И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

1999 МАТЕМАТИКА № 9 (448)

УДК 513.8

А.Я. НАРМАНОВ

О ГЕОМЕТРИИ ВПОЛНЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ РИМАНОВЫХ СЛОЕНИЙ

Пусть M — гладкое связное приводимое риманово многообразие. Тогда на M существуют два параллельных слоения, взаимно дополнительных по ортогональности ([1], с. 173). Если M полно и односвязно, то имеет место теорема де Рама, которая утверждает, что M изометрично прямому произведению любых двух слоев из разных слоений ([1], с. 180). В этом случае оба слоения являются римановыми и вполне геодезическими одновременно. В данной работе изучается риманово вполне геодезическое слоение на M, причем полная интегрируемость дополнительного ортогонального распределения не предполагается. В статье всюду гладкость означает гладкость класса C^∞.

1. Пусть M — гладкое связное полное риманово многообразие размерности n с римановой метрикой g, ∇ — связность Леви-Чивита, F – гладкое слоение размерности k на M ([2]; [3], с. 24). Обозначим через $L(p)$ слой слоения F, проходящий через точку p, $F(p)$ — касательное пространство слоя $L(p)$ в точке p, $H(p)$ — ортогональное дополнение $F(p)$ в T_pM, $p \in M$. Возникают два подрасслоения (гладкие распределения) $TF = \{F(p) : p \in M\}$, $H = \{H(p) : p \in M\}$ касательного расслоения TM такие, что $TM = TF \oplus H$, где H является ортогональным дополнением TF. По определению слоения, для каждой точки $p \in M$ существует окрестность U точки p и локальная система координат $(x^1, x^2, \dots, x^k, y^1, y^2, \dots, y^{n-k})$ на U такие, что $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^k}\}$ образует базис для гладких сечений $TF|_U$ (сужение TF на U) [2]. Пусть $\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^k$ — гладкие дифференциальные I-формы, $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m$ — гладкие векторные поля на U такие, что $\{\omega^i, dy^\alpha\}$ образуют локальный базис для сечений кокасательного расслоения, $\{\frac{\partial}{\partial x^i}, \nu_\alpha\}$ образуют базис для сечений касательного расслоения $TU = TF|_U \oplus H|_U$, двойственной к $\{\omega^i, dy^\alpha\}$, где $m = n-k$, $1 \le i \le k$, $1 \le \alpha \le m$. Такую окрестность обозначим через $U(x, y)$.

Теперь предположим, что F является римановым слоением по отношению к g [2], [3]. Это означает, что в каждой окрестности $U(x, y)$ риманова метрика g имеет вид

$$g_{i_j}(x,y)\omega^i\omega^j + g_{\alpha\beta}(y)dy^\alpha dy^\beta,$$

где $1 \le i, j \le k$, $1 \le \alpha, \beta \le m$, $x = (x^1, x^2, \dots, x^k)$, $y = (y^1, y^2, \dots, y^m)$.

Замечание. В целях упрощения обозначений, в выражениях, где имеется суммирование по повторяющимся индексам, будем опускать знак суммирования.

Кусочно-гладкую кривую $\gamma : [0,1] \to M$ назовем горизонтальной, если $\dot\gamma(t) \in H(\gamma(t))$ для каждого $t \in [0,1]$. Кусочно-гладкая кривая, которая лежит в слое F, называется вертикальной.

