ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1997 МАТЕМАТИКА № 8 (423)

УДК 517.95

*А.Н. ВИТЮК*

# СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ДРОБНЫХ ПОРЯДКОВ

Задача Дарбу для гиперболических дифференциальных уравнений с многозначной правой частью (дифференциальных включений) изучалась в работах [1]–[4] и других.

В данной статье рассматриваются вопросы, касающиеся существования и некоторых свойств решений задачи Дарбу для дифференциальных включений с частными производными дробных порядков.

Основные положения теории дробного интегро-дифференцирования, ее приложения в теории интегральных и дифференциальных уравнений и обширная библиография работ содержится в монографии [5].

**1°.** Введем обозначения: $E^n$ — $n$-мерное евклидово пространство с нормой $\|\cdot\|$ и нулевым элементом $\theta$; $C(P)$, $AC(P)$, $L(P)$, $L_\infty(P)$ — соответственно пространства непрерывных, абсолютно непрерывных, суммируемых, измеримых по Лебегу и ограниченных в существенном функций, которые определены в области $P$; $\operatorname{comp} E^n$ ($\operatorname{conv} E^n$) — множество всех непустых компактных (выпуклых и компактных) подмножеств из $E^n$ с метрикой Хаусдорфа $\delta(\cdot,\cdot)$; $\rho(\cdot,\cdot)$ — расстояние между точкой и множеством в $E^n$; $\overline{\mathrm{co}} A$ — замыкание выпуклой оболочки множества $A$; $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция. Функция $f : P \to E^n$ называется селектором многозначного отображения (м. о.) $F : P \to \operatorname{comp} E^n$, если $f(x) \in F(x)$ для $x \in P$.

Пусть $G = (0,a] \times (0,b]$, $\overline{G} = [0,a] \times [0,b]$, $0 < \alpha,\ \beta \le 1$, $f(x,y) \in L(G)$. Выражение

$$I_0^\alpha f(x,y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{f(s,y)}{(x-s)^{1-\alpha}} ds, \quad x > 0, \tag{1}$$

называем [5] частным левосторонним интегралом Римана-Лиувилля дробного порядка $\alpha$ по переменной $x$, а выражение

$$I_0^r f(x,y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^x \int_0^y \frac{f(s,t)ds\,dt}{(x-s)^{1-\alpha}(y-t)^{1-\beta}}, \quad x > 0,\ y > 0, \tag{2}$$

— смешанным левосторонним дробным интегралом Римана-Лиувилля порядка $r = (\alpha,\beta)$. Если $f(x,y) \in L(G)$, то [5] интегралы $I_0^\alpha f(x,y)$, $I_0^r f(x,y)$ определены почти всюду (п. в.) на $G$ и принадлежат пространству $L(G)$.

Пусть $f_{1-\alpha}(x,y) = I_0^{1-\alpha} f(x,y)$, $f_{1-r}(x,y) = I_0^{1-r} f(x,y)$, $1-r = (1-\alpha, 1-\beta)$. Тогда функции

$$D_0^\alpha f(x,y) = D_x f_{1-\alpha}(x,y), \quad D_0^r f(x,y) = D_{xy}^2 f_{1-r}(x,y)$$
$$\Big(D_x = \frac{\partial}{\partial x}, \quad D_{xy}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\Big) \tag{3}$$

Работа выполнена при частичной поддержке Международной Соросовской Программы поддержки образования в области точных наук на Украине (грант APU 061014).

называем [5] соответственно частной левосторонней производной Римана-Лиувилля порядка $\alpha$ по переменной $x$ и смешанной левосторонней производной Римана-Лиувилля дробного порядка $r = (\alpha, \beta)$. Дробное интегрирование обладает полугрупповым свойством [5]

$$I_0^r I_0^{r_1} f(x,y) = I_0^{r+r_1} f(x,y), \quad r_1 = (\alpha_1, \beta_1), \quad 0 < \alpha_1, \beta_1 < 1, \tag{4}$$

где $r + r_1$ — сумма векторов $r$ и $r_1$.

