ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 4 (467)

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.982

Л.В. ВЕСЕЛОВА, О.Е. ТИХОНОВ

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ДЛЯ КЛАССОВ ОПЕРАТОРОВ

В работах [1], [2] была доказана единственность решения обратных задач интерполяции линейных операторов в классической постановке (см. также [3]). Цель данной работы — обобщение этих результатов в рамках достаточно общего подхода к интерполяции для классов операторов (в том числе — нелинейных), а также их аналог для интерполяции положительных линейных операторов в банаховых решетках.

1. Обозначения (по поводу определений см., напр., [4], [5]). Пусть X — банахово пространство, $\overline{X}$ — банахова пара. Через $B(X)$ и $L(X)$ (соответственно $B(\overline{X})$ и $L(\overline{X})$) обозначаем банахово пространство всех ограниченных нелинейных операторов и подпространство ограниченных линейных операторов в X (в $\overline{X}$). Подмножества $L(X)$ и $L(\overline{X})$, образованные операторами единичного ранга, обозначаем $R1(X)$ и $R1(\overline{X})$ соответственно.

Для двух банаховых пространств X и Y запись $X \hookrightarrow Y$ означает, что X линейно и топологически вложено в Y, запись $X \simeq Y$ — что X и Y совпадают как линейные пространства и нормы в них эквивалентны; если нормы пропорциональны, то пишем $X \cong Y$.

Для двух банаховых пар $\overline{X} = (X_0, X_1)$ и $\overline{Y} = (Y_0, Y_1)$ запись $\overline{X} \simeq \overline{Y}$ означает, что либо $X_i \simeq Y_i$, либо $X_i \simeq Y_{|i-1|}$ $(i = 0, 1)$, запись $\overline{X} \cong \overline{Y}$ — что либо $X_i \cong Y_i$, либо $X_i \cong Y_{|i-1|}$ $(i = 0, 1)$.

2. Схема интерполяции для классов операторов. С каждой банаховой парой $\overline{X} = (X_0, X_1)$ считаем ассоциированым некоторый класс $\kappa(\overline{X})$ и некоторое банахово пространство $\sigma(\overline{X})$ операторов в $\overline{X}$, причем $R1(\overline{X}) \subset \kappa(\overline{X}) \subset \sigma(\overline{X}) \hookrightarrow B(\overline{X})$ и $\|S\|_{\sigma(\overline{X})} = \|S\|_{L(\overline{X})}$ для любого $S \in R1(\overline{X})$. С каждым банаховым пространством X считаем ассоциированым класс операторов $\lambda(X)$ и банахово пространство $\tau(X)$, причем $R1(X) \subset \lambda(X) \subset \tau(X) \hookrightarrow B(X)$, $\|S\|_{\tau(X)} = \|S\|_{L(X)}$ для любого $S \in R1(X)$ и, кроме того, для любого $T \in \kappa(\overline{X})$ ограничение $T|_{X_i}$ принадлежит $\lambda(X_i)$ и $\|T|_{X_i}\|_{\tau(X_i)} \le \|T\|_{\sigma(\overline{X})}$ $(i = 0, 1)$.

Определение 1. Пусть $\mathfrak{I} = (\kappa, \sigma, \lambda, \tau)$ — конкретная реализация вышеприведенной схемы. Промежуточное для банаховой пары $\overline{X}$ пространство Z называем *$\mathfrak{I}$-интерполяционным*, если существует константа $c > 0$ такая, что $T|_Z \in \lambda(Z)$ и $\|T|_Z\|_{\tau(Z)} \le c\|T\|_{\sigma(\overline{X})}$ для любого $T \in \kappa(\overline{X})$. Если можно взять $c = 1$, то такое пространство Z называем *нормально $\mathfrak{I}$-интерполяционным*.

Совокупность всех $\mathfrak{I}$-интерполяционных пространств для банаховой пары $\overline{X}$ обозначаем далее $\mathfrak{I}\text{-Int}\,\overline{X}$, совокупность всех нормально $\mathfrak{I}$-интерполяционных пространств — $\mathfrak{I}\text{-Int}_1\,\overline{X}$.

Заметим, что при $\kappa(\overline{X}) = \sigma(\overline{X}) = L(\overline{X})$, $\lambda(X) = \tau(X) = L(X)$ приходим к обычному понятию интерполяционности относительно ограниченных линейных операторов. Соответствующую совокупность $\mathfrak{I}\text{-Int}\,\overline{X}$ обозначаем далее $\mathrm{Int}\,\overline{X}$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 98-01-00103.