Пусть $I = [0,1]$, $\nu : I \to M$ — вертикальная кривая, $h : I \to M$ — горизонтальная кривая и $h(0) = \nu(0)$. Кусочно-гладкое отображение $P : I \times I \to M$ такое, что $t \to P(t,s)$ является вертикальной кривой для каждого $s \in I$, кривая $s \to P(t,s)$ является горизонтальной для каждого $t \in I$, причем $P(t,0) = \nu(t)$ для $t \in I$, $P(0,s) = h(s)$ для $s \in I$, называется вертикально-горизонтальной гомотопией [4], [5]. Если для каждой пары вертикальной и горизонтальной кривых $v, h : I \to M$ с $v(0) = h(0)$ существует соответствующая вертикально-горизонтальная гомотопия P, то говорят, что распределение H является связностью Эресмана для слоения F [5], [6]. Так как рассматриваемое слоение F риманово, и многообразие M полно, распределение H является связностью Эресмана для F [4], [5]. Для каждой окрестности $U = U(x,y)$ слоение $F|_U$

(сужение F на U) задается гладкой субмерсией $f : U \to R^{n-k}$ [2]. Как показано в [5], сужение H на U является связностью Эресмана для сужения F на U тогда и только тогда, когда сужение H на U является связностью Эресмана для расслоения $f : U \to R^{n-k}$.

Пусть $\pi_1 : TM \to TF$, $\pi_2 : TM \to H$ — ортогональные проекции, $V(M)$, $V(F)$, $V(H)$ — множество гладких сечений расслоений TM, TF, H соответственно. Если $X \in V(F)$ ($X \in V(H)$), то X назовем вертикальным (горизонтальным) полем.

Пусть каждый слой F является вполне геодезическим подмногообразием M. Это эквивалентно тому, что $\nabla_X Y \in V(F)$ для всех $X, Y \in V(F)$ ([3], с. 47–61). В этом случае говорят, что F является вполне геодезическим слоением. В дальнейшем будем предполагать, что F является римановым слоением, слои которого являются вполне геодезическими подмногообразиями M. Тогда на расслоениях TF и H определены метрические связности ∇^1 и ∇^2 следующим образом. Если $X \in V(F)$, $Y \in V(H)$, $Z \in V(M)$, то

$$\nabla^1_Z X = \pi_1(\nabla_Z X), \quad \nabla^2_Z Y = \pi_2[Z_1, \widetilde{Y}] + \pi_2[\nabla_{Z_2} Y],$$

где $Z = Z_1 \oplus Z_2$, $Z_1 \in V(F)$, $Z_2 \in V(H)$, $\widetilde{Y} \in V(M)$, $\pi_2 \widetilde{Y} = Y$; здесь $[Z_1, \widetilde{Y}]$ — скобка Ли векторных полей Z_1 и $\widetilde{Y}$. ∇^2 является метрической связностью тогда и только тогда, когда F является римановым. В силу того, что F вполне геодезично, ∇^1 также является метрической связностью ([3], с. 47–61; [7], с. 257).

Пусть $p \in M$, $S(p)$ — множество точек M, которые можно соединять с p горизонтальными кривыми. В силу того, что F вполне геодезично, для каждого $p \in M$ множество $S(p)$ обладает топологией и дифференциальной структурой, по отношению к которым $S(p)$ является гладким погруженным подмногообразием M ([6], теорема 4).

Лемма 1. $\dim S(p) \geq n - k$ *для каждой точки* $p \in M$.

Доказательство. Пусть $p \in M$. Существует достаточно малое $\varepsilon > 0$ такое, что $\exp_p : B_\varepsilon \to V$ является диффеоморфизмом, где $B_\varepsilon = \{X \in T_p M : |X| < \varepsilon\}$, V — открытая окрестность точки p, $|X|$ — длина вектора X, $\exp_p$ — экспоненциальное отображение в точке p. Положим $H_\varepsilon = B_\varepsilon \cap H(p)$, $Q(p) = \exp_p(H_\varepsilon)$. Так как F римановo, всякая геодезическая, ортогональная в некоторой своей точке к слою F, остается ортогональной к слоям F во всех своих точках ([2], с. 123). Следовательно, $Q(p) \subset S(p)$. □

Пусть $P : I \times I \to M$ — вертикально-горизонтальная гомотопия. Обозначим через $D_s P(t, s)$ касательный вектор кривой $s \to P(t, s)$ в точке $P(t, s)$, через $D_t P(t, s)$ касательный вектор кривой $t \to P(t, s)$ в точке $P(t, s)$.

Лемма 2. *Пусть* $X(t, s) = D_s P(t, s)$, $Y(t, s) = D_t P(t, s)$, *для* $(t, s) \in I \times I$. *Тогда* $\nabla^1_X Y = 0$ *и* $\nabla^2_Y X = 0$.

Доказательство. Нетрудно проверить, что $[X, Y] = 0$. Так как Y — вертикальное поле, имеем $\nabla^2_Y X = \pi_2[X, Y]$. Известно, что$\nabla^1_Z Y = \pi_1[Z, Y]$ для каждого горизонтального поля Z ([3], с. 59). □

2. В этом пункте вводится метрическая связность $\widetilde{\nabla}$, относительно которой распределения TF и H являются параллельными, и изучаются проекции гладкой кривой $\gamma : I \to M$ в $L(p_0)$ и $S(p_0)$, где $p_0 = \gamma(0)$, которые определяются с помощью связности $\widetilde{\nabla}$. Так как распределение H является связностью Эресмана для слоения F, существует единственная вертикально-горизонтальная гомотопия $P_\gamma : I \times I \to M$ такая, что $\gamma(t) = P_\gamma(t, t)$ для $t \in I$ [5]. В доказательстве теоремы де Рама проекции кривой γ в $L(p_0)$ и в $S(p_0)$ определены с помощью ∇, и показано, что проекции γ в $L(p_0)$ и в $S(p_0)$ совпадают с кривыми $P_\gamma(\cdot, 0) : I \to M$ и $P_\gamma(0, \cdot) : I \to M$ соответственно. При этом используется то, что распределение H является вполне интегрируемым ([1], с. 180–183). Ниже будет доказан аналогичный факт для проекций γ, определенных с помощью $\widetilde{\nabla}$ без предположения о том, что H вполне интегрируемо. Доказательство дано для гладкой кривой γ, содержащейся в достаточно малой окрестности точки $p_0 = \gamma(0)$ (теорема 1).

В общем случае это утверждение легко получается из локального варианта делением отрезка I на конечное число мелких частей I_j таких, что для проекции кривой $\gamma : I_j \to M$ имеет место утверждение теоремы 1.

Теорема 2 утверждает, что связность $\widetilde{\nabla}$ совпадает с ∇ тогда и только тогда, когда распределение H вполне интегрируемо.

Полагая $\widetilde{\nabla}_Z X = \nabla^1_Z X_1 \oplus \nabla^2_Z X_2$, где $X,\ Z \in V(M)$, $X_i = \pi_i(X)$, $i = 1,2$, получим метрическую связность $\widetilde{\nabla}$ на TM. Нетрудно проверить, что распределения TF и H параллельны относительно $\widetilde{\nabla}$. Пусть $\gamma : I \to M$ — гладкая кривая, $\gamma(0) = p_0$ и $\gamma(1) = p$, $C : I \to T_{p_0}M$ — развертка кривой γ в $T_{p_0}M$, определенная связностью $\widetilde{\nabla}$. (См. определение развертки в ([1], с. 129). Здесь для удобства касательное векторное пространство $T_{p_0}M$ отождествляется с аффинным касательным пространством в точке p_0.) Пусть $C(t) = (A(t), B(t))$, где $A(t) \in F(p_0)$, $B(t) \in H(p_0)$ для $t \in I$. Так как M — полное риманово многообразие, $\widetilde{\nabla}$ — метрическая связность, существуют гладкие кривые $\gamma_1, \gamma_2 : I \to M$, которые развертываются на кривые $t \to A(t)$ и $t \to B(t)$ соответственно ([1], с. 167, теорема 4.1). Согласно предложению 4.1 ([1], с. 129) γ_i — такая кривая, что результат параллельного переноса $\dot{\gamma}_i(t)$ в точку p_0 вдоль γ_i^{-1}, определенного связностью $\widetilde{\nabla}$, совпадает с результатом параллельного переноса $\pi_i(\dot{\gamma}(t))$ в точку p_0 вдоль γ^{-1}, также определенного связностью $\widetilde{\nabla}$, где $i = 1, 2$. Следовательно, γ_1 является вертикальной кривой, а кривая γ_2 является горизонтальной. Кривые γ_1, γ_2 назовем проекциями кривой γ в $L(p_0)$ и в $S(p_0)$ соответственно.

Пусть $q_0 \in M$, U — достаточно малая связная относительно компактная окрестность точки q_0 в слое $L(q_0)$, $B_\delta \to U$ — расслоение, слой которого над $q \in U$есть открытый шар в $H(q)$ радиуса δ. Тогда для достаточно малого $\delta > 0$ экспоненциальные отображения связности ∇, определенные в точках U, определяют диффеоморфизм

$$\exp_U : B_\delta \to V$$

множества B_δ на некоторую окрестность V точки q_0 в M, содержащую U. Причем, если $p \in V$ и $p = \exp_q(X)$, $q \in U$, $X \in H(q)$, то расстояние $r(p, q) = |X|$ реализуется геодезической, чья скорость в точке q равна X. При этом проекция $\pi^1 : V \to U$, $\pi^1(p) = q$, является гладким тривиальным расслоением, слои которого диффеоморфны открытому шару в R^{n-k}. Обозначим через $Q(q)$ слой расслоения $\pi^1 : V \to U$, проходящий через точку $q \in U$. Для достаточно малого $\delta > 0$ слои слоения $F|_V$ и слои расслоения $\pi^1 : V \to U$ пересекаются трансверсально. Следовательно, слоение $F|_V$ можно задать гладкой субмерсией $\pi^2 : V \to Q(q_0)$, при которой $\pi^2(p) = q$, если $p \in L_q$, где L_q — слой слоения $F\ |_V$, проходящий через точку $q \in Q(q_0)$. Пусть $\gamma : I \to V$ — гладкая кривая, $q_0 = \gamma(0)$, $\mu = \pi^2(\gamma)$. В п. 1 отмечалось, что распределение H является связностью Эресмана для расслоения $\pi^2 : V \to Q(q_0)$. Поэтому для каждого $t \in I$ существует единственное горизонтальное поднятие $P_t : I \to V$ с начальным условием $P_t(t) = \gamma(t)$ кривой $\mu : I \to Q(q_0)$. Полагая $P(t, s) = P_t(s)$, получим вертикально-горизонтальную гомотопию $P : I \times I \to M$ такую, что $\gamma(t) = P(t, t)$. Эта гомотопия единственным образом определяется кривой γ.

Теорема 1. *Проекция кривой $\gamma : I \to V$ в $L(q_0)$ (в $S(q_0)$) есть кривая $P(\cdot, 0) : I \to L(q_0)$ (соответственно $P(0, \cdot) : I \to S(q_0)$).*

Доказательство. Пусть $\dot{\gamma}(t) = \dot{\gamma}_1(t) \oplus \dot{\gamma}_2(t)$ — касательный вектор кривой γ в точке $\gamma(t)$, где $\dot{\gamma}_1(t) \in F(\gamma(t))$, $\dot{\gamma}_2(t) \in H(\gamma(t))$, $t \in I$. В дальнейшем всюду под параллельным переносом касательного вектора будем понимать параллельный перенос, определенный связностью $\widetilde{\nabla}$. Для того чтобы показать, что проекция γ в $L(q_0)$ (в $S(q_0)$) совпадает с $\nu = P(\cdot, 0) : I \to L(q_0)$ (соответственно с $h = P(0, \cdot) : I \to S(q_0)$), достаточно показать, что параллельный перенос касательного вектора $\dot{\gamma}_1(t)$ в точку q_0 вдоль γ^{-1} совпадает с результатом параллельного переноса касательного вектора $\dot{\nu}(t)$ в точку q_0 вдоль ν^{-1} (соответственно параллельный перенос вектора $\dot{\gamma}_2(t)$ в точку q_0 вдоль γ^{-1} совпадает с параллельным переносом $\dot{h}(t)$ в точку q_0 вдоль h^{-1}).

Докажем этот факт сначала для проекции γ в $S(q_0)$. Пусть $Z(t)$ — горизонтальное поле вдоль $\gamma : [0, \tau] \to M$, которое задает параллельный перенос $\dot\gamma_2(\tau)$ из $\gamma(\tau)$ в q_0. Будем считать $\tau = 1$, что не ограничивает общности. Тогда $\nabla^2_{\dot\gamma} Z = 0$ и $Z(1) = \dot\gamma_2(1)$. Положим $Y(t,s) = D_t P(t,s)$, $X(t,s) = D_s P(t,s)$ для $(t,s) \in I \times I$. Очевидно, $\dot\gamma(t) = Y(t,t) \oplus X(t,t)$ и $\nabla^2_{\dot\gamma} Z = \pi_2[Y,Z] + \pi_2(\nabla_x Z)$ вдоль γ. Определим Z во всех точках $P(s,t)$ следующим образом: вектор $Z(t)$ параллельно переносим из точки $\gamma(t)$ в точку $P(s,t)$ вдоль интегральной кривой векторного поля Y, проходящий через точку $\gamma(t)$, $t, s \in I$. Так как ∇^2 — метрическая связность, имеем $Yg(Z,Z) = 0$. С другой стороны, в силу того, что F риманово и Z горизонтально, из ([3], с. 47–61) имеем $Yg(Z,Z) = 2g(Z,[Y,Z])$. Отсюда вытекает, что $[Y,Z]$ является вертикальным полем. Следовательно, $\nabla^2_{\dot\gamma} Z = \pi_2(\nabla_x Z)$ и $\nabla^2_{\dot\gamma} Z = 0$ вдоль γ влечет, что $\nabla_x Z$ является вертикальным полем вдоль γ.

Положим $L'(s) = (\pi^2)^{-1}(q)$ для $s \in I$, где $q = \mu(s)$. Тогда $L'(q)$ является слоем расслоения $\pi^2 : V \to Q(q_0)$ над точкой q. Семейство $\{L'(s) : s \in I\}$ образует слоение F' коразмерности один на многообразие $N' = (\pi^2)^{-1}(\Gamma_\mu)$, где Γ_μ — образ кривой μ, т. е. $\Gamma_\mu = \mu([0,1])$. Каждый слой слоения F' пересекает горизонтальную кривую $h = P(0,\cdot) : I \to N'$ трансверсально в одной точке. Поэтому слоение F' можно задать субмерсией $\pi : N' \to \Gamma_h$, где Γ_h — образ кривой h. Пусть f_{s_0} — голономное отображение слоения F' вдоль кривой $v_{s_0}^{-1}$, где $v_{s_0} = P(\cdot, s_0) : [0,t] \to L'(s)$, $t \in I$. Тогда по определению голономного отображения имеем $f_{s_0}(P(t,s)) = P(0,s)$ для s близких к s_0. В силу того, что слоение F риманово, слоение F' также является римановым. Поэтому дифференциал $f^*_{s_0}$ отображения f_{s_0} в точке $v_{s_0}(t)$ совпадает с параллельным переносом вдоль $v_{s_0}^{-1}$, определенным связностью ∇^2 [7].