Заметим, что при $\alpha = \beta = 0$ $I_0^0 f(x,y) = f(x,y)$, а при $\alpha = \beta = 1$ $I_0^1 f(x,y) = \int\limits_0^x \int\limits_0^y f(s,t) ds\, dt$.

**2°.** Рассмотрим интегральное уравнение Абеля

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^x \int_0^y \frac{\varphi(s,t) ds\, dt}{(x-s)^{1-\alpha}(y-t)^{1-\beta}} = f(x,y), \quad x > 0, \; y > 0. \tag{5}$$

**Лемма 1.** *Для того чтобы уравнение* (5) *было разрешимо в пространстве суммируемых функций, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\begin{gathered} f_{1-r}(x,y) \in AC(G), \\ f_{1-r}(x,0) = f_{1-r}(0,y) = \theta, \quad x \in [0,a], \quad y \in [0,b]. \end{gathered} \tag{6}$$

*При этом уравнение* (5) *имеет единственное решение.*

Следуя [5], через $I_0^r(L)$ обозначим класс функций $f(x,y)$, представимых в виде $f(x,y) = I_0^r \gamma(x,y)$, $\gamma(x,y) \in L(G)$.

**Лемма 2.** *Для того чтобы $f(x,y) \in I_0^r(L)$, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(x,y)$ удовлетворяла условиям* (6).

Доказательство лемм 1 и 2 аналогично доказательству соответственно теорем 2.1 и 2.3 из [5].

**Лемма 3.** *Пусть $0 < r \le 1$. Тогда для п. в. $(x,y) \in G$*

1) $D_0^r I_0^r f(x,y) = f(x,y)$, *если* $f(x,y) \in L(G)$; (7)

2) $I_0^r D_0^r f(x,y) = f(x,y)$, *если* $f(x,y) \in I_0^r(L)$;

3) $I_0^r D_0^r f(x,y) = f(x,y) - \mu(x,y)$, (8)

*где*

$$\mu(x,y) = \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} I_0^\beta \psi'(y) + \frac{y^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} I_0^\alpha \varphi'(x) + \frac{x^{\alpha-1} y^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \varphi(0), \tag{9}$$

$$\begin{gathered} \textit{если } f(x,y) \in L(G), \quad f_{1-r}(x,y) \in AC(G), \\ f_{1-r}(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [0,a]; \quad \varphi'(x) \in L_\infty([0,a]), \\ f_{1-r}(0,y) = \psi(y), \quad y \in [0,b]; \quad \psi'(y) \in L_\infty([0,b]), \quad \varphi(0) = \psi(0). \end{gathered} \tag{10}$$

**Доказательство.** В силу (3), (4) для п. в. $(x,y) \in G$

$$D_0^r I_0^r f(x,y) = D_{xy}^2 (I_0^{1-r} I_0^r f(x,y)) = f(x,y).$$

Если $f(x,y) \in I_0^r(L)$, то $f(x,y) = I_0^r \gamma(x,y)$. Тогда

$$I_0^r D_0^r f(x,y) = I_0^r D_{xy}^2 (I_0^{1-r} \gamma(x,y)) = I_0^r \gamma(x,y) = f(x,y).$$

Докажем (8). Так как $f_{1-r}(x,y) \in AC(\overline{G})$, то п. в. на $\overline{G}$ существует смешанная левосторонняя производная Римана-Лиувилля $D_0^r f(x,y)$, которую обозначим через $\lambda(x,y)$. В силу условия (10) функцию $f_{1-r}(x,y)$ можно представить в виде [6]

$$f_{1-r}(x,y) = \omega(x,y) + I_0^1 \lambda(x,y),$$
$$\omega(x,y) = \varphi(x) + \psi(y) - \varphi(0).$$

Теперь, используя (4), получаем

$$I_0^{1-r}(f(x,y) - I_0^r \lambda(x,y)) = \omega(x,y),$$
$$I_0^1(f(x,y) - I_0^r \lambda(x,y)) = I_0^r \omega(x,y). \tag{11}$$

