ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 8 (435)

УДК 514.76

*Н.К. ФАРАФОНОВА*

# ГЕОМЕТРИЯ ГРАССМАНОВА РАССЛОЕНИЯ. II [1)]

Будем считать грассманово расслоение $G^l(M)$ снабженным связностью Леви-Чивита относительно римановой метрики $\widetilde{g}$, ассоциированной с римановой метрикой $g$ базы $M$ и канонической метрикой грассманиана [1]. В этой части статьи решается задача установления связи между геометрией $G^l(M)$ и геометрией базы $M$. В первой части статьи на $G^l(M)$ была построена система образующих векторных полей вида $\widetilde{S}^v$ и $\widetilde{Y}^h$ и установлен ряд свойств этих полей, которые будут постоянно использоваться в § 3. В теореме 3.1 получены уравнения О'Нейла [2], причем инвариант $A$ и его ковариантные производные вычислены лишь через геометрические характеристики базы. Аналогичные задачи для касательного, сферического и нормального расслоений, а также расслоения реперов были решены ранее в работах различных авторов. В обзорах [3], [4] имеется достаточно подробное освещение полученных результатов.

## 3. Геометрия грассманова расслоения

В этом параграфе будут получены формулы, выражающие такие геометрические объекты грассманова расслоения, как ковариантное дифференцирование $\widetilde{\nabla}$, преобразование кривизны $\widetilde{R}(\cdot,\cdot)$ и секционная кривизна $\widetilde{K}$ через аналогичные геометрические объекты $\nabla$, $R(\cdot,\cdot)$, $K$ и $\nabla R$ базового риманова многообразия $M$ и геометрию стандартного слоя грассманиана $G^l_n$. Условимся в дальнейшем обозначать через $Q$, $S$, $P$ и $T$ кососимметрические тензорные поля, а через $X$, $Y$, $Z$ и $U$ — векторные поля на $M$.

**Лемма 3.1.** *В точке* $\Pi$ *из* $G^l(M)$ *имеют место выражения*

$$\text{а) } \widetilde{\nabla}_{\widetilde{Q}^v}\widetilde{S}^v = -[\widetilde{\{Q\},|S|}]^v = -[\widetilde{\{Q\},S}]^v, \quad \text{б) } \widetilde{\nabla}_{\widetilde{Q}^v}\widetilde{Y}^h = -\frac{1}{4}(\rho(\widetilde{\{Q\}})Y)^h,$$

$$\text{в) } \widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}^h}\widetilde{S}^v = -\frac{1}{4}(\rho(\widetilde{\{S\}})X)^h + (\widetilde{\nabla_X S})^v, \quad \text{г) } \widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}^h}\widetilde{Y}^h = (\widetilde{\nabla_X Y})^h - \frac{1}{2}\rho(\widetilde{X\wedge Y})^v,$$

*где внешняя и внутренняя компоненты тензоров вычисляются относительно подпространства* $\Pi$.

**Доказательство.** Поскольку ковариантную производную в любом римановом многообразии $M$ целиком определяет уравнение

$$2g(\nabla_X Y, Z) = Xg(Y,Z) + Yg(X,Z) - Zg(X,Y) - g(X,[Y,Z]) - g(Y,[X,Z]) + g(Z,[X,Y]), \tag{48}$$

то проделаем следующие вычисления.

а) Из формулы (48) для риманова многообразия $G^l(M)$ получим

$$2\widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_{\widetilde{Q}^v}\widetilde{S}^v, \widetilde{X}^h) = -\widetilde{X}^h\widetilde{g}(\widetilde{Q}^v, \widetilde{S}^v) - \widetilde{g}(\widetilde{S}^v, [\widetilde{Q}^v, \widetilde{X}^h]) - \widetilde{g}(\widetilde{Q}^v, [\widetilde{S}^v, \widetilde{X}^h]), \tag{49}$$

т. к. горизонтальные и вертикальные векторы ортогональны между собой и выполняется тождество а) леммы 2.6. Напомним, что функция $f$ называется базисной относительно субмерсии $R_H$,

---

[1)] Продолжение, ч. I см. в "Известия вузов. Математика". – 1997. – № 9. – С. 57–70.

если существует функция $h$ на базовом многообразии, для которой $f$ является полным прообразом, т. е. $R_H^* h = f$. Очевидно, если векторное поле $F$ является $R_H$-связным с векторным полем $H$ на базовом многообразии, то $Ff = Hh$. В нашем случае функция $-\frac{1}{2}\operatorname{Tr}\{\omega(\overline{Q}^v)\}_{V_1}\{\omega(\overline{S}^v)\}_{V_1}$ является базисной относительно $R_H$ — римановой субмерсии $O(M)$ на $G^l(M)$, причем является полным прообразом функции $\widetilde{g}(\widetilde{Q}^v, \widetilde{S}^v)$. Это следует из определения 2.1, свойств оператора следа и леммы 2.8. Воспользовавшись этим фактом, проведем дальнейшие вычисления.

$$\widetilde{X}^h \widetilde{g}(\widetilde{Q}^v, \widetilde{S}^v) = -\frac{1}{2}\overline{X}^h \operatorname{Tr}\{\omega(\overline{Q}^v)\}_{V_1}\{\omega(\overline{S}^v)\}_{V_1} =$$
$$= -\frac{1}{2}\operatorname{Tr}(\{\overline{X}^h\omega(\overline{Q}^v)\}_{V_1} \circ \{\omega(\overline{S}^v)\}_{V_1} + \{\omega(\overline{Q}^v)\}_{V_1} \circ \{\overline{X}^h\omega(\overline{S}^v)\}_{V_1}).$$

Очевидно, дифференцирование $\overline{X}^h$ можно проносить через взятие внешней компоненты относительно подпространства $V_1$ в $\mathbb{R}^n$. Применяя формулу (34) и лемму 2.7, преобразуем последнее равенство

$$\widetilde{X}^h \widetilde{g}(\widetilde{Q}^v, \widetilde{S}^v) = -\frac{1}{2}\operatorname{Tr}(\{\omega(\overline{(\nabla_X Q)}^v)\}_{V_1}\{\omega(\overline{S}^v)\}_{V_1} + \{\omega(\overline{Q}^v)\}_{V_1}\{\omega(\overline{(\nabla_X S)}^v)\}_{V_1}) =$$
$$= -\frac{1}{2}\operatorname{Tr}(\{\nabla_X Q\}\{S\} + \{Q\}\{\nabla_X S\}) = \widetilde{g}(\widetilde{(\nabla_X Q)}^v, \widetilde{S}^v) + \widetilde{g}(\widetilde{Q}^v, \widetilde{(\nabla_X S)}^v).$$

Подставляя это выражение в формулу (49) и сравнивая с формулой б) леммы 2.6, получим

$$2\widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_{\widetilde{Q}^v}\widetilde{S}^v, \widetilde{X}^h) = -\widetilde{g}(\widetilde{(\nabla_X Q)}^v, \widetilde{S}^v) - \widetilde{g}(\widetilde{Q}^v, \widetilde{(\nabla_X S)}^v) - \widetilde{g}(\widetilde{S}^v, [\widetilde{Q}^v, \widetilde{X}^h]) - \widetilde{g}(\widetilde{Q}^v, [\widetilde{S}^v, \widetilde{X}^h]) = 0,$$

или в терминах дифференцирования Ли вдоль векторного поля

$$(L_{\widetilde{X}^h}\widetilde{g})(\widetilde{Q}^v, \widetilde{S}^v) = 0. \tag{50}$$

Равенство нулю выражения $\widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_{\widetilde{Q}^v}\widetilde{S}^v, \widetilde{X}^h)$ имеет место для любых векторных полей $\overline{X}^h$, а это означает, что у ковариантной производной $\widetilde{\nabla}_{\widetilde{Q}^v}\widetilde{S}^v$ отсутствует горизонтальная составляющая. Найдем ее вертикальную составляющую. Из леммы 2.3 (35) найдем $\overline{Q}^v\overline{g}(\overline{S}^v, \overline{T}^v) = -\overline{g}(\overline{[Q,S]}^v, \overline{T}^v) - \overline{g}(\overline{T}^v, \overline{[Q,T]}^v)$. Сравнивая последнюю формулу с п. а) леммы 2.4, представим ее в виде $(L_{\overline{Q}^v}\overline{g})(\overline{S}^v, \overline{T}^v) = 0$. Как уже отмечалось, функция $\overline{g}(\overline{S}^v, \overline{T}^v)$ базисная на $O(M)$ относительно $R_H$ и по определению 2.2 векторное поле $\overline{Q}^v$ $R_H$-связно с векторным полем $\widetilde{Q}^v$ на грассмановом расслоении. Поэтому

$$\widetilde{Q}^v\widetilde{g}(\widetilde{S}^v, \widetilde{T}^v) = -\widetilde{g}(\widetilde{[Q,S]}^v, \widetilde{T}^v) - \widetilde{g}(\widetilde{S}^v, \widetilde{[Q,T]}^v) \tag{51}$$

и по лемме 2.6 а) получаем

$$(L_{\widetilde{Q}^v}\widetilde{g})(\widetilde{S}^v, \widetilde{T}^v) = 0. \tag{52}$$

Тогда из формулы (48) для $G^l(M)$ получим

$$2\widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_{\widetilde{Q}^v}\widetilde{S}^v, \widetilde{T}^v) = -\widetilde{g}(\widetilde{[Q,S]}^v, \widetilde{T}^v) - \widetilde{g}(\widetilde{[Q,T]}^v, \widetilde{S}^v) - \widetilde{g}(\widetilde{[S,T]}^v, \widetilde{Q}^v). \tag{53}$$

Применив лемму 2.7, предложения 1.6, 1.2 в), 1.5 б), 1.4 и следствия 1.4, 1.5 и 1.6, преобразуем последнее равенство

$$2\widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_{\widetilde{Q}^v}\widetilde{S}^v, \widetilde{T}^v) = -\frac{1}{2}(g(\{[Q,S]\}, \{T\}) + g(\{[Q,T]\}, \{S\}) +$$
$$+ g(\{[S,T]\}, \{Q\})) = -\frac{1}{2}(g(\{[Q,S]\}, T) + g([Q,T], \{S\}) + g([S,T], \{Q\})) =$$
$$= -\frac{1}{2}(g(\{[Q,S]\}, T) - g([Q,\{S\}], T) - g([S,\{Q\}], T)) = -\frac{1}{2}(g([|Q|, \{S\}], T) +$$

$$+ g([\{Q\},|S|],T) - g([Q,\{S\}],T) - g([S,\{Q\}],T)) = -g([\{Q\},|S|],T) =$$
$$= -g(\{[\{Q\},|S|]\},\{T\}) = -2\widetilde{g}(\widetilde{[\{Q\},|S|]}^v,\widetilde{T}^v).$$

Итак, пришли к равенству

$$\widetilde{g}_\Pi(\widetilde{\nabla}_{\widetilde{Q}^v}\widetilde{S}^v,\widetilde{T}^v) = -\widetilde{g}(\widetilde{[\{Q\},|S|]}^v_\Pi,\widetilde{T}^v_\Pi),$$

имеющему, по сути, смысл лишь в одной точке $\Pi$ из $G^l(M)$, поскольку $[\{Q\},|S|]$ является тензором в точке $x$ ($\Pi \subset T_xM$), но не тензорным полем на $M$. Это равенство и формула (50) влекут за собой справедливость первого равенства выражения а) этой леммы. Второе равенство п. а) может быть сразу получено применением к доказанному первому равенству этого пункта следствия 2.2, предложения 1.5 б) и следствия 1.6.

б) Метричность римановой связности на $G^l(M)$ и вертикальность ковариантной производной $\widetilde{\nabla}_{\widetilde{Q}^v}\widetilde{S}^v$, доказанная в п. а), влекут горизонтальность ковариантной производной $\widetilde{\nabla}_{\widetilde{Q}^v}\widetilde{Y}^h$. Вычислим ее горизонтальную составляющую, воспользовавшись формулой (48) для $G^l(M)$ и леммами 2.6, 2.7.

$$2\widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_{\widetilde{Q}^v}\widetilde{Y}^h,\widetilde{Z}^h) = \widetilde{Q}^v\widetilde{g}(\widetilde{Y}^h,\widetilde{Z}^h) - \widetilde{g}(\widetilde{Q}^v,[\widetilde{Y}^h,\widetilde{Z}^h]) -$$
$$-\widetilde{g}(\widetilde{Y}^h,[\widetilde{Q}^v,\widetilde{Z}^h]) + \widetilde{g}(\widetilde{Z}^h,[\widetilde{Q}^v,\widetilde{Y}^h]) = \widetilde{Q}^v\widetilde{g}(\widetilde{Y}^h,\widetilde{Z}^h) + \widetilde{g}(\widetilde{Q}^v,\widetilde{R(Y,Z)}^v) -$$
$$-\widetilde{g}(\widetilde{Y}^h,(\widetilde{\nabla_Q Z})^v) + \widetilde{g}(\widetilde{Z}^h,(\widetilde{\nabla_Q Y})^v) = \widetilde{Q}^v\widetilde{g}(\widetilde{Y}^h,\widetilde{Z}^h) +$$
$$+\widetilde{g}(\widetilde{Q}^v,\widetilde{R(Y,Z)}^v) = \widetilde{Q}^v g(Y,Z) + \widetilde{g}(\widetilde{Q}^v,\widetilde{R(Y,Z)}^v) \Longrightarrow \cdots$$