Отсюда $\pi_* Z(t,s) = Z(0,s)$ для $t, s \in I$, где π_* — дифференциал отображения π. По лемме 2 касательный вектор получен параллельным переносом касательного вектора $\dot\gamma_2(s)$ вдоль кривой $P(\cdot, s) : [0,s] \to L'(s)$. Поэтому имеет место $\dot h(s) = \pi_* \dot\gamma_2(s)$ для $s \in I$, и в частности, $Z(0,1) = \dot h(1)$. Следовательно, $\nabla_{\dot h} Z = \nabla_{\pi_* \dot\gamma_2} \pi_* Z$. В силу того, что F' — риманово слоение, голономное отображение f_{s_0} сохраняет длину горизонтальных кривых [8]. Поэтому по утверждению 3.1 работы [8] имеем $\nabla_{\dot h} Z(0,s) = \pi_*(\nabla_x Z(t,s))$. Так как $\nabla_x Z$ вертикально, $\pi_*(\nabla_x Z) = 0$, т. е. $\nabla_{\dot h} Z = 0$, что в свою очередь влечет $\nabla^2_{\dot h} Z = 0$.

Теперь докажем, что проекция γ в $L(q_0)$ совпадает с ν. Для удобства, как и выше, предположим $\tau = 1$. Пусть параллельный перенос $\dot\gamma_1(1)$ в точку q_0 вдоль γ^{-1} задается вертикальным полем Z, определенным вдоль γ. Тогда $\nabla^1_{\dot\gamma} Z = 0$. Определим Z во всех точках $P(t,s)$ следующим образом: вектор $Z(t)$ из точки $\gamma(t)$ параллельно переносим в точку $P(t,s)$ вдоль интегральной кривой векторного поля X, проходящий через точку $\gamma(t)$, $t, s \in I$.

Пусть X^* — поле касательных векторов кривой μ в $Q(q_0)$. Не ограничивая общности, будем считать, что X^* определено на $Q(q_0)$, т. к. всегда X^* можем продолжить на некоторую окрестность кривой μ. Поскольку распределение H является связностью Эресмана для слоения F, векторное поле X^* имеет горизонтальное поднятие на V, которое обозначим через X (т. к. его сужение на поверхность $P : I \times I \to V$ совпадает с X). Таким образом, теперь векторное поле X определено на V и является горизонтальным поднятием векторного поля X^*. Поэтому каждый слой расслоения $\pi^2 : V \to Q(q_0)$ под действием потока X переходит в слой этого расслоения, следовательно, для каждого вертикального поля W скобка Ли $[X,W]$ является вертикальным полем. Теперь вертикальное поле Z продолжим на некоторую окрестность поверхности $P : I \times I \to N$. Из равенства $g([X,Z],W) = g(\nabla_X Z, W) - g(\nabla_Z X, W)$ для произвольного гладкого вертикального поля W с учетом соотношений $g(\nabla_Z X, W) = Zg(X,W) - g(X, \nabla_Z W)$, $g(X,W) = g(X, \nabla_Z W) = 0$ получаем $g([X,Z],W) = g(\nabla_X Z, W)$. Так как W — произвольное вертикальное поле, отсюда вытекает, что $\pi_1(\nabla_X Z) = \pi_1[X,Z]$. Так как ∇^1 — метрическая связность, имеет место $Xg(Z,Z) = 0$ в точках поверхности $P : I \times I \to V$. С другой стороны $Xg(Z,Z) = 2g(Z, \nabla_X Z)$, следовательно, в точках $P(t,s)$ векторные поля $\nabla_X Z$ и $[X,Z]$ являются горизонтальными полями. Отсюда вытекает, что $\pi_1(\nabla_X Z) = 0$, и $[X,Z] = 0$ в точках поверхности $P : I \times I \to V$. Значит, если учесть $\dot\gamma = Y \oplus X$, то имеем $\pi_1(\nabla_{\dot\gamma} Z) = \pi_1(\nabla_Y Z)$ вдоль γ. В силу вполне геодезичности F векторное поле $\nabla_Y Z$ является вертикальным, следовательно, $\nabla_Y Z = 0$ вдоль γ. Необходимо доказать, что $\nabla_{\dot\nu} Z = 0$. Пусть f_s — горизонтальное голономное отображение вдоль горизонтальной кривой h_s^{-1}, где h_s — сужение h на $[0,s]$, $s \in I$. По определению горизонтального голономного отображения, если x — точка из $(\pi^2)^{-1}(q)$, $q = \mu(s)$, то точка $f_s(x)$ из $(\pi^2)^{-1}(q_0)$ определяется следующим образом: если $v_x : [0,1] \to V$ — гладкая вертикальная кривая, соединяющая точку $h(s)$ с точкой x, $Q : [0,1] \times [0,s] \to V$ — вертикально-горизонтальная гомотопия для пары (v_x, h_s^{-1}), то $f_s(x) = Q(1,s)$. Известно, что f_s является диффеоморфизмом слоев $(\pi^2)^{-1}(\mu(s))$ и $(\pi^2)^{-1}(q_0)$ расслоения $\pi^2 : V \to Q(q_0)$. Для вполне геодезических слоений f_s является изометрией [9]. Поэтому, если $(f_s)_*$ - дифференциал отображения f_s, то $(f_s)_* \nabla_Y Z = \nabla_{(f_s)_* Y} (f_s)_* Z$ ([1], с. 156).