Взяв $\kappa(\overline{X}) = R1(\overline{X})$, $\sigma(\overline{X}) = L(\overline{X})$, $\lambda(X) = R1(X)$, $\tau(X) = L(X)$, получаем известное определение интерполяционности для операторов единичного ранга. Соответствующие совокупности интерполяционных пространств обозначаем далее $R1\text{-}\mathrm{Int}\,\overline{X}$ и $R1\text{-}\mathrm{Int}_1\,\overline{X}$.

Ряд других содержательных примеров получается при изучении интерполяции идеалов операторов в банаховых парах. Проиллюстрируем естественность приведенной схемы на примере интерполяции ядерных операторов. Пусть известно, что изучаемые операторы являются ядерными как в пространстве X_0, так и в X_1. Интересны следующие вопросы для промежуточного пространства Z.

а) Переводят ли рассматриваемые операторы Z в Z и справедливы ли интерполяционные оценки для обычных операторных норм?

б) Являются ли вдобавок эти операторы ядерными как операторы из Z в Z?

в) Можно ли получить интерполяционные оценки для ядерных норм?

Каждой из постановок соответствует своя реализация вышеприведенной схемы. Например, для задачи б) естественно взять $\mathcal{N}(X_0) \cap \mathcal{N}(X_1)$ в качестве $\kappa(\overline{X})$, $L(\overline{X})$ — в качестве $\sigma(\overline{X})$, $\mathcal{N}(X)$ — в качестве $\lambda(X)$, $L(X)$ — в качестве $\tau(X)$ (здесь $\mathcal{N}(X)$ — совокупность ядерных операторов в банаховом пространстве X). Как следует из примера Пича (см. [6], п. 1.19.8), $\mathfrak{I}\text{-}\mathrm{Int}\,\overline{X}$ при этом подходе может не содержать $\mathrm{Int}\,\overline{X}$.

Для некоторых пар $\mathfrak{I}$-интерполяционные пространства различных схем $\mathfrak{I}$ могут совпадать, однако, как правило, различные конкретные реализации общей схемы дают, вообще говоря, различные совокупности $\mathfrak{I}$-интерполяционных пространств.

3. Единственность решения обратных задач интерполяции.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{I}$ — некоторая реализация схемы интерполяции классов операторов п. 2 и пусть для двух банаховых пар $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ выполнено соотношение $\mathfrak{I}\text{-}\mathrm{Int}\,\overline{X} = \mathfrak{I}\text{-}\mathrm{Int}\,\overline{Y}$. Тогда $\overline{X} \simeq \overline{Y}$.*

Для доказательства этой теоремы достаточно заметить, что для банаховых пар $\overline{X} = (X_0, X_1)$ и $\overline{Y} = (Y_0, Y_1)$ соотношение $\mathfrak{I}\text{-}\mathrm{Int}\,\overline{X} = \mathfrak{I}\text{-}\mathrm{Int}\,\overline{Y}$ влечет $X_i \in R1\text{-}\mathrm{Int}\,\overline{Y}$ и $Y_i \in R1\text{-}\mathrm{Int}\,\overline{X}$ $(i = 0, 1)$, и применить следующую лемму.

Лемма 1. *Если для двух банаховых пар $\overline{X} = (X_0, X_1)$ и $\overline{Y} = (Y_0, Y_1)$ выполняются условия $X_i \in R1\text{-}\mathrm{Int}\,\overline{Y}$, $Y_i \in R1\text{-}\mathrm{Int}\,\overline{X}$ $(i = 0, 1)$, то $\overline{X} \simeq \overline{Y}$.*

В справедливости этой леммы можно убедиться, проанализировав доказательства работы [1]. Заметим еще, что из результатов работы [3] (предложение 1.4 и теорема 2.8) лемма 1 следует непосредственно.

Аналогично тому, как теорема 1 сводится к лемме 1, следующая теорема 2 сводится к соответствующей лемме 2.

Теорема 2. *Пусть для двух банаховых пар $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ выполнено соотношение $\mathfrak{I}\text{-}\mathrm{Int}_1\,\overline{X} = \mathfrak{I}\text{-}\mathrm{Int}_1\,\overline{Y}$. Тогда $\overline{X} \cong \overline{Y}$.*

Лемма 2. *Если для двух банаховых пар $\overline{X} = (X_0, X_1)$ и $\overline{Y} = (Y_0, Y_1)$ выполняются условия $X_i \in R1\text{-}\mathrm{Int}_1\,\overline{Y}$, $Y_i \in R1\text{-}\mathrm{Int}_1\,\overline{X}$ $(i = 0, 1)$, то $\overline{X} \cong \overline{Y}$.*

В справедливости леммы 2 можно убедиться, проанализировав доказательства работы [2], принимая во внимание лемму 1. Как и лемма 1, из результатов работы [3] (предложение 1.4 и теорема 3.7) лемма 2 следует непосредственно.