Первое из двух полученных слагаемых равно нулю в силу базисности функции $g(Y,Z)$, а второе с помощью предложения 1.3 а) можно преобразовать, и теперь п. б) следует из леммы 2.7 (45)

$$\Longrightarrow \cdots = \frac{1}{2}g(\{Q\},\rho(Y\wedge Z)) = -\frac{1}{2}g(\rho(\{Q\})Y,Z).$$

в) Равенство в) — очевидное следствие формулы б) этой леммы, формулы б) леммы 2.6 и отсутствия кручения у римановой связности $\widetilde{\nabla}$. Действительно,

$$\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}^h}\widetilde{S}^v = \widetilde{\nabla}_{\widetilde{S}^v}\widetilde{X}^h + [\widetilde{X}^h,\widetilde{S}^v] = -\frac{1}{4}(\widetilde{\rho(\{S\})X})^h + (\widetilde{\nabla_X S})^v.$$

г) Для горизонтальной составляющей искомой ковариантной производной из формулы (48) и лемм 2.6 и 2.7 имеем уравнение

$$2\widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}^h}\widetilde{Y}^h,\widetilde{Z}^h) = 2g(\nabla_X Y,Z) = 2\widetilde{g}((\widetilde{\nabla_X Y})^h,\widetilde{Z}^h),$$

т. к. функции типа $\widetilde{g}(\widetilde{X}^h,\widetilde{Y}^h)$ являются базисными относительно субмерсии $\pi_E : G^l(M) \longrightarrow M$ и служат полным прообразом функций $g(X,Y)$. Таким образом, найдена горизонтальная составляющая $H\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}^h}\widetilde{Y}^h = (\widetilde{\nabla_X Y})^h$. Вертикальную составляющую найдем путем аналогичных вычислений

$$2\widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}^h}\widetilde{Y}^h,\widetilde{T}^v) = \widetilde{g}(\widetilde{T}^v,[\widetilde{X}^h,\widetilde{Y}^h]) = -\widetilde{g}(\widetilde{T}^v,(\rho(\widetilde{X\wedge Y}))^v).$$

Объединив результаты вычислений горизонтальной и вертикальной компонент, получим доказываемое равенство. □

**Следствие 3.1.** В грассмановом расслоении $G^l(M)$ вертикальные слои являются вполне геодезическими подмногообразиями, изометричными грассманиану.

**Доказательство.** Тот факт, что вертикальные слои в $G^l(M)$ являются вполне геодезическими подмногообразиями, непосредственно следует из формулы а) леммы 3.1, т. к. она свидетельствует о равенстве нулю второй основной формы для вертикальных слоев. Изометричны они грассманиану по определению метрики в грассмановом расслоении. □

Из равенства (50) вытекает

**Следствие 3.2.** Вертикальные лифты кососимметрических тензоров являются вертикальными полями Киллинга в каждом вертикальном слое.

Примем следующие соглашения об обозначениях. Векторное поле на $G^l(M)$ вида, подобного $\widetilde{[\{Q\},S]}^v$ или $(\rho(\widetilde{\{Q\}})Y)^h$, получается так. Это вертикальный или горизонтальный лифт тензора $[\{Q\}_K,S]$ или вектора $\rho(\{Q\}_K)Y$, определенных на множестве точек $x\in M$, в точку $K\in G^l(M)$, $K\subset T_xM$. Отметим, что ни $[\{Q\},S]$, ни $\rho(\{Q\})Y$ не являются полями на $M$, т. к. зависят от $K$. С этого момента и до конца статьи все лифты, вертикальный и горизонтальный, осуществляются, если не оговорено иное, в грассманово расслоение и волна сверху, как правило, будет опускаться. Если $f$ — некоторая функция на $G^l(M)$, то через $V\operatorname{gr} f$ будет обозначаться вертикальная составляющая градиента функции $f$ на $G^l(M)$.

**Лемма 3.2.** *Имеют место равенства*

$$\widetilde{\nabla}_{T^v}(\rho(\{S\})Y)^h=(\rho([|S|-\{S\},\{T\}])Y)^h-\frac{1}{4}(\rho(\{T\})\rho(\{S\})Y)^h, \tag{54}$$

$$\widetilde{\nabla}_{Z^h}(\rho(\{S\})Y)^h=(\nabla_Z(\rho(\{S\})Y)^h-\frac{1}{2}(\rho(Z\wedge\rho(\{S\})Y)^v, \tag{55}$$

$$\widetilde{\nabla}_{Y^h}V\operatorname{gr}\widetilde{g}(Q^v,S^v)=\frac{1}{4}(\rho([|Q|,\{S\}]-[\{Q\},|S|])Y)^h-(\nabla_Y([|Q|,\{S\}]-[\{Q\},|S|]))^v, \tag{56}$$

*где выражения* $\nabla_Y\rho(\{Q\})Z$ *и* $\nabla_Y([|Q|,\{S\}])$ *определяются формулами* (58) *и* (59) *соответственно.*

**Доказательство.** Для удобства записи обозначим горизонтальное векторное поле $(\rho(\{S\})Y)^h$ через $F$. При этом $\pi_*\,|_K\,F=\rho(\{S\}_K)Y$ — вектор в точке $\pi(K)$ многообразия $M$. Так как связность Леви-Чевита $\widetilde{\nabla}$ на $G^l(M)$ без кручения, то $\widetilde{\nabla}_F T^v-\widetilde{\nabla}_{T^v}F=[F,T^v]$. Отсюда, а также из метричности связности $\widetilde{\nabla}$, ортогональности горизонтальных и вертикальных подпространств, леммы 3.1 и следствия 3.1 получим

$$\begin{aligned}\widetilde{g}([F,T^v],Q^v)&=\widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_F T^v,Q^v)-\widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_{T^v}F,Q^v)=\\&=\widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_F T^v,Q^v)+\widetilde{g}(F,\widetilde{\nabla}_{T^v}Q^v)-T^v\widetilde{g}(F,Q^v)=\widetilde{g}((\nabla_F T)^v,Q^v).\end{aligned}$$

Аналогично найдем горизонтальную составляющую скобки Ли

$$\widetilde{g}([F,T^v],X^h)=\widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_F T^v,X^h)-\widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_{T^v}F,X^h)=\widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_F T^v,X^h)+\widetilde{g}(F,\widetilde{\nabla}_{T^v}X^h)-T^v\widetilde{g}(F,X^h). \tag{57}$$

