ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 3 (514)

УДК 517.983

Н.Б. УСКОВА

К МЕТОДУ ПОДОБНЫХ ОПЕРАТОРОВ В БАНАХОВЫХ АЛГЕБРАХ

Одним из самых распространенных методов исследования спектральных свойств линейных замкнутых операторов является резольвентный метод, основанный на использовании интегрального представления проектора Рисса $P(\sigma, A)$, построенного по спектральному множеству σ оператора A. Альтернативным методом исследования является метод подобных операторов ([1], с. 93; [2], [3]), свободный от оценок резольвенты оператора A на системе контуров, окружающих спектр $\sigma(A)$. Основная идея метода состоит в следующем. Заданный оператор рассматривается как разность двух операторов. Первый оператор, спектральные свойства которого легко изучать, считается невозмущенным, а второй, малый в некотором смысле по сравнению с первым, — возмущением первого оператора. Затем преобразованием подобия возмущенный оператор переводится в более просто устроенный оператор, спектральные свойства которого близки к спектральным свойствам невозмущенного оператора. Целью данной статьи является изложение метода подобных операторов применительно к банаховым алгебрам, при этом метод не переносится автоматически, а возникает ряд особенностей, которые и отражены в данной статье. Кроме того, в качестве примера применения метода в банаховых алгебрах рассматривается обусловленность простого изолированного собственного значения несимметричной матрицы.

Напомним некоторые понятия из банаховых алгебр (напр., [4], с. 255). Пусть B — банахова алгебра, в общем случае некоммутативная, с единицей e. Спектр $\sigma(a, B)$ элемента $a \in B$ состоит из всех таких чисел $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых элемент $a - \lambda e$ необратим, открытое множество $\rho(a) = \mathbb{C} \setminus \sigma(a)$ — резольвентное множество элемента a, функция $R(\cdot, a) : \rho(a) \to B$, $R(\lambda, a) = (\lambda e - a)^{-1}$, $\lambda \in \rho(a)$ — резольвента элемента a. Элементы $a_1, a_2 \in B$ называются подобными, если существует такой обратимый элемент $u \in B$, что $a_1 u = u a_2$. Очевидно, подобные элементы имеют одинаковый спектр.

Пусть $a \in B$ — хорошо изученный элемент, называемый далее невозмущенным, и $b \in B$ принадлежит некоторому подмножеству $M \subset B$. Так же, как в [1], [2], будем придерживаться аксиоматического подхода при изучении спектральных свойств возмущенных элементов из алгебры B.

Определение 1. Пусть M — подпространство из B, $J : M \to M$, $\Gamma : M \to B$ — линейные операторы. Тройку (M, J, Γ) назовем допустимой для элемента $a \in B$, если

1) M — банахово пространство со своей нормой и $\|x\|_M \geq \mathrm{const}\, \|x\|$ $\forall x \in M$;
2) J и Γ — непрерывные линейные операторы;
3) $a\Gamma x - \Gamma x a = x - Jx$ $\forall x \in M$;
4) $x\Gamma y, (\Gamma x)y \in M$ $\forall x, y \in M$ и существует число $\gamma > 0$ такое, что $\|\Gamma\| \leq \gamma$, $\max\{\|x\Gamma y\|_M, \|(\Gamma x)y\|_M\} \leq \gamma \|x\|_M \|y\|_M$;
5) если J — проектор, т. е. $J^2 = J$, то $\operatorname{Ker} J = \operatorname{Im} \Gamma$, $\operatorname{Ker} \Gamma = \operatorname{Im} J$, где $\operatorname{Ker} J = \{x \in M : Jx = 0\}$, $\operatorname{Im} J = \{Jx,\ x \in M\}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 04-01-00141).

Зафиксируем некоторую допустимую тройку для элемента a и будем искать обратимый элемент $u = e + \Gamma x$ с тем, чтобы выполнялось равенство

$$(a - b)(e + \Gamma x) = (e + \Gamma x)(a - Jx), \tag{1}$$

где $b \in M$ и $x \in M$ — подлежащий определению элемент. Тогда из равенства (1) с учетом п. 3) определения 1 следует, что элементы $a - b$ и $a - Jx$ подобны, если x есть решение рассматриваемого в M уравнения

$$x = b\Gamma x - \Gamma x J x + b. \tag{2}$$

В случае, если J — проектор, то, применяя к обеим частям равенства (2) оператор J и учитывая п. 5) определения 1, получаем для неизвестного элемента x еще одно уравнение

$$x = b\Gamma x - \Gamma x J b - \Gamma x J(b\Gamma x) + b. \tag{3}$$

Получим условия существования решений нелинейных уравнений (2) и (3).

Пусть $T \subset B$ — некоторое банахово пространство элементов из банаховой алгебры B и $\|x\|$ — норма элемента x в T. Рассмотрим два линейных ограниченных оператора $L : T \to T$ и $Q : T \to T$ и $f,\ f_1$ — некоторые элементы из T. Рассмотрим в T нелинейное уравнение

$$x = fLx + Lxf_1 + LxQx + f = \Phi(x). \tag{4}$$

С помощью принципа сжимающих отображений ([5], с. 671) исследуем вопрос разрешимости уравнения (4). Пусть $\mathcal{B}(0, R)$ — шар с центром в нуле и радиусом $R = r\|f\|$, $x \in \mathcal{B}(0, R)$, $\|x\| \le r\|f\|$. Тогда в силу (4)

$$\|x\| \le \|f\| \cdot (\|L\| \cdot \|f\| r + \|L\| \cdot \|f_1\| r + \|L\| \cdot \|Q\| \cdot \|f\| r^2 + 1).$$

Следовательно, шар $\mathcal{B}(0, R)$ переводится отображением Φ в себя, если

$$\|L\| \cdot \|Q\| \cdot \|f\| r^2 + (\|L\| \cdot \|f\| + \|L\| \cdot \|f_1\| - 1)r + 1 \le 0. \tag{5}$$

Выпишем условия, при которых отображение $\Phi : T \to T$ будет сжимающим в шаре $\mathcal{B}(0, R)$,

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \le \|x - y\| \cdot q,$$

где

$$q = \|f\| \cdot \|L\| + \|f_1\| \cdot \|L\| + 2\|L\| \cdot \|Q\| \cdot r \cdot \|f\| < 1. \tag{6}$$

Легко проверить, что для r, найденных как решение квадратного неравенства (5), условие (6) выполняется.

Итак, справедлива

Лемма 1. *Пусть операторы L, Q, элементы f, f_1 и число r таковы, что выполняется неравенство* (5). *Тогда уравнение* (4) *имеет единственное решение x_* в шаре $\mathcal{B}(0, r\|f\|)$, и оно может быть найдено методом простых итераций, где $x^{(0)} = 0$, $x^{(1)} = f$, $x^{(2)} = \Phi(x^{(1)}), \ldots$, $x^{(k+1)} = \Phi(x^k)$, $k = 1, \ldots, