И З В Е С Т И Я В Ы С Ш И Х У Ч Е Б Н Ы Х З А В Е Д Е Н И Й

1999 МАТЕМАТИКА № 6 (445)

УДК 517.55

А.М. КЫТМАНОВ, О.В. ХОДОС

ОБ УСЛОВИЯХ ГОЛОМОРФНОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ ГЛАДКИХ CR-ФУНКЦИЙ В ФИКСИРОВАННУЮ ОБЛАСТЬ

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{C}^n$ с гладкой (класса C^1) границей $\partial\Omega$, а Γ — гладкая ориентируемая гиперповерхность в окрестности U замыкания $\overline{\Omega}$, пересекающая $S = \partial\Omega$ трансверсально, вида

$$\Gamma = \{z \in \overline{\Omega} : \rho(z) = 0\}, \quad \rho \in C^1(U), \quad \operatorname{grad}\rho \neq 0 \ \text{ на } \ \Gamma.$$

Пусть Γ делит Ω на области $\Omega^+ = \{z : \rho(z) > 0\}$ и $\Omega^- = \{z : \rho(z) < 0\}$. Ориентация Γ согласована с Ω^+.

В [1] и [2] рассматривалась задача о нахождении условий на CR-функцию f (определенную на Γ), при которых f голоморфно продолжается в Ω^+. Эти условия связаны с гармоническим продолжением интеграла Бохнера–Мартинелли от функции f или с вещественно-аналитическим продолжением интеграла Коши–Фантаппье. Приведем один из результатов, который прямо следует из теорем работ [1], [2].

Пусть Ω — единичный шар с центром в нуле, $0 \in \Omega^-$. Ядром Бохнера–Мартинелли является

$$U(\zeta, z) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{\partial g}{\partial \zeta_k}\, d\overline{\zeta}[k] \wedge d\zeta,$$

где $d\zeta = d\zeta_1 \wedge \cdots \wedge d\zeta_n$, $d\overline{\zeta}[k] = d\overline{\zeta}_1 \wedge \cdots \wedge d\overline{\zeta}_{k-1} \wedge d\overline{\zeta}_{k+1} \wedge \cdots \wedge d\overline{\zeta}_n$,

$$g(\zeta, z) = \begin{cases} -\dfrac{(n-2)!}{(2\pi i)^n} |\zeta - z|^{2-2n} & \text{для } n > 1; \\ \dfrac{1}{2\pi i} \ln |\zeta - z|^2 & \text{для } n = 1 \end{cases}$$

— фундаментальное решение уравнения Лапласа.

Теорема 1. *Пусть CR-функция $f \in \mathcal{L}^1(\Gamma)$ и*

$$c_\alpha = \left[\frac{\partial^\alpha}{\alpha!} \int_\Gamma f(\zeta) U(\zeta, z) \right] \Bigg|_{z=0},$$

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — мультииндекс, $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$, $\partial^\alpha = \frac{\partial^{\|\alpha\|}}{\partial z_1^{\alpha_1} \cdots \partial z_n^{\alpha_n}}$, $\|\alpha\| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$. Для того чтобы f голоморфно продолжалась в Ω^+, необходимо и достаточно, чтобы

$$\varlimsup_{\|\alpha\| \to \infty} \sqrt[\|\alpha\|]{|c_\alpha| d_\alpha} \leqslant 1, \tag{1}$$

где $d_\alpha = \max\limits_{\overline{\Omega}} |z^\alpha|$, $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 96-01-00080).

Заметим, что при $n = 1$ всякая функция f является CR-функцией.

Нашей целью является получение условий (1) не в терминах роста производных интеграла Бохнера–Мартинелли , а в терминах роста производных самой функции f. Для этого, используя формулу Стокса, преобразуем выражение для коэффициентов c_α, перебрасывая производные с ядра Бохнера–Мартинелли на саму функцию f. При этом получаются дополнительно интегралы по множеству $\Gamma \cap S$. Тем самым условие (1) для бесконечно дифференцируемых функций будет более конструктивным, чем в работах [1], [2], т. к. даст возможность проверять его для различных классов конкретных гладких функций с известным поведением производных на поверхности Γ.