Третье слагаемое в этой сумме преобразуем с помощью лемм 2.7 и предложений 1.2 б), 1.3 а) и 1.6 следующим образом

$$\begin{aligned}-T^v\widetilde{g}(F,X^h)&=-T^v g(\rho(\{S\})Y,X)=-T^v g(\rho(\{S\}),X\wedge Y)=\\&=-T^v g(\{S\},\{\rho(X\wedge Y\})=-2T^v\widetilde{g}((\rho(X\wedge Y))^v,S^v)=\\&=2\widetilde{g}([\{T\},|\rho(X\wedge Y)|]^v,S^v)+2\widetilde{g}([\{T\},|S|]^v,(\rho(X\wedge Y))^v).\end{aligned}$$

Последнее равенство получено с помощью метричности связности $\widetilde{\nabla}$ и леммы 3.1 а). Применяя к нему последовательно лемму 2.7 (46), предложения 1.6, 1.2 б), в) и 1.3 а), а также следствие 1.6, получим

$$\begin{aligned}-T^v\widetilde{g}(F,X^h)&=g([\{T\},|\rho(X\wedge Y)|],\{S\})+g(\{[\{T\},|S|]\},\rho(X\wedge Y))=\\&=g(\rho(\{[\{T\},|S|]\})Y,X)+g([\{T\},|\rho(X\wedge Y)|],\{S\})=g(\rho([\{T\},|S|])Y,X)-\\&-g([\{T\},\{S\}],\rho(X\wedge Y))=g(\rho([\{T\},|S|])Y,X)-g(\rho([\{T\},\{S\}])Y,X)=\\&=\widetilde{g}((\rho([\{S\}-|S|,\{T\}])Y)^h,X^h).\end{aligned}$$

Второе слагаемое из формулы (57) для горизонтальной компоненты скобки Ли допускает преобразование с последовательным использованием лемм 3.1 б) и 2.7, определения векторного поля $F$, а также кососимметричности тензора $\rho(\{T\})$

$$\widetilde{g}(F, \widetilde{\nabla}_{T^v} X^h) = -\frac{1}{4}\widetilde{g}(F, (\rho(\{T\})X)^h) = \frac{1}{4}g(\rho(\{T\})\rho(\{S\})Y, X) = \frac{1}{4}\widetilde{g}((\rho(\{T\})\rho(\{S\})Y)^h, X^h).$$

Подставляя полученные равенства в формулу (57) для вычисления горизонтальной составляющей скобки Ли и пользуясь леммой 3.1 в), применение которой допустимо в данном случае, т. к. ковариантная производная зависит от значения поля, по которому осуществляется дифференцирование, только в точке, будем иметь

$$\widetilde{g}([F, T^v], X^h) = \widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_F T^v, X^h) + \frac{1}{4}\widetilde{g}((\rho(\{T\})\rho(\{S\})Y)^h, X^h) + \\ + \widetilde{g}((\rho([\{S\} - |S|, \{T\}]Y)^h, X^h) = \widetilde{g}((\rho([\{S\} - |S|, \{T\}]Y)^h, X^h).$$

Объединяя результаты вычислений вертикальной и горизонтальной компонент скобки Ли, получим

$$[F, T^v]_{\Pi} = \rho([\{S\} - |S|, \{T\}])Y)^h + (\nabla_F T)^v.$$

Тогда из отсутствия кручения у $\widetilde{\nabla}$ после применения леммы 3.1 в), получаем доказываемое равенство (54).

Докажем формулу (55). Для этого найдем вертикальную компоненту интересующей нас ковариантной производной с использованием результатов § § 1, 2, а также леммы 3.1 и определения векторного поля $F$

$$\widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_{Z^h} F, Q^v) = Z^h\widetilde{g}(F, Q^v) - \widetilde{g}(F, \widetilde{\nabla}_{Z^h} Q^v) = \frac{1}{4}\widetilde{g}(F, (\rho(\{Q\})Z)^h) = \\ = \frac{1}{4}g(\rho(\{Q\})\rho(\{S\})Y \wedge Z) = \frac{1}{4}g(\{Q\}, \{\rho(\rho(\{S\}))Y \wedge Z\}) = \frac{1}{2}\widetilde{g}(Q^v, (\rho(\rho(\{S\})Y \wedge Z))^v).$$

Подобным образом вычислим теперь горизонтальную компоненту

$$\widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_{Z^h} F, X^h) = Z^h\widetilde{g}(F, X^h) - \widetilde{g}(F, \widetilde{\nabla}_{Z^h} X^h) = \\ = Z^h g(\pi_* F, X) - g(\pi_* F, \nabla_Z X) = Z^h g(\rho(\{S\}), X \wedge Y) - \\ - g(\rho(\{S\}), \nabla_Z X \wedge Y) = Z^h g(\{S\}, \rho(X \wedge Y)) - g(\{S\}, \rho(\nabla_Z X \wedge Y)) = \\ = 2Z^h\widetilde{g}(S^v, \rho(X \wedge Y)^v) - 2\widetilde{g}(S^v, \rho(\nabla_Z X \wedge Y)^v) = 2\widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_{Z^h} S^v, \rho(X \wedge Y)^v) + \\ + 2\widetilde{g}(S^v, \widetilde{\nabla}_{Z^h}\rho(X \wedge Y)^v) - 2\widetilde{g}(S^v, (\rho(\nabla_Z X \wedge Y))^v) \Longrightarrow \cdots$$

Так как $\nabla_Z \rho(X \wedge Y) = (\nabla_Z \rho)(X \wedge Y) + \rho(\nabla_Z X \wedge Y) + \rho(X \wedge \nabla_Z Y)$ и $\nabla_Z \rho$ — самосопряженный оператор на пространстве бивекторов, то последнее равенство можно продолжить

$$\Longrightarrow \cdots = g(\{\nabla_Z S\}, \rho(X \wedge Y)) + g(\{S\}, \nabla_Z \rho(X \wedge Y)) - g(\{S\}, \rho(\nabla_Z X \wedge Y)) = \\ = g(\{\nabla_Z S\}, \rho(X \wedge Y)) + g(\{S\}, (\nabla_Z \rho)(X \wedge Y) + \rho(X \wedge \nabla_Z Y)) = \\ = g(\rho(\{\nabla_Z S\}), X \wedge Y) + g((\nabla_Z \rho)(\{S\}), X \wedge Y) + \\ + g(\rho(\{S\}), X \wedge \nabla_Z Y) = g(\rho(\{\nabla_Z S\})Y, X) + g((\nabla_Z \rho)(\{S\})Y, X) + \\ + g(\rho(\{S\})\nabla_Z Y, X) = \widetilde{g}((\nabla_Z \rho(\{S\})Y)^h, X^h).$$

Поскольку $\rho(\{S\})Y$ не является векторным полем на базовом многообразии (т. к. присутствует $\{\cdot\}$), то равенство

$$(\nabla_Z \rho(\{S\})Y)_{\Pi} = (\nabla_Z \rho)(\{S\}_{\Pi})Y + \rho(\{\nabla_Z S\})_{\Pi} Y + \rho(\{S\})\nabla_Z Y, \tag{58}$$

использованное в последнем выражении, нужно понимать, как, хотя и естественное, но определение. Учитывая выражения для вертикальной и горизонтальной компонент, получим равенство (55).