Так как $f(x,y) - I_0^r \lambda(x,y) \in L(G)$, то из (11) следует, что $I_0^r \omega(x,y) \in AC(G)$. Следовательно, для п. в. $(x,y) \in \overline{G}$

$$f(x,y) - I_0^r \lambda(x,y) = D_{xy}^2 I_0^r \omega(x,y). \tag{12}$$

Докажем, что $D_{xy}^2 I_0^r \omega(x,y)$ совпадает с $\mu(x,y)$. Пусть $v(x,y) = I_0^r \varphi(x)$. Так как $\varphi(x) = \varphi(0) + \int\limits_0^x \varphi'(t)dt$, то, используя теорему Фубини, получаем

$$v(x,y) = \frac{x^\alpha y^\beta \varphi(0)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+\beta)} + \frac{y^\beta}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+\beta)} \int_0^x (x-s)^\alpha \varphi'(s)ds. \tag{$12_1$}$$

Тогда

$$D_{xy}^2 v(x,y) = \frac{x^{\alpha-1} y^{\beta-1} \varphi(0)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} + \frac{y^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} I_0^\alpha \varphi'(x), \tag{13}$$

причем $I_0^\alpha \varphi'(x) \in C([0,a])$. Аналогично доказываем, что

$$D_{xy}^2 I_0^r \psi(y) = \frac{x^{\alpha-1} y^{\beta-1} \varphi(0)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} + \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} I_0^\beta \psi'(y). \tag{14}$$

Из соотношений (12)–(14) следует (8), причем $\mu(x,y) \in C(G)$. $\square$

**3°.** Рассмотрим дифференциальное включение (д. в.)

$$D_0^r u(x,y) \in F(x,y,u(x,y)) \tag{15}$$

и краевые условия

$$u_{1-r}(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [0,a],$$
$$u_{1-r}(0,y) = \psi(y), \quad y \in [0,b], \quad \varphi(0) = \psi(0). \tag{16}$$

Предположим, что м. о. $F : \overline{G} \times E^n \to \operatorname{comp} E^n$ удовлетворяет условиям:

($A_1$) $F(\cdot,\cdot,u) : \overline{G} \to \operatorname{comp} E^n$ измеримо для каждого $u \in E^n$;
($A_2$) $\delta(F(x,y,u), F(x,y,v)) \le K\|u-v\|$ для п. в. $(x,y) \in \overline{G}$ и любых $u, v \in E^n$;
($A_3$) $|F| = \delta(F(x,y,u), \{\theta\}) \le M$ для любых $(x,y,u) \in \overline{G} \times E^n$.

Предположим также, что функции $\varphi : [0,a] \to E^n$, $\psi : [0,b] \to E^n$ абсолютно непрерывные и $\varphi' \in L_\infty([0,a])$, $\psi' \in L_\infty([0,b])$.

**Определение 1.** Функцию $u : G \to E^n$ называем решением задачи (15)–(16), если

(а) $u(x,y) \in C(G)$;
(б) $u_{1-r}(x,y) \in AC(\overline{G})$;
(в) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям (16) и п. в. на $G$ д. в. (15).

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$D_0^r u(x,y) = \gamma(x,y). \tag{17}$$

**Лемма 4.** *Если* $\gamma(x,y) \in L(G)$ *и* $\|\gamma(x,y)\| \le M$, *то задача* (17), (16) *эквивалентна уравнению*

$$u(x,y) = I_0^r \gamma(x,y) + \mu(x,y). \tag{18}$$

**Доказательство.** Если решение задачи (17), (16) существует, то в силу (8), (9) его можно записать в виде (18).

Докажем далее, что функция $u(x,y)$ является решением задачи (17), (16). В лемме 3 отмечалось, что $\mu(x,y) \in C(G)$. Так как $\|\gamma(x,y)\| \le M$, то непосредственно проверяем, что $I_0^r\gamma(x,y) \in C(G)$. Следовательно, $u(x,y)$ удовлетворяет условию (а) определения 1. Остается проверить, что $u(x,y)$ удовлетворяет условиям (б), (в) этого определения. Пусть $q(x,y) = I_0^r\omega(x,y)$. Аналогично выводу соотношения ($12_1$) получим преобразованное выражение

$$q(x,y) = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+\beta)}\left[x^\alpha y^\beta \varphi(0) + y^\beta \int_0^x (x-s)^\alpha \varphi'(s)ds + x^\alpha \int_0^y (y-t)^\beta \psi'(t)dt\right],$$

из которого следует, что для $x \in [0,a]$, $y \in [0,b]$

$$q(x,0) = q(0,y) = \theta. \tag{19}$$

Согласно лемме 3 $\mu(x,y) = D_{xy}^2 q(x,y)$. Выразив $\mu(x,y)$ из (18) и вычислив $I_0^1\mu(x,y)$ с учетом (19), получим

$$I_0^1(u(x,y) - I_0^r\gamma(x,y)) = I_0^r\omega(x,y).$$

Отсюда, используя (4), имеем

$$I_0^r(I_0^{1-r}u(x,y) - I_0^1\gamma(x,y) - \omega(x,y)) = \theta,$$

поэтому в силу леммы 1 $I_0^{1-r}u(x,y) - I_0^1\gamma(x,y) - \omega(x,y) = \theta$, т. е. $u_{1-r}(x,y) = I_0^1\gamma(x,y) + \omega(x,y)$. Следовательно, $u_{1-r}(x,y) \in AC(\overline{G})$ и удовлетворяет условиям (16), а также $D_0^r u(x,y) = \gamma(x,y)$ для п. в. $(x,y) \in G$. □

**Теорема 1.** *Пусть м. о.* $F : \overline{G} \times E^n \to \operatorname{comp} E^n$ *удовлетворяет условиям* ($A_1$)–($A_3$), *а функция* $\tau(x,y) : G \to E^n$ *удовлетворяет условиям* (а), (б) *определения* 1, *условиям* (16) *и для п.в.* $(x,y) \in G$

$$\rho(D_0^r\tau(x,y), F(x,y,\tau(x,y))) \le \lambda < +\infty. \tag{20}$$

*Тогда существует такое решение* $u(x,y)$ *задачи* (15), (16), *что для* $(x,y) \in G$

$$\|u(x,y) - \tau(x,y)\| \le \frac{\lambda}{K}(\widetilde{E}_r(Kx^\alpha y^\beta) - 1), \tag{21}$$

*где*

$$\widetilde{E}_r(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)\Gamma(\beta k+1)}.$$

**Доказательство.** Построим последовательности функций $u^{(k)}(x,y)$, $v_k(x,y)$, $k \ge 0$, $u^{(0)}(x,y) = \tau(x,y)$, $v^{(0)}(x,y) = D_0^r\tau(x,y)$, $u^{(k)}(x,y) = I_0^r v_k(x,y) + \mu(x,y)$, $k \ge 1$, где $v_k(x,y)$ — такой измеримый селектор измеримого м. о. $F(x,y,u^{(k-1)}(x,y))$, что для п. в. $(x,y) \in G$

$$\|v_k(x,y) - v_{k-1}(x,y)\| = \rho(v_{k-1}(x,y), F(x,y,u^{(k-1)}(x,y))). \tag{22}$$

По индукции получаем

$$\|v_{m+1}(x,y)-v_m(x,y)\|\le\frac{\lambda(Kx^\alpha y^\beta)^m}{\Gamma(m\alpha+1)\Gamma(m\beta+1)}\ \text{для п. в. } (x,y)\in G, \tag{23}$$

$$\|u_{m+1}(x,y)-u_m(x,y)\|\le\frac{\lambda}{K}\frac{(Kx^\alpha y^\beta)^m}{\Gamma(m\alpha+1)\Gamma(m\beta+1)},\quad (x,y)\in G. \tag{24}$$

При помощи оценок (23), (24) доказываем, что последовательность $v_k(x,y)$, $k\ge0$, п. в. на $G$ сходится к функции $v(x,y)\in L(G)$, а последовательность $u_k(x,y)$, $k\ge0$, сходится равномерно на $G$ к функции $u(x,y)\in C(G)$. Согласно теореме Лебега $u(x,y)=I_0^rv(x,y)+\mu(x,y)$, а согласно лемме 4 $u(x,y)$ удовлетворяет условию (16), $u_{1-r}(x,y)\in AC(\overline{G})$, $D_0^ru(x,y)=v(x,y)$ для п. в. $(x,y)\in G$. Из (22) при $k\to\infty$ следует, что $u(x,y)$ удовлетворяет п. в. на $G$ д. в. (15).

Воспользовавшись оценкой (24), получаем, что для $(x,y)\in G$ имеет место оценка

$$\|u^{(m+1)}(x,y)-\tau(x,y)\|\le\sum_{k=0}^m\|u^{(k+1)}(x,y)-u^{(k)}(x,y)\|\le\frac{\lambda}{K}(\widetilde{E}_r(Kx^\alpha y^\beta)-1).$$

Отсюда при $m\to\infty$ следует (21). □

**Следствие.** Пусть $\tau(x,y)=D^2_{xy}I_0^r\omega(x,y)$. Тогда, как и в лемме 4, докажем, что $\tau_{1-r}(x,y)=\omega(x,y)$. Следовательно, $\tau(x,y)$ удовлетворяет условиям (а), (б) определения 1 и краевым условиям (16), а $D_0^r\tau(x,y)=D^2_{xy}\omega(x,y)=\theta$ для п. в. $(x,y)\in G$. Поэтому с учетом условия $(\mathrm{A}_3)$ $\rho(D_0^r\tau(x,y),F(x,y,\tau(x,y)))\le M$ и согласно теореме 1 множество решений задачи (15), (16) непусто.

**4°.** Рассмотрим далее д. в. (15) и краевые условия

$$u_{1-r}(x,0)=u_{1-r}(0,y)=\theta,\quad x\in[0,a],\quad y\in[0,b]. \tag{25}$$

Функция $u:\overline{G}\to E^n$ называется решением задачи (15), (25), если $u(x,y)$ удовлетворяет условиям определения 1 в области $\overline{G}$. Если $u(x,y)$ есть некоторое решение задачи (15), (25), то $u(x,y)=I_0^rv(x,y)$, где $v(x,y)$ — измеримый селектор м. о. $F(x,y,u(x,y))$. Так как $\|v(x,y)\|\le M$, то легко доказать, что $\lim I_0^rv(x,y)=\theta$ при $x\to0$ для каждого $y\in(0,b]$ и при $y\to0$ для каждого $x\in(0,a]$. Полагаем $I_0^rv(x,y)=\theta$ при $x=0$, $y\in[0,b]$ и $y=0$, $x\in[0,a]$.

Имеет место утверждение, аналогичное теореме 1, причем оценка (21) верна для $(x,y)\in\overline{G}$. Если в следствии положить $\tau(x,y)=\theta$, то получим, что множество решений задачи (15), (25), которое обозначим через $H(F;r)$, непусто и согласно лемме 2 $H(F;r)\subset I_0^r(L)$.

**Теорема 2.** *Пусть м. о.* $F:\overline{G}\times E^n\to\operatorname{conv}E^n$ *удовлетворяет условию* $(\mathrm{A}_3)$ *и условиям:*

$(\mathrm{B}_1)$ $F(x,y,\cdot)$ *полунепрерывно сверху для п. в.* $(x,y)\in\overline{G}$;

$(\mathrm{B}_2)$ *для любого* $u\in E^n$ *существует измеримый селектор м. о.* $F(\cdot,\cdot,u)$.

*Тогда существует решение задачи* (15), (25).