Сначала приведем формулы для производных интеграла Бохнера–Мартинелли , обобщающие соответствующие формулы из ([3], § 4, с. 34).

Пусть

$$(Mf)(z) = \int_\Gamma f(\zeta)U(\zeta, z), \quad z \in \Omega^\pm.$$

Лемма 1. *Если $f \in C^1(\Gamma)$, то*

$$\frac{\partial Mf}{\partial z_m} = \int_\Gamma \frac{\partial f}{\partial \zeta_m} U + (-1)^{n+m} \sum_{k=1}^n \int_\Gamma \frac{\partial f}{\partial \overline{\zeta}_k} \frac{\partial g}{\partial \zeta_k}\, d\overline{\zeta} \wedge d\zeta\,[m] + \\ + (-1)^{n+m} \sum_{k=1}^n (-1)^k \int_{\Gamma\cap S} f \frac{\partial g}{\partial \zeta_k}\, d\overline{\zeta}\,[k] \wedge d\zeta[m], \quad z \in \Omega \backslash \Gamma.$$

Обозначим $\rho_k = \dfrac{\partial \rho}{\partial \zeta_k} \dfrac{1}{|\mathrm{grad}\,\rho|}$, $\rho_{\overline{k}} = \overline{\rho}_k$.

Лемма 2. *Пусть для $z \notin \Gamma$*

$$\Phi(z) = i^n 2^{n-1} \int_\Gamma f(\zeta) g(\zeta, z)\, d\sigma(\zeta)$$

— потенциал простого слоя, тогда справедлива формула

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z_m} = -\int_\Gamma f\rho_m U(\zeta, z) + i^n 2^{n-1} \sum_{k=1}^n \int_\Gamma \Big(\rho_k \frac{\partial}{\partial \zeta_m}(f\rho_{\overline{k}}) - \rho_m \frac{\partial}{\partial \zeta_k}(f\rho_{\overline{k}})\Big) g(\zeta, z)\, d\sigma(\zeta) + \\ + \int_{\Gamma\cap S} \Big(\sum_{k=1}^{m-1} (-1)^{n+m+k} \rho_{\overline{k}}\, d\zeta[k, m] \wedge d\overline{\zeta} + \sum_{k=m+1}^n (-1)^{n+m+k-1} \rho_{\overline{k}}\, d\zeta[m, k] \wedge d\overline{\zeta} \Big) f(\zeta) g(\zeta, z).$$

Предложение. *Если $\Gamma \in C^2$ и $f \in C^2(\Gamma)$, то*

$$\frac{\partial Mf}{\partial z_m} = \int_\Gamma \Big(\frac{\partial f}{\partial \zeta_m} - \rho_m \sum_{k=1}^n \rho_k \frac{\partial f}{\partial \overline{\zeta}_k} \Big) U(\zeta, z) + 2^{n-1} i^n \int_\Gamma g(\zeta, z) A_n d\sigma + \\ + \int_{\Gamma\cap S} g(\zeta, z) \rho_m \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial \overline{\zeta}_k} B_n + \int_{\Gamma\cap S} \sum_{k=1}^n (-1)^{n+m+k} f \frac{\partial g}{\partial \zeta_k}\, d\overline{\zeta}[k] \wedge d\zeta[m], \quad (2)$$

где

$$A_n = \sum_{k,l=1}^n \Big(\rho_l \frac{\partial}{\partial \zeta_k} \Big(\frac{\partial f}{\partial \overline{\zeta}_k} \rho_m \rho_{\overline{l}} \Big) - \rho_k \frac{\partial}{\partial \zeta_l} \Big(\frac{\partial f}{\partial \overline{\zeta}_k} \rho_m \rho_{\overline{l}} \Big) \Big),$$

$$B_n = \sum_{l=1}^{k-1} (-1)^{k+l} \rho_{\overline{l}}\, d\overline{\zeta} \wedge d\zeta[l, k] + \sum_{l=k+1}^n (-1)^{k+l-1} \rho_{\overline{l}}\, d\overline{\zeta} \wedge d\zeta[k, l].$$