Докажем последнее равенство (56) леммы. Обозначим $W = V\,\mathrm{gr}\,\widetilde{g}(Q^v, S^v)$. Воспользовавшись метричностью римановой связности $\widetilde{\nabla}$, определением градиента и леммами 2.6 б) и 3.1 а), в), получим

$$\begin{aligned}
&\widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_{Y^h}W, T^v) = Y^h\widetilde{g}(W, T^v) - \widetilde{g}(W, \widetilde{\nabla}_{Y^h}T^v) = Y^h\widetilde{g}(W, T^v) - \widetilde{g}(W, (\nabla_Y T)^v) = \\
&= Y^h T^v \widetilde{g}(Q^v, S^v) - (\nabla_Y T)^v \widetilde{g}(Q^v, S^v) = Y^h T^v \widetilde{g}(Q^v, S^v) - [Y^h, T^v]\widetilde{g}(Q^v, S^v) = \\
&= T^v(\widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_{Y^h}Q^v, S^v) + \widetilde{g}(Q^v, \widetilde{\nabla}_{Y^h}S^v)) = \widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_{T^v}(\nabla_Y Q)^v, S^v) + \widetilde{g}((\nabla_Y Q)^v, \\
&\widetilde{\nabla}_{T^v}S^v) + \widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_{T^v}Q^v, (\nabla_Y S)^v) + \widetilde{g}(Q^v, \widetilde{\nabla}_{T^v}(\nabla_Y S)^v) = -\widetilde{g}([\{T\}, \nabla_Y Q]^v, S^v) - \\
&- \widetilde{g}((\nabla_Y Q)^v, [\{T\}, S]^v) - \widetilde{g}([\{T\}, Q]^v, (\nabla_Y S)^v) - \widetilde{g}(Q^v, [\{T\}, \nabla_Y S]^v).
\end{aligned}$$

Хотя тензор $[|Q|_K, \{S\}_K]$ на $M$ в точке $x$ прикрепления подпространства $K$ и определен при каждом $K$, однако это выражение не является тензорным полем на $M$. Естественно однако положить по определению

$$(\nabla_Y[|Q|, \{S\}])_\Pi = [|\nabla_Y Q|_\Pi, \{S\}_\Pi] + [|Q|_\Pi, \{\nabla_Y S\}_\Pi]. \tag{59}$$

Используя полученное выше и результаты § § 1, 2, после преобразования найдем

$$\begin{aligned}
&\widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_{Y^h}W, T^v) = -\frac{1}{2}(-g(\{T\}, [\{S\}, |\nabla_Y Q|]) - g([\{\nabla_Y Q\}, |S|], \{T\}) - \\
&\quad - g(\{T\}, [\{\nabla_Y S\}, |Q|]) - g([\{Q\}, |\nabla_Y S|], \{T\})) = \frac{1}{2}g(\nabla_Y([\{S\}, |Q|] + [\{Q\}, |S|]), \{T\}).
\end{aligned}$$

Это выражение доказывает выполнение равенства (56) по вертикальной компоненте и остается доказать его по горизонтальной компоненте. Последовательно применяя метричность связности, лемму 3.1 г), определение градиента функции на римановом многообразии, лемму 3.1 а) и результаты § § 1, 2, получим цепочку равенств

$$\begin{aligned}
&\widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_{Y^h}W, X^h) = \frac{1}{2}\widetilde{g}(W, \rho(Y \wedge X)^v) = \frac{1}{2}\rho(Y \wedge X)^v \widetilde{g}(Q^v, S^v) = \\
&= -\frac{1}{2}(\widetilde{g}([\{\rho(Y \wedge X)\}, Q]^v, S^v) + \widetilde{g}(Q^v, [\{\rho(Y \wedge X)\}, S]^v)) = \\
&= -\frac{1}{4}(g([\{\rho(Y \wedge X)\}, |Q|], \{S\}) + g(\{Q\}, [\{\rho(Y \wedge X)\}, |S|])) = \\
&= \frac{1}{4}(g(\{\rho(Y \wedge X)\}, [\{S\}, |Q|]) + g([\{Q\}, |S|], \{\rho(Y \wedge X)\})) = \\
&= -\frac{1}{4}g(\rho([\{S\}, |Q|] + [\{Q\}, |S|])Y, X) = \frac{1}{4}\widetilde{g}((\rho([|Q|, \{S\}] - [\{Q\}, |S|])Y)^h, X^h).
\end{aligned}$$

Итак, формула (56) и лемма 3.2 доказаны.

Следующее предложение полностью определяет кривизну в грассмановом расслоении, т. к. вертикальные и горизонтальные лифты определяют систему образующих векторов в каждой точке грассманова расслоения.

**Теорема 3.1.** *Для кривизны $\widetilde{R}$ грассманова расслоения, вычисленной в точке $\Pi$ из $G^l(M)$, имеют место равенства*

а) $\widetilde{R}(Q^v, S^v)T^v = -\,[[\{Q\}, \{S\}], \{T\}]^v$,

б) $\widetilde{R}(Q^v, S^v)Z^h = -\,\dfrac{1}{2}(\rho([\{Q\}, \{S\}])Z)^h + \dfrac{1}{16}([\rho(\{Q\}), \rho(\{S\})]Z)^h$,

$$\text{в)}\ \ \widetilde{R}(Q^v, Y^h)S^v = -\frac{1}{4}(\rho([\{Q\},\{S\}])Y)^h + \frac{1}{16}(\rho(\{Q\}),\rho(\{S\})Y)^h,$$

$$\begin{aligned}\text{г)}\ \ \widetilde{R}(X^h, Y^h)Z^h =& (R(X,Y)Z)^h - \frac{1}{8}(\rho(\{\rho(Z\wedge Y)\})X - \rho(\{\rho(Z\wedge X)\})Y)^h - \\ & - \frac{1}{4}(\rho(\{\rho(X\wedge Y)\})Z)^h + \frac{1}{2}(\nabla_Z R)(X,Y)^v,\end{aligned}$$

$$\text{д)}\ \ \widetilde{R}(Q^v, Y^h)Z^h = \frac{1}{4}((\nabla_Y\rho)(\{Q\})Z)^h + \frac{1}{2}[\{Q\},\rho(Y\wedge Z)]^v - \frac{1}{8}(\rho(Y\wedge\rho(\{Q\})Z))^v,$$

$$\begin{aligned}\text{е)}\ \ \widetilde{R}(X^h, Y^h)Q^v =& -\frac{1}{4}((\nabla_X\rho)(\{Q\})Y - (\nabla_Y\rho)(\{Q\})X)^h - \\ & - \frac{1}{8}(\rho([X\wedge Y, \rho(\{Q\})]))^v + [|\rho(X\wedge Y)|, \{Q\}]^v.\end{aligned}$$