**Доказательство.** Область $G$ покроем сеткой с узлами $(x_i,y_j)$, $x_i=ih$, $y_j=jl$, $mh=a$, $ml=b$, и пусть $G_{ij}=[x_i,x_{i+1}]\times[y_j,y_{j+1}]$. Построим функцию $u^{(m)}:\overline{G}\to E^n$, удовлетворяющую краевым условиям (25). Пусть $\gamma_{00}:G_{00}\to E^n$ — некоторый измеримый селектор м. о. $F(x,y,\theta)$. Полагаем $u^{(m)}(x,y)=I_0^r\gamma_{00}(x,y)$ в области $G_{00}$. Предположим, что функция $U^{(m)}(x,y)$ построена в области $[0,x_{i+1}]\times[0,y_{j+1}]\backslash(x_i,x_{i+1}]\times(y_j,y_{j+1}]$ , и определим ее в области $G_{ij}$. Если $\gamma_{ij}:G_{ij}\to E^n$ — измеримый селектор м. о. $F(x,y,u^{(m)}(x_i,y_j))$, а $v_m(x,y)=\gamma_{k\nu}(x,y)$ для $(x,y)\in G_{k\nu}$, $k=\overline{0,i}$, $\nu=\overline{0,j}$, то для $(x,y)\in G_{ij}$ полагаем $u^{(m)}(x,y)=I_0^rv_m(x,y)$. Так как $v_m\in L(G)$, то $u^{(m)}_{1-r}(x,y)=I_0^1v_m(x,y)\in AC(\overline{G})$ и множество функций $u^{(m)}_{1-r}(x,y)$, $m\ge1$, является равномерно ограниченным и равностепенно непрерывным.

Кроме того, для любых $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in G$, $x_1 \leq x_2$, $y_1 \leq y_2$, $m \geq 1$

$$\|u^{(m)}(x_2, y_2) - u^{(m)}(x_1, y_1)\| \leq \frac{M}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+\beta)} a^\alpha (y_2^\beta - y_1^\beta) +$$
$$+ b^\beta (x_2^\alpha - x_1^\alpha) + 2(b^\beta (x_2 - x_1)^\alpha + a^\alpha (y_2 - y_1)^\beta) + (x_2 - x_1)^\alpha (y_2 - y_1)^\beta], \tag{26}$$

а также

$$\|u^{(m)}(x, y)\| \leq \frac{M a^\alpha b^\beta}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+\beta)}, \quad m \geq 1. \tag{27}$$

Следовательно, и множество функций $u^{(m)}(x, y)$, $m \geq 1$, является равномерно ограниченным и равностепенно непрерывным. В соответствии с теоремой Арцела существуют подпоследовательности (обозначим их также $u^{(m)}(x, y)$ и $u_{1-r}^{(m)}(x, y)$, $m \geq 1$), которые равномерно на $\overline{G}$ сходятся соответственно к $u(x, y)$ и $z(x, y)$. Определим функцию $g^{(m)}(x, y) : \overline{G} \to E^n$, полагая $g^{(m)}(x, y) = u^{(m)}(x_i, y_j)$, если $(x, y) \in [x_i, x_{i+1}) \times [y_j, y_{j+1})$, $i, j = \overline{0, m-2}$, $g^{(m)}(x, y) = u^{(m)}(x_{m-1}, y_j)$, если $(x, y) \in G_{m-1,j}$, $j = \overline{0, m-1}$, и $g^{(m)}(x, y) = u^{(m)}(x_i, y_{m-1})$, если $(x, y) \in G_{i,m-1}$, $i = \overline{0, m-2}$. Очевидно, $g^{(m)}(x, y)$ также равномерно на $\overline{G}$ сходится к $u(x, y)$ при $m \to \infty$ и

$$v_m(x, y) \in F(x, y, g^{(m)}(x, y)). \tag{28}$$

Воспользовавшись (28) и леммой 1.2 ([2], с. 19), получаем для п. в. $(x, y) \in \overline{G}$

$$D_{xy}^2 z(x, y) \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{\text{co}} \bigcup_{k=i}^{\infty} D_{xy}^2 u_{1-r}^{(k)}(x, y) \subset$$
$$\subset \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{\text{co}} \bigcup_{k=i}^{\infty} F(x, y, g^{(k)}(x, y)) \subset F(x, y, u(x, y)).$$

Поскольку $u_{1-r}^{(m)}(x, y) = I_0^{1-r} u^{(m)}(x, y)$, то в соответствии с теоремой Лебега $z(x, y) = I_0^{1-r} u(x, y) = u_{1-r}(x, y)$. Отсюда и из (3) следует, что п. в. на $\overline{G}$ $D_0^r u(x, y) = D_{xy}^2 z(x, y) \in F(x, y, u(x, y))$. Этим завершается доказательство теоремы 2. □

**Теорема 3.** *Пусть м. о. $F : \overline{G} \times E^n \to \text{conv}\, E^n$ удовлетворяет условиям* ($\text{B}_1$), ($\text{B}_2$) *и существуют такие постоянные $R$ и $T$, что $|F(x, y, u)| \leq R + T\|u\|$ для $(x, y, u) \in \overline{G} \times E^n$. Тогда существует решение задачи* (15), (25).