Так как $[X,Z] = 0$ в точках поверхности $P : I \times I \to M$, интегральная кривая векторного поля Z, начинающаяся в точках $P(t,s)$, под действием потока векторного поля X переходит в интегральную кривую Z. Следовательно, $f_* Z(t,s) = Z(t,0)$ для $(t,s) \in I \times I$. Также из $[X,Y] = 0$ получаем $(f_s)_*\ Y(t,s) = Y(t,0)$ для $(t,s) \in I \times I$. Отсюда вытекает $(f_s)_* \nabla_Y Z = \nabla_{\dot v} Z$. Так как $\nabla_Y Z = 0$ вдоль γ, получим $\nabla_{\dot v} Z = 0$. Таким образом, Z параллельно вдоль v. По лемме 2 вектор $\dot v(1)$ получается параллельным переносом $Z(1,1)$ вдоль интегральной кривой векторного поля X. Поэтому $Z(1,0) = \dot v(1)$. $\square$

Теорема 2. *Следующие утверждения эквивалентны.*

1. *Распределение H вполне интегрируемо (т. е. $\dim S(p) = n - k$ для каждого $p \in M$).*
2. *$\widetilde{\nabla}$ является связностью без кручения (т. е. $\widetilde{\nabla} = \nabla$).*

Доказательство. Покажем, что 1)$\Rightarrow$ 2).

Пусть H вполне интегрируемо. Тогда семейство $\{S(p), p \in M\}$ порождает $(n-k)$-мерное слоение $F^\perp$ многообразия M, которое является одновременно римановым и вполне геодезическим. Для любых векторных полей $X, Y \in V(H)$ имеем $[X,Y] \in V(H)$ (по теореме Фробениуса), $\nabla_X Y \in V(H)$ (в силу того, что $F^\perp$ вполне геодезично) (см., напр., в [3]). Покажем, что $\widetilde{\nabla}$ является связностью без кручения, т. е. $\widetilde{\nabla}_X Y - \widetilde{\nabla}_Y X = [X,Y]$, для любых X, $Y \in V(M)$. Вычислим левую часть требуемого равенства. Пусть $X = X_1 \oplus X_2$, $Y = Y_1 \oplus Y_2$, где $\mathrm{X}_i = \pi_i \mathrm{X}$, $Y_i = \pi_i Y$, $i = 1,2$. Тогда $\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla^1_X Y_1 + \nabla^2_X Y_2 = \pi_1(\nabla_X Y_1) + \pi_2[X_1, Y_2) + \pi_2(\nabla_{X_2} Y_2) = \nabla_{X_1} Y_1 + \pi_1(\nabla_{X_2} Y_1) + \pi_2[X_1, Y_2] + (\nabla_{X_2} Y_2)$. Как отметили в п. 1, $\pi_1(\nabla_{X_2} Y_1) = \pi_1[X_2, Y_1]$ из-за горизонтальности X_2. Учитывая это, получим