**Доказательство.** Тензор кривизны определяется через ковариантную производную по формуле

$$R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z. \tag{60}$$

а) Формула (53) с учетом формулы (51) запишется в виде $2\widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_{Q^v}S^v, T^v) = -\widetilde{g}([Q,S]^v, T^v) - T^v\widetilde{g}(Q^v, S^v)$ или, учитывая вполне геодезичность вертикальных слоев, имеем

$$\widetilde{\nabla}_{Q^v}S^v = -\frac{1}{2}([Q,S]^v + V\operatorname{gr}\widetilde{g}(Q^v,S^v)). \tag{61}$$

Пользуясь метричностью связности $\widetilde{\nabla}$, определением градиента и леммой 3.1 а), проделаем преобразования

$$\begin{aligned}\widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_{T^v}V\operatorname{gr}\widetilde{g}(Q^v,S^v), P^v) &= T^vP^v\widetilde{g}(Q^v,S^v) - (\widetilde{\nabla}_{T^v}P^v)\widetilde{g}(Q^v,S^v) = \\ &= T^vP^v\widetilde{g}(Q^v,S^v) + [\{T\},|P|]^v\widetilde{g}(Q^v,S^v).\end{aligned}$$

Продолжим это равенство, применив к первому слагаемому формулу (51) дважды, а ко второму — один раз, а также неоднократно используем лемму 2.7 (46), предложения 1.2 в) и 1.6.

$$\begin{aligned}\widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_{T^v}V\operatorname{gr}\widetilde{g}(Q^v,S^v), P^v) =& -T^v(\widetilde{g}([P,Q]^v,S^v) + \widetilde{g}(Q^v,[P,S]^v) - \\ & - \widetilde{g}(S^v,[[\{T\},|P|],Q]^v) - \widetilde{g}(Q^v,[[\{T\},|P|],S]^v) = \\ =& \widetilde{g}([T,[P,Q]]^v,S^v) + \widetilde{g}([P,Q]^v,[T,S]^v) + \widetilde{g}([T,Q]^v,[P,S]^v) + \\ & + \widetilde{g}(Q^v,[T,[P,S]]^v) - \frac{1}{2}g([[\{T\},|P|],|Q|],\{S\}) - \frac{1}{2}g(\{Q\},[[\{T\},|P|],|S|]) = \\ =& -\frac{1}{2}(g([P,Q],[T,\{S\}]) + g(P,[\{[T,S]\},Q]) + g([\{[T,Q]\},S],P) - \\ & - g([[T,\{Q\}],S],P) + g(|P|,[\{T\},[\{S\},|Q|]] + [\{T\},[\{Q\},|S|]]) = \\ =& \frac{1}{2}g(P,[[T,\{S\}],Q] - [\{[T,S]\},Q] - [\{[T,Q]\},S] + [[T,\{Q\}],S]) - \\ & - \frac{1}{2}g(|P|,[\{T\},[\{S\},|Q|] + [\{Q\},|S|]]) = -\frac{1}{2}g(\{P\},[[\{T\},|S|],|Q|]) + \\ & + \frac{1}{2}g(\{P\},[[\{T\},\{S\}],\{Q\}] + [[\{T\},\{Q\}],\{S\}] - [[\{T\},|Q|],|S|]\,.\end{aligned}$$

При получении последнего равенства применялось следствие 1.5, предложение 1.5 и тождество Якоби. Первое из нижеследующих равенств основано на выражении, записанном выше, и на том, что вертикальные слои вполне геодезические. Второе равенство следует из первого, формулы (61) и леммы 3.1 а)

$$\widetilde{\nabla}_{T^v}V\operatorname{gr}\widetilde{g}(Q^v,S^v) = [[\{T\},\{S\}],\{Q\}]^v + [[\{T\},\{Q\}],\{S\}]^v - [[\{T\},|S|],|Q|]^v - [[\{T\},|Q|],|S|]^v,$$

$$\widetilde{\nabla}_{T^v}\widetilde{\nabla}_{Q^v}S^v = \frac{1}{2}[\{T\},|[Q,S]|]^v + \frac{1}{2}[[\{T\},|S|],|Q|]^v + \frac{1}{2}[\{[\{T\},|Q|]\},|S|]^v -$$
$$- \frac{1}{2}[[\{T\},\{S\}],\{Q\}]^v - \frac{1}{2}[[\{T\},\{Q\}],\{S\}]^v.$$

Применяя последнюю из полученных формул и лемму 2.6 а) в выражении (60), после приведения подобных запишем

$$\widetilde{R}(T^v,Q^v)S^v = \frac{1}{2}[\{T\},|[Q,S]|]^v - \frac{1}{2}[\{Q\},|[T,S]|]^v - [[\{T\},\{Q\}],\{S\}]^v +$$
$$+ \frac{1}{2}[[\{T\},|Q|],|S|]^v - [[\{Q\},|T|],|S|]^v - [\{[T,Q]\},|S|]^v.$$

После применения предложения 1.5 приходим к доказываемому равенству а).

б) Из лемм 3.1, 3.2 (54) и 2.6 а) получаем два равенства

$$\widetilde{\nabla}_{Q^v}\widetilde{\nabla}_{S^v}Z^h = -\frac{1}{4}(\rho([|S| - \{S\},\{Q\}])Z)^h + \frac{1}{16}(\rho(\{Q\})\rho(\{S\})Z)^h,$$
$$\widetilde{\nabla}_{[Q^v,S^v]}Z^h = -\widetilde{\nabla}_{[Q,S]^v}Z^h = \frac{1}{4}(\rho(\{[Q,S]\})Z)^h.$$

По формуле (60) вычислим теперь

$$\widetilde{R}(Q^v,S^v)Z^h = -\frac{1}{4}(\rho([|S| - \{S\},\{Q\}] - [|Q| - \{Q\},\{S\}] + \{[Q,S]\})Z)^h +$$
$$+ \frac{1}{16}([\rho(\{Q\}),\rho(\{S\})]Z)^h.$$

После применения предложения 1.5 б) получим правую часть равенства б).