Для доказательства теоремы 3 можно воспользоваться техникой доказательства теоремы 1 работы [7], адаптированной применительно к задаче (15), (25). При этом вместо леммы 4 этой работы следует воспользоваться следующим аналогом неравенства Вендроффа для интеграла Римана-Лиувилля дробного порядка $r$.

**Лемма 5.** *Пусть $v : \overline{G} \to [0, +\infty)$, $v \in C(G)$, и для $(x, y) \in \overline{G}$*

$$v(x, y) \leq A + \frac{B}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^x \int_0^y (x - s)^{\alpha-1} (y - t)^{\beta-1} v(s, t) ds\, dt,$$

*где $A$ и $B$ — неотрицательные постоянные. Тогда для $(x, y) \in \overline{G}$*

$$v(x, y) \leq A \cdot \widetilde{E}_r(B x^\alpha y^\beta).$$

**Теорема 4.** *Если м. о. $F : \overline{G} \times E^n \to \text{conv}\, E^n$ удовлетворяет условиям теоремы 2, то множество $H(F; r)$ является компактным подмножеством пространства $C(\overline{G})$.*

**Доказательство.** Для любого решения $u(x,y) \in H(F;r)$ справедливы оценки (26), (27). Следовательно, множество $H(F;r)$ является равномерно ограниченным и равностепенно непрерывным и остается еще доказать, что $H(F;r)$ — замкнутое множество. Рассмотрим последовательность $u^{(k)}(x,y) \in H(F;r)$, $k \geq 1$, сходящуюся к $u(x,y) \in C(G)$. Так как $u^{(k)}(x,y) = I_0^r v_k(x,y)$, где $v_k(x,y)$ — некоторый измеримый селектор м. о. $F(x,y,u^{(k)}(x,y))$, то $u_{1-r}^{(k)}(x,y) = I_0^1 v_k(x,y) \in AC(\overline{G})$. Далее, рассуждая, как в теореме 2 при обосновании сходимости последовательности $u^{(m)}(x,y)$, $m \geq 1$, к решению задачи (15), (25), докажем, что $u(x,y) \in H(F;r)$. $\square$

## Литература


1. Dawidowski M., Kubiaczyk I. *On bounded solutions of hyperbolic differential inclusion in Banach spaces* // Demonstratio Math. – 1992. – V. 25. – № 1–2. – P. 153–159.
2. Sosulski W. *Własności rozwiąnzań uogólnionych równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych typu hiperbolicznego.* – Zielona Góra, 1982. – 68 s.
3. Vasile Staicu. *On a non-convex hyperbolic differential inclusion* // Proc. Edinburg Math. Soc. – 1992. – V. 35. – P. 375–382.
4. Витюк А.Н. *О существовании решений одного класса многозначных дифференциальных уравнений с частными производными* // Укр. матем. журн. – 1990. – Т.42. – № 11. – С.1454–1460.
5. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.* – Минск: Наука, 1987. – 687 с.
6. Walczak S. *Absolutely continuous functions of several variables and their application to differential equation* // Bull. Acad. polon. sci. Ser. sci. math., astron. et phys. – 1987. – V. 35. – № 11–12. – P. 733 –734.
7. Булгаков А.И. *К вопросу о свойствах множества решений дифференциальных включений* // Дифференц. уравнения. – 1976. - Т. 12. – № 6. – С.971–977.
8. Беккенбах Э., Беллман Р. *Неравенства.* – М.: Мир, 1965. – 276 с.


*Одесский университет (Украина)*

*Поступила*
06.02.1995