E$, что $\lim\limits_{n\to\infty} \|(\widetilde{u}_n - \widetilde{v}_n) - u_0\|_E = 0$. В силу вложения $E \subset E_1$ имеем также $\lim\limits_{n\to\infty} \|(\widetilde{u}_n - \widetilde{v}_n) - u_0\|_{E_1} = 0$. Отсюда, учитывая свойство единственности предела, $u_0 = 0$, т. е. выполнено условие теоремы 1, которое эквивалентно неравенству (5). Принимая во внимание замечание 2, получим утверждение теоремы 3. $\square$

Следствие 1. Пусть A — оператор вложения из E_0 в E, $\Im = E_0$, M — норма в E_0. Тогда неравенство (1) эквивалентно каждому из трех условий:

1′. для любой ограниченной последовательности $\{u_n\}$ из E_0, удовлетворяющей равенству $\lim\limits_{n\to\infty} \|u_n\|_{E_1} = 0$, имеем также $\varliminf\limits_{n\to\infty} \|u_n\|_E = 0$;

2′. для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такая постоянная c_ε, что для каждого $U \subset E$, равномерно ограниченного в E_0, справедливо неравенство $\beta_E(U) \le \varepsilon\beta_{E_0}(U) + c_\varepsilon\beta_{E_1}(U)$;

3′. любое множество U, ограниченное в E_0 и относительно компактное в E_1, также относительно компактно в E.

Пример. Покажем, что в ([1], с. 71; [2], с. 154) предположения относительно компактности не являются необходимыми.

Рассмотрим на отрезке $(0,1)$ пространства Лебега L_∞, L_2, L_1. Известно, что имеет место вложение $L_\infty \subset L_2 \subset L_1$. Вложение L_∞ в L_2 некомпактно. Действительно, ограниченная по норме в L_∞ последовательность функций Радемахера $\{u_n\}$, где $u_n(t) = \operatorname{sign}\sin 2^{n-1}\pi t$, имеет в пространстве L_2 меру некомпактности β, равную, как легко видеть, $2^{1/2}$.

Однако непосредственно проверяется справедливость утверждения: для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такая постоянная c_ε, что для всех $v \in L_\infty$

$$\|v\|_{L_2} \le \varepsilon\|v\|_{L_\infty} + c_\varepsilon\|v\|_{L_1}.$$

В завершение работы приведем приложения полученных результатов к оператору вложения пространств Соболева.

Пусть Ω — область в $\mathcal{R}^n$ с конечной мерой Лебега, т. е. $m(\Omega) < \infty$, $L^{l,p}(\Omega) = L^{l,p}$ $(1 \le p < \infty)$ — множество таких обобщенных функций на Ω, что $\|\nabla_l u\|_{L_p} < \infty$, где

$$\|\nabla_l u\|_{L_p} = \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha u(x)|^p dx\right)^{1/p}.$$

Пусть $W^{k,p}(\Omega) = W^{k,p}$ — пространство Соболева с нормой

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{l=0}^{k} \|\nabla_l u\|_{L_p}^p\right)^{1/p}.$$

Пусть $0 \le k \le l < s$. В ([4], с. 33) для ограниченной области Ω с кусочно-гладкой границей приводится неравенство Эрлинга–Ниренберга

$$\|u\|_{W^{l,p}} \le \varepsilon \|u\|_{W^{s,p}} + c_\varepsilon \|u\|_{W^{k,p}}, \tag{11}$$

справедливое для всех $\varepsilon > 0$.

В силу определения нормы в пространстве Соболева всегда имеет место вложение $W^{s,p} \subset W^{l,p} \subset W^{k,p}$ при $0 \le k \le l < s$. Однако если не предполагать границу области кусочно-гладкой, то, как следует из ([5], с. 212), вложение $W^{s,p}$ в $W^{l,p}$ при $l < s$ может оказаться некомпактным.

Следствие 2. Неравенство (11) справедливо тогда и только тогда, когда относительная компактность каждого ограниченного подмножества $W^{s,p}$ в $W^{k,p}$ влечет его относительную компактность в $W^{l,p}$.

Для полноты освещения затронутого вопроса использования мер некомпактности в неравенствах докажем аналог неравенства Эрлинга–Ниренберга, справедливый также для некомпактного оператора вложения $W^{s,2}$ в $W^{l,2}$.