4. Единственность решения обратных задач интерполяции положительных операторов в банаховых решетках. Напомним

Определение 2 ([7]). Говорят, что две банаховы решетки X_0 и X_1 образуют *интерполяционную пару банаховых решеток,* если они обе алгебраически и топологически вложены в некоторое отделимое топологическое векторное пространство, которое к тому же является векторной решеткой, причем и X_0, и X_1 — идеалы в этой решетке.

Отметим, что в рассматриваемой ситуации банаховы пространства пересечения $X_0 \cap X_1$ и суммы $X_0 + X_1$ в свою очередь оказываются банаховыми решетками.

Для двух банаховых решеток E и F запись $E \hookrightarrow F$ далее дополнительно подразумевает, что E — идеал в F.

Определение 3. Пусть $\overline{X} = (X_0, X_1)$ — интерполяционная пара банаховых решеток. Банахова решетка Z, удовлетворяющая условию $X_0 \cap X_1 \hookrightarrow Z \hookrightarrow X_0 + X_1$, называется *положительно интерполяционной*, если существует константа $c > 0$ такая, что для любого линейного положительного оператора T, действующего в $\overline{X}$, имеем $T(Z) \subset Z$ и $\|T\|_{Z\to Z} \le c\|T\|_{L(\overline{X})}$.

Совокупность положительно интерполяционных решеток обозначим $P\text{-}\operatorname{Int}\overline{X}$, нормально положительно интерполяционных — $P\text{-}\operatorname{Int}_1\overline{X}$.

Положительная интерполяционность изучалась, в основном, в связи с конструкцией Кальдерона–Лозановского. Отметим, что, вообще говоря, положительно интерполяционные решетки не обязательно интерполяционны для всех линейных ограниченных операторов [8].

Лемма 3. *Для любой интерполяционной пары $\overline{X}$ банаховых решеток выполняются соотношения $P\text{-}\operatorname{Int}\overline{X} \subset R1\text{-}\operatorname{Int}\overline{X}$ и $P\text{-}\operatorname{Int}_1\overline{X} \subset R1\text{-}\operatorname{Int}_1\overline{X}$.*

В следующей теореме использование символов “$\simeq$” и “$\cong$” подразумевает, вдобавок к эквивалентности или пропорциональности норм, и совпадение отношения порядка на соответствующих банаховых решетках.

Теорема 3. *Пусть $\overline{X}$, $\overline{Y}$ — две интерполяционные пары банаховых решеток.*
a) *Если $P\text{-}\operatorname{Int}\overline{X} = P\text{-}\operatorname{Int}\overline{Y}$, то $\overline{X} \simeq \overline{Y}$.*
b) *Если $P\text{-}\operatorname{Int}_1\overline{X} = P\text{-}\operatorname{Int}_1\overline{Y}$, то $\overline{X} \cong \overline{Y}$.*

Доказательство этой теоремы сводится к применению лемм 1, 2 и 3.

Литература

1. Tikhonov O.E., Veselova L.V. *A Banach couple is determined by the collection of its interpolation spaces* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1998. – V. 126. – № 4. – P. 1049–1054.
2. Tikhonov O.E., Veselova L.V. *The uniqueness of the solution to the inverse problem of exact interpolation* // Israel Math. Conf. Proc. – 1999. – V. 13. – P. 209–215.
3. Веселова Л.В., Тихонов О.Е. *О единственности решения обратных задач интерполяции* // Препринт НИИММ № 95-2. – Казань: Казанск. фонд “Математика”, 1995. – 17 с.
4. Брудный Ю.А., Крейн С.Г., Семенов Е.М. *Интерполяция линейных операторов* // Итоги науки и техн. Матем. анализ. – М.: ВИНИТИ, 1986. – Т. 24. – С. 3–163.
5. Ovchinnikov V.I. *The method of orbits in interpolation theory* // Math. Rept. – 1984. – V. 1. – P. 349–515.
6. Трибель Х. *Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы.* – М.: Мир, 1980. – 664 с.
7. Lindenstrauss J., Tzafriri L. *Classical Banach spaces.* II. *Function spaces.* – Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1979. – 243 p.
8. Лозановский Г.Я. *Замечание об одной интерполяционной теореме Кальдерона* // Функц. анализ и его прилож. – 1972. – Т. 6. – Вып. 6. – С. 89–90.

Казанский государственный технологический университет

НИИ математики и механики при Казанском государственном университете

Поступила 20.03.2000