в) Применяя последовательно леммы 3.1 в), 3.2 (54) и снова 3.1 а), получим

$$\widetilde{\nabla}_{Q^v}\widetilde{\nabla}_{Y^h}S^v = \widetilde{\nabla}_{Q^v}(-\frac{1}{4}(\rho(\{S\})Y)^h + (\nabla_Y S)^v) =$$
$$= -\frac{1}{4}(\rho([|S| - \{S\},\{Q\}])Y)^h + \frac{1}{16}(\rho(\{Q\})\rho(\{S\})Y)^h - [\{Q\},|\nabla_Y S|]^v. \quad (62)$$

Формулы (51) и (53) приводят к равенству $2\widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_{Q^v}S^v,T^v) = -\widetilde{g}([Q,S]^v,T^v) - T^v\widetilde{g}(Q^v,S^v)$, а последнее равенство с учетом следствия 3.1 эквивалентно тому, что $\widetilde{\nabla}_{Q^v}S^v = -([Q,S]^v + V\operatorname{gr}\widetilde{g}(Q^v,S^v))/2$. Из последней формулы, а также из лемм 3.1 в) и 3.2 (56) следует

$$\widetilde{\nabla}_{Y^h}\widetilde{\nabla}_{Q^v}S^v = \frac{1}{8}(\rho(\{[Q,S]\})Y)^h - \frac{1}{2}(\nabla_Y[Q,S])^v -$$
$$- \frac{1}{8}(\rho([|Q|,\{S\}] - [\{Q\},|S|])Y)^h + \frac{1}{2}(\nabla_Y([|Q|,\{S\}] - [\{Q\},|S|]))^v. \quad (63)$$

Применяя же леммы 2.6 б) и 3.1 а), найдем

$$\widetilde{\nabla}_{[Q^v,Y^h]}S^v = -\widetilde{\nabla}_{(\nabla_Y Q)^v}S^v = [\{\nabla_Y Q\},|S|]^v. \quad (64)$$

Подставляя в выражение для кривизны (60) формулы (62), (63), (64), проведем вычисления с применением предложений 1.3 г), 1.5 б), 2.3 и равенства (59). Тогда получим

$$\widetilde{R}(Q^v,Y^h)S^v = (-[\{Q\},|\nabla_Y S|] + \frac{1}{2}([\{\nabla_Y Q\},|S|] + [|\nabla_Y Q|,\{S\}] +$$
$$+ [\{Q\},|\nabla_Y S|] + [|Q|,\{\nabla_Y S\}]) - \frac{1}{2}([|\nabla_Y Q|,\{S\}] + [|Q|,\{\nabla_Y S\}] -$$
$$- [\{\nabla_Y Q\},|S|] - [\{Q\},|\nabla_Y S|]) - [\{\nabla_Y Q\},|S|])^v +$$

$$+ (\rho(-\frac{1}{4}[|S|,\{Q\}] + \frac{1}{4}[\{S\},\{Q\}] - \frac{1}{8}[\{Q\},|S|] - \frac{1}{8}[\{Q\},|S|])Y)^h +$$
$$+ \frac{1}{16}(\rho(\{Q\})\rho(\{S\})Y)^h = -\frac{1}{4}(\rho([\{Q\},\{S\}])Y)^h + \frac{1}{16}(\rho(\{Q\})\rho(\{S\})Y)^h$$

и равенство (в) доказано.

г) Из леммы 3.1 г), в)

$$\widetilde{\nabla}_{X^h}\widetilde{\nabla}_{Y^h}Z^h = \widetilde{\nabla}_{X^h}(\nabla_Y Z)^h - \frac{1}{2}(\rho(Y\wedge Z)^v) = (\nabla_X\nabla_Y Z)^h -$$
$$- \frac{1}{2}(R(X,\nabla_Y Z))^v + \frac{1}{8}(\rho(\{\rho(Y\wedge Z)\})X)^h - \frac{1}{2}(\nabla_X\rho(Y\wedge Z))^v, \quad (65)$$

а также из леммы 2.6 в) и леммы 3.1 г), б) получим

$$\widetilde{\nabla}_{[X^h,Y^h]}Z^h = (\nabla_{[X,Y]}Z)^h - \frac{1}{2}(R([X,Y],Z))^v + \frac{1}{4}(\rho(\{\rho(X\wedge Y)\})Z)^h. \quad (66)$$

Применяя (65) и (66) для вычисления кривизны по формуле (60), будем иметь

$$\widetilde{R}(X^h,Y^h)Z^h = (R(X,Y)Z)^h - \frac{1}{8}(\rho(\{\rho(Z\wedge Y)\})X - \rho(\{\rho(Z\wedge X)\})Y)^h -$$
$$- \frac{1}{4}(\rho(\{\rho(X\wedge Y)\})Z)^h + \frac{1}{2}(R(Y,\nabla_X Z) - R(X,\nabla_Y Z) + (\nabla_Y R)(X,Z))^v +$$
$$+ (R(\nabla_Y X,Z) + R(X,\nabla_Y Z) - (\nabla_X R)(Y,Z) - R(\nabla_X Y,Z) - R(Y,\nabla_X Z))^v - (R([X,Y],Z))^v.$$

В последнем выражении кроме того, что произведена перегруппировка слагаемых из (65) и (66), ковариантно продифференцированы последние слагаемые из (65) и аналогичное слагаемое из $-\widetilde{\nabla}_{Y^h}\widetilde{\nabla}_{X^h}Z^h$. Так как риманова связность не имеет кручения, то после приведения подобных в последнем равенстве и применения второго тождества Бьянки к базовому многообразию приходим к доказываемому выражению г).

д) Хотя последние два выражения можно непосредственно вычислить с использованием лемм 2.6, 3.1 и 3.2 аналогично тому, как это было сделано для выражений а)–г), однако проще получить их как следствия алгебраических свойств тензора кривизны $\widetilde{R}$. Вертикальная компонента в д) определяется равенством $\widetilde{g}(\widetilde{R}(Q^v,Y^h)Z^h,S^v) = -\widetilde{g}(\widetilde{R}(Q^v,Y^h)S^v,Z^h)$ и выражением в), из коих следует, что

$$\widetilde{g}(\widetilde{R}(Q^v,Y^h)Z^h,S^v) = \frac{1}{4}\widetilde{g}((\rho([\{Q\},\{S\}])Y)^h,Z^h) - \frac{1}{16}\widetilde{g}((\rho(\{Q\})\rho(\{S\})Y)^h,Z^h) =$$
$$= \frac{1}{4}g(\rho([\{Q\},\{S\}],Z\wedge Y)) + \frac{1}{16}g(\rho(\{S\})Y,\rho(\{Q\})Z) =$$
$$= \frac{1}{4}g([\{Q\},\{S\}],\rho(Z\wedge Y)) + \frac{1}{16}g(\rho(\{S\}),\rho(\{Q\})Z\wedge Y) =$$
$$= -\frac{1}{4}g(\{S\},[\{Q\},\rho(Z\wedge Y)]) + \frac{1}{16}g(\{S\},\rho(\rho(\{Q\})Z\wedge Y)) =$$
$$= \widetilde{g}(-\frac{1}{2}[\{Q\},\rho(Z\wedge Y)]^v + \frac{1}{8}(\rho(\rho(\{Q\})Z\wedge Y))^v,S^v).$$