Пусть C — пространство всех постоянных функций на Ω и пусть оператор вложения

$$I : L^{1,2}/C \to L_2/C \tag{12}$$

ограничен. Пусть $C^{0,1}(\Omega) = C^{0,1}$ — пространство функций, удовлетворяющих условию Липшица на любом компактном подмножестве множества Ω. Для произвольного $T > 0$ и $u \in L_2$ пусть $D(u,T) = \{x \in \Omega : |u(x)| > T\}$, а для произвольного $\varepsilon > 0$ обозначим

$$U(\varepsilon) = \sup_{m(D)<\varepsilon} \sup\{\|U\|_{L_2} : u \in C^{0,1},\ \operatorname{supp} u \subseteq D,\ \|\nabla u\|_{L_2} = 1\}. \tag{13}$$

Из теоремы 4 работы [6] следует, что

$$\inf\{U(\varepsilon) : \varepsilon > 0\} = \chi(IS),$$

где $\chi(IS)$ — мера некомпактности Хаусдорфа (определение 4) множества $\{u \in L^{1,2} : \|\nabla u\|_{L_2} = 1\}$, вычисленная в фактор-пространстве L_2/C. Величина $\chi(IS)$ является характеристикой степени некомпактности оператора I, поскольку обращается в нуль, если и только если оператор (12) компактен.

Предложение 3. *Для любых $\varepsilon > 0$ и $u \in L_2 \cap L^{l+1,2}$ справедливо неравенство*

$$\|u\|_{W^{l,2}} \le C(U(\varepsilon), n)\|\nabla_{l+1} u\|_{L_2} + c_\varepsilon \|u\|_{L_2},$$

где $C(U(\varepsilon), n)$ зависит только от $U(\varepsilon)$ и n и, в частности,

$$C(U(\varepsilon), n) = aU(\varepsilon)/(1 - aU(\varepsilon)),$$

если $aU(\varepsilon) < 1$ $(a = n^{1/2} + 1)$.

Доказательство. Так же как в теореме 4.8.2 из ([5], с. 203), для произвольно выбранных $\varepsilon > 0$ и $u \in L_2 \cap L^{l+1,2}$ положим $T = \inf\{t : m(D(u,t)) \le \varepsilon\}$. В силу теоремы 1.1.1 из ([5], с. 16) без ограничения общности можем предполагать, что $u \in C^\infty(\Omega)$. Из (13) имеем

$$\|u\|_{L_2} \le \|\,|u| - T\|_{L_2(D(u,T))} + \|\,|u| - T\|_{L_2(\Omega \setminus D(u,T))} + T[m(\Omega)]^{1/2} \le U(\varepsilon)\|\nabla u\|_{L_2} + 2T[m(\Omega)]^{1/2}.$$

Обозначим через Ω_ε такую ограниченную подобласть Ω с границей класса $C^{0,1}$, что $m(\Omega \setminus \Omega_\varepsilon) < \varepsilon/2$. Так как $m[D(u,T)] \ge \varepsilon$, то $m[D(u,T) \cap \Omega_\varepsilon] \ge \varepsilon/2$. Следовательно, $\|u\|_{L_r(\Omega_\varepsilon)} \ge 2^{-1/r} T \varepsilon^{1/r}$ для произвольного $r \ge 1$. Поэтому

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} \le U(\varepsilon)\|\nabla u\|_{L_2(\Omega)} + 2^{1-1/r}[m(\Omega)]^{1/2}\|u\|_{L_r(\Omega)},$$

где оператор вложения из $L^{1,2}(\Omega_\varepsilon)$ в $L_r(\Omega_\varepsilon)$ компактен. Дальнейшие рассуждения аналогичны рассуждениям, проведенным при доказательстве леммы 4.10.2 из ([5], с. 211). $\square$

Замечание 4. Предложение 3 обобщает лемму 4.10.2 из ([5], с. 211) на случай некомпактного оператора вложения (12).

Как показано в [6], для доказательства разрешимости задачи Неймана в некоторых случаях не нужно требовать справедливость (11) для всех $\varepsilon > 0$. Достаточно, чтобы $\chi(IS)$ была меньше заданной величины.

Литература

1. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. *Неоднородные граничные задачи и их приложения.* – М.: Мир, 1971. – 371 с.
2. Лионс Ж.-Л. *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.* – М.: Мир, 1972. – 588 с.
3. *Меры некомпактности и уплотняющие операторы* / Под ред. Р.Р. Ахмерова, М.И. Каменского, А.С. Потапова, Б.Н. Садовского и др. – Новосибирск: Наука, 1986. – 265 с.
4. Березанский Ю.М. *Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов.* – Киев: Наук. думка, 1965. – 798 с.
5. Мазья В.Г. *Пространства С.Л. Соболева.* – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985. – 415 с.
6. Yerzakova N.A. *On measures of non-compactness in regular spaces* // Zeitshcr. Anal. Anw. – 1996. – V. 15. – № 2. – P. 299–307.

Хабаровский государственный технический университет

Поступила 22.01.1999