Пусть f — CR-функция, т. е. $\rho_{\overline{l}}\frac{\partial f}{\partial\overline{\zeta}_k} = \rho_{\overline{k}}\frac{\partial f}{\partial\overline{\zeta}_l}$ для всех $k, l = 1, \ldots, n$. Тогда в (2) второе и третье слагаемые равны нулю, т. к.

$$\begin{aligned} A_n &= \sum_{k,l=1}^{n} \rho_l \frac{\partial}{\partial\zeta_k}\Big(\frac{\partial f}{\partial\overline{\zeta}_k}\rho_m\rho_{\overline{l}}\Big) - \sum_{k,l=1}^{n} \rho_l \frac{\partial}{\partial\zeta_k}\Big(\frac{\partial f}{\partial\overline{\zeta}_l}\rho_m\rho_{\overline{k}}\Big) = \\ &= \sum_{k,l=1}^{n} \rho_l \frac{\partial}{\partial\zeta_k}\Big(\rho_m\Big(\frac{\partial f}{\partial\overline{\zeta}_k}\rho_{\overline{l}} - \frac{\partial f}{\partial\overline{\zeta}_l}\rho_{\overline{k}}\Big)\Big) = 0, \\ B_n &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{k-1}(-1)^{k+l}\frac{\partial f}{\partial\overline{\zeta}_k}\rho_{\overline{l}}\, d\overline{\zeta}\wedge d\zeta[l,k] + \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{k-1}(-1)^{k+l-1}\frac{\partial f}{\partial\overline{\zeta}_l}\rho_{\overline{k}}\, d\overline{\zeta}\wedge d\zeta[l,k] = \\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{k-1}(-1)^{k+l}\Big(\frac{\partial f}{\partial\overline{\zeta}_k}\rho_{\overline{l}} - \frac{\partial f}{\partial\overline{\zeta}_l}\rho_{\overline{k}}\Big)d\overline{\zeta}\wedge d\zeta[l,k] = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем

Следствие 1. Пусть $\Gamma \in C^2$, $f \in C^2(\Gamma)$, f — CR-функция. Тогда

$$\frac{\partial Mf}{\partial z_m} = \int_\Gamma \Big(\frac{\partial f}{\partial\zeta_m} - \rho_m\sum_{k=1}^{n}\rho_k\frac{\partial f}{\partial\overline{\zeta}_k}\Big)U(\zeta,z) + \int_{\Gamma\cap S}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+m+k} f\frac{\partial g}{\partial\zeta_k}\, d\overline{\zeta}[k]\wedge d\zeta[m], \quad z\notin\Gamma.$$

Выберем функцию ρ так, что $|\operatorname{grad}\rho| \equiv 1$ в окрестности Γ, т. е. $\rho_k = \frac{\partial\rho}{\partial\zeta_k}$, а $\rho_{\overline{k}} = \frac{\partial\rho}{\partial\overline{\zeta}_k}$. Это всегда можно сделать для гиперповерхности Γ класса C^2 ([4], § 2; [5]). Введем оператор

$$D_m = \frac{\partial}{\partial\zeta_m} - \rho_m\sum_{k=1}^{n}\rho_k\frac{\partial}{\partial\overline{\zeta}_k}. \tag{3}$$