Последнее выражение, полученное преобразованием, основанным на результатах первых двух параграфов, определяет вертикальную составляющую в равенстве д). Найдем горизонтальную составляющую для $\widetilde{R}(Q^v,Y^h)Z^h$. Так как

$$\widetilde{g}(\widetilde{R}(Q^v,Y^h)Z^h,X^h) = \widetilde{g}(\widetilde{R}(X^h,Z^h)Y^h,Q^v) = \frac{1}{2}\widetilde{g}(((\nabla_Y R)(X,Z))^v,Q^v) =$$
$$= \frac{1}{4}g((\nabla_Y R)(X,Z),\{Q\}) = \frac{1}{4}g(X\wedge Z,(\nabla_Y\rho)(\{Q\})) = \frac{1}{4}g((\nabla_Y\rho)(\{Q\})Z,X)$$

(здесь использовано равенство г), лемма 2.7 (46), предложение 1.3 б) и предложение 1.2 б)), то последнее выражение совместно с вычисленной выше вертикальной составляющей и доказывает равенство д).

е) Докажем последнее равенство. На основании уже доказанного п. г), результатов § § 1, 2 и второго тождества Бьянки получим

$$\begin{aligned}\widetilde{g}(\widetilde{R}(X^h,Y^h)Q^v,Z^h) &= -\widetilde{g}(\widetilde{R}(X^h,Y^h)Z^h,Q^v) = -\frac{1}{2}\widetilde{g}(((\nabla_Z R)(X,Y))^v,Q^v) = \\ &= -\frac{1}{4}g((\nabla_Z R)(X,Y),\{Q\}) = \frac{1}{4}g((\nabla_X R)(Y,Z)+(\nabla_Y R)(Z,X),\{Q\}) = \\ &= \frac{1}{4}g(Y\wedge Z,(\nabla_X\rho)(\{Q\})) + \frac{1}{4}g(Z\wedge X,(\nabla_Y\rho)(\{Q\})) = \\ &= -\frac{1}{4}g((\nabla_X\rho)(\{Q\})Y,Z) + \frac{1}{4}g((\nabla_Y\rho)(\{Q\})X,Z).\end{aligned}$$

Для определения же вертикальной составляющей вычислим

$$\begin{aligned}\widetilde{g}(\widetilde{R}(X^h,Y^h)Q^v,S^v) &= \widetilde{g}(\widetilde{R}(Q^v,S^v)X^h,Y^h) = \\ &= -\frac{1}{2}\widetilde{g}((\rho([\{Q\},\{S\}])X)^h,Y^h) + \frac{1}{16}\widetilde{g}(([\rho(\{Q\}),\rho(\{S\})]X)^h,Y^h) = \\ &= \frac{1}{2}g(\rho([\{Q\},\{S\}]),X\wedge Y) - \frac{1}{16}g([\rho(\{Q\}),\rho(\{S\})],X\wedge Y) = \\ &= \frac{1}{2}g(\rho(X\wedge Y),[\{Q\},\{S\}]) + \frac{1}{16}g([\rho(\{Q\}),X\wedge Y],\rho(\{S\})) = \\ &= -\frac{1}{2}g([\{Q\},\rho(X\wedge Y)],\{S\}) + \frac{1}{16}g(\rho([\rho(\{Q\}),X\wedge Y]),\{S\}) = \\ &= -\widetilde{g}([\{Q\},\rho(X\wedge Y)]^v,S^v) + \frac{1}{8}\widetilde{g}((\rho([\rho(\{Q\}),X\wedge Y]))^v,S^v).\end{aligned}$$

В получении последнего выражения применялись: алгебраическое свойство $\widetilde{R}$, уже доказанное выражение п. б), лемма 2.7 (48), (50), предложения 1.2 б), в) и 1.3 а). Из выражений, полученных для горизонтальной и вертикальной составляющих, с учетом следствия 1.6 придем к равенству е). $\square$

**Замечание.** Формула п. а) есть по сути известная формула для кривизны грассманиана, что и следовало ожидать, так как ранее было показано, что вертикальные слои являются вполне геодезическими подмногообразиями.

**Следствие 3.3.** Пусть $X$, $Y$ — векторы, а $Q$, $S$ — кососимметрические тензоры в точке $x$ многообразия $M$. Тогда для секционной кривизны $G^l(M)$ в точке $\Pi$ над $x$ имеют место выражения

$$\begin{aligned}&\text{а) } \widetilde{K}(Q^v\wedge S^v) = 2\frac{\|[\{Q\},\{S\}]\|^2}{\|\{Q\}\|^2\|\{S\}\|^2 - g(\{Q\},\{S\})^2},\\ &\text{б) } \widetilde{K}(Q^v\wedge Y^h) = \frac{1}{8}\frac{\|\rho(\{Q\})Y\|^2}{\|Y\|^2\|\{Q\}\|^2},\\ &\text{в) } \widetilde{K}(X^h\wedge Y^h) = K(X\wedge Y) - \frac{3\|\{\rho(X\wedge Y)\}\|^2}{8\|X\|^2\|Y\|^2 - g(X,Y)^2}.\end{aligned}$$

В правых частях приведенных равенств все нормы берутся для метрики $g$ базового многообразия $M$.

Можно показать, хотя это и достаточно громоздко, что формулы, полученные в теореме 3.1 при $l = 1$, т. е. в случае проективного расслоения, переходят в аналогичные формулы из [5] для естественной локальной изометрии сферического расслоения в проективное над одним и тем же базовым римановым многообразием.

## Литература


1. Фарафонова Н. К. *Риманова метрика расслоенных пространств.* I // Изв. вузов. Математика. – 1995. – № 7. – С. 65–77.
2. O'Neill B. *The fundamental equations of a submersion* // Michigan Math. J. – 1966. – V. 13. – № 4. – P. 459–469.
3. Шапуков Б. Н. *Связности на дифференцируемых расслоениях* // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Пробл. геометрии. – 1983. – Т. 15. – С. 61–93.
4. Борисенко А. А., Ямпольский А. Л. *Риманова геометрия расслоений* // УМН. – 1991. – Т. 46. – Вып. 6. – С. 51–95.
5. Ямпольский А. Л. *Кривизна метрики Сасаки сферических касательных расслоений* // Укр. геом. сборн. – 1985. – Вып. 28. – С. 132–145.



*Харьковский государственный университет*



*Поступили*
*начальный вариант* 03.07.1996
*окончательный вариант* 22.08.1997