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_{X_1} Y_1 + \pi_1[X_2, Y_1] + \nabla^2_X Y_2.$$

Аналогично

$$\widetilde{\nabla}_Y X = \nabla_{Y_1} X_1 + \pi_1[Y_2, X_1] + \nabla^2_Y X_2.$$

Учитывая равенство $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$, получим $\widetilde{\nabla}_X Y - \widetilde{\nabla}_Y X = [X,Y]$. Таким образом, $\widetilde{\nabla}$ — метрическая связность без кручения. Так как риманова метрика определяет единственную метрическую связность без кручения, имеем $\widetilde{\nabla} = \nabla$.

Теперь покажем, что 2)$\Rightarrow$1). Пусть $\widetilde{\nabla} = \nabla$. Тогда распределение H параллельно относительно ∇, следовательно, H интегрируемо по предложению 5.1 из [1].

Замечание. Как показывает известное расслоение Хопфа на трехмерной сфере, распределение H не всегда вполне интегрируемо. В случае, когда H вполне интегрируемо, имеет место теорема де Рама: если M односвязно, то M изометрично произведению $L(p) \times S(p)$ для каждого $p \in M$. В этом случае $S(p)$ является слоем слоения $F^\perp$, порожденного распределением H. Определяются проекции произвольной точки $p \in M$ в $L(p_0)$ и в $S(p_0)$ для некоторого $p_0 \in$ M следующим образом. Пусть $\gamma : I \to M$ — гладкая кривая, $\gamma(0) = p_0$, $\gamma(1) = p$, ν — проекция γ в $L(p_0)$, h — проекция γ в $S(p_0)$. Конечные точки кривых ν и h назовем проекциями р в $L(p_0)$ и в $S(p_0)$ соответственно. В силу того, что H вполне интегрируемо, проекция p зависит только от класса гомотопии кривой γ. Поэтому, когда M односвязно, отображение $f : p \to (p_1, p_2)$ корректно определено. По теоремам 1 и 2 оно является изометрическим погружением. В силу $\dim M = \dim\{L(p_0) \times S(p_0)\}$ отображение f является накрытием, следовательно, оно является изометрией ([1], с. 134).

Литература

1. Кобаяси Ш., Номидзу К. *Основы дифференциальной геометрии.* Т. 1. – М.: Наука, 1981. – 344 с.
2. Reinhart B. *Foliated manifolds with bundle like metrics* // Ann. Math. – 1959. – V. 69. – № 1. – P. 119–132.
3. Tondeur Ph. *Foliations on Riemannian manifolds.* – New York: Springer–Verlag, 1988. – 247 p.
4. Hermann R. *On the differential geometry of foliations* // Ann. Math. Mech. – 1960. – V. 72. – № 3. – P. 445–457.
5. Blumenthal R., Hebda J. *Ehresman connections for foliations* // Indiana Univ. Math. J. – 1984. – V. 33. – № 4. – P. 597–611.
6. Blumenthal R., Hebda J. *Complementary distributions which preserve the leaf geometry and applications to totally geodesic foliations* // Quart. J. Math. – 1984. – V. 35. – P. 383–392.
7. Morgan A. *Holonomy and metric properties of foliations in higher codimension* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1976. – V. 58. – P. 255–261.
8. Hermann R. *A sufficient condition that a mapping of Riemannian manifolds be a fibre bundle* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1960. – V. 11. – P. 236–242.
9. Johnson D., Whitt L. *Totally geodesic foliations on* 3*-manifolds* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1979. – V. 76. – P. 355–357.

Ташкентский государственный университет

Поступили
первый вариант 17.12.1997
окончательный вариант 29.10.1998