Лемма 3. *Для CR-функций f справедливо тождество*

$$(D_m\circ D_l)(f) = (D_l\circ D_m)(f).$$

Доказательство. Действительно,

$$\begin{aligned} D_m\circ D_l &= \frac{\partial^2}{\partial\zeta_m\partial\zeta_l} - \rho_l\sum_{k=1}^{n}\rho_k\frac{\partial^2}{\partial\overline{\zeta}_k\partial\zeta_m} - \frac{\partial}{\partial\zeta_l}\Big(\rho_m\sum_{k=1}^{n}\rho_k\frac{\partial}{\partial\overline{\zeta}_k}\Big) + \rho_m\sum_{k=1}^{n}\rho_{kl}\frac{\partial}{\partial\overline{\zeta}_k} - \rho_l\sum_{k=1}^{n}\rho_{km}\frac{\partial}{\partial\overline{\zeta}_k} + \\ &\quad + \rho_l\sum_{k=1}^{n}\rho_k\frac{\partial}{\partial\overline{\zeta}_k}\Big(\rho_m\sum_{s=1}^{n}\rho_l\frac{\partial}{\partial\overline{\zeta}_s}\Big) - \rho_l\sum_{k=1}^{n}\rho_k\rho_{m\overline{k}}\sum_{s=1}^{n}\rho_s\frac{\partial}{\partial\overline{\zeta}_s} + \rho_m\sum_{k=1}^{n}\rho_k\rho_{l\overline{k}}\sum_{s=1}^{n}\rho_s\frac{\partial}{\partial\overline{\zeta}_s} = \\ &= D_l\circ D_m + \rho_m\sum_{k=1}^{n}\Big(\rho_{kl}\frac{\partial}{\partial\overline{\zeta}_k} + \rho_k\rho_{l\overline{k}}\sum_{s=1}^{n}\rho_s\frac{\partial}{\partial\overline{\zeta}_s}\Big) - \rho_l\sum_{k=1}^{n}\Big(\rho_{km}\frac{\partial}{\partial\overline{\zeta}_k} + \rho_k\rho_{m\overline{k}}\sum_{s=1}^{n}\rho_s\frac{\partial}{\partial\overline{\zeta}_s}\Big); \end{aligned}$$

здесь $\rho_{kl} = \frac{\partial^2\rho}{\partial\zeta_k\partial\zeta_l}$, а $\rho_{k\overline{l}} = \frac{\partial^2\rho}{\partial\zeta_k\partial\overline{\zeta}_l}$.

Так как $\sum\limits_{k=1}^{n}\rho_k\rho_{\overline{k}} \equiv 1$ в некоторой окрестности гиперповерхности Γ, следовательно, $\frac{\partial}{\partial z_s}\Big(\sum\limits_{k=1}^{n}\rho_k\rho_{\overline{k}}\Big) = 0$ в этой окрестности, т. е.

$$\sum_{k=1}^{n}\rho_{ks}\rho_{\overline{k}} + \sum_{k=1}^{n}\rho_k\rho_{\overline{k}s} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n}\rho_k\rho_{\overline{k}s} = -\sum_{k=1}^{n}\rho_{ks}\rho_{\overline{k}}.$$

Тогда

$$D_m\circ D_l - D_l\circ D_m = \rho_m\sum_{k=1}^{n}\Big(\rho_{kl}\frac{\partial}{\partial\overline{\zeta}_k} - \rho_{kl}\rho_{\overline{k}}\sum_{s=1}^{n}\rho_s\frac{\partial}{\partial\overline{\zeta}_s}\Big) - \rho_l\sum_{k=1}^{n}\Big(\rho_{km}\frac{\partial}{\partial\overline{\zeta}_k} - \rho_{km}\rho_{\overline{k}}\sum_{s=1}^{n}\rho_s\frac{\partial}{\partial\overline{\zeta}_s}\Big).$$

Так как $\rho_{\overline{k}}\frac{\partial f}{\partial\overline{\zeta}_s} = \rho_{\overline{s}}\frac{\partial f}{\partial\overline{\zeta}_k}$ для CR-функций f, то

$$D_m \circ D_l - D_l \circ D_m = \rho_m \sum_{k=1}^{n}\left(\rho_{kl}\frac{\partial}{\partial\overline{\zeta}_k} - \rho_{kl}\sum_{s=1}^{n}\rho_{\overline{s}}\rho_s\frac{\partial}{\partial\overline{\zeta}_k}\right) - \rho_l\sum_{k=1}^{n}\left(\rho_{km}\frac{\partial}{\partial\overline{\zeta}_k} - \rho_{km}\sum_{s=1}^{n}\rho_{\overline{s}}\rho_s\frac{\partial}{\partial\overline{\zeta}_k}\right) =$$

$$= \rho_m \sum_{k=1}^{n}\left(\rho_{kl}\frac{\partial}{\partial\overline{\zeta}_k} - \rho_{kl}\frac{\partial}{\partial\overline{\zeta}_k}\right) - \rho_l\sum_{k=1}^{n}\left(\rho_{km}\frac{\partial}{\partial\overline{\zeta}_k} - \rho_{km}\frac{\partial}{\partial\overline{\zeta}_k}\right) = 0. \quad \square$$

Перейдем к нахождению производной произвольного порядка от интеграла Бохнера–Мартинелли Mf. Пусть теперь Ω — единичный шар с центром в нуле.

Теорема 2. *Пусть* $\Gamma \in C^\infty$, $f \in C^\infty(\Gamma)$, f *—* CR*-функция. Тогда*

$$\partial^\alpha Mf\big|_{z=0} = \int_\Gamma D^\alpha(f)\,U(\zeta,0) + \frac{1}{(2\pi i)^n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+k-1}\sum_{s=1}^{n}\sum_{l_s=1}^{\alpha_s}(n+l_s+\alpha_{s+1}+\cdots+\alpha_n-2)!\,\times$$

$$\times\int_{\Gamma\cap S} D_1^{\alpha_1}\circ\cdots\circ D_{s-1}^{\alpha_{s-1}}\circ D_s^{\alpha_s-l_s}(f)\overline{\zeta}^{\,l_s+\alpha_{s+1}+\cdots+\alpha_n}\,d\,\overline{\zeta}[k]\wedge d\zeta[s]. \quad (4)$$

Здесь

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1}\circ\cdots\circ D_n^{\alpha_n}, \quad D_j^{\alpha_j} = \underbrace{D_j\circ\cdots\circ D_j}_{\alpha_j\ \text{раз}},$$

D_j *задано в* (3), $j = 1,\ldots,n$.

Таким образом, в условии (1) константу c_α можем брать из формулы (4).

Рассмотрим случай $n = 1$. Введем обозначения

$$D^m = \underbrace{D\circ\cdots\circ D}_{m\ \text{раз}}, \quad D = \frac{d}{d\zeta} - \rho_1^2\frac{d}{d\overline{\zeta}}$$

— производная по касательной к Γ, $\rho_1 = \dfrac{d\rho}{d\zeta}$.

Следствие 2. Если кривая $\Gamma \in C^\infty(\Omega)$, ξ, η — точки пересечения Γ с окружностью $S = \partial\Omega$, $f \in C^\infty(\Gamma)$, то

$$\frac{d^m Mf}{dz^m}\Big|_{z=0} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{D^m(f)}{\zeta}\,d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\sum_{l=1}^{m}(l-1)!\left(D^{m-l}(f)\big|_{\zeta=\xi}\overline{\xi}^{\,l} - D^{m-l}(f)\big|_{\zeta=\eta}\overline{\eta}^{\,l}\right).$$

Литература

1. Айзенберг Л.А., Кытманов А.М. *О возможности голоморфного продолжения функций, заданных на связном куске ее границы* // Матем. сб. – 1991. – Т. 182. – № 5. – С. 490–507.
2. Айзенберг Л.А., Кытманов А.М. *О возможности голоморфного продолжения функций, заданных на связном куске ее границы.* II // Матем. сб. – 1993. – Т. 184. – № 1. – С. 1–14.
3. Кытманов А.М. *Интеграл Бохнера–Мартинелли и его применения.* – Новосибирск: Наука, 1992. – 240 с.
4. Волков Е.А. *О границах подобластей, весовых классах Гёльдера и решениях в этих классах уравнений Пуассона* // Тр. Матем. ин-та АН СССР. – 1972. – Т. 117. – С. 75–99.
5. Горенский Н.Ю. *Некоторые приложения дифференциальных свойств функции расстояния до открытых множеств в* $\mathbb{C}^n$ // Некотор. свойства голоморфн. функций многих комплексн. переменных. – Красноярск, 1973. – С. 203–208.

Красноярский государственный технический университет

Поступила 14.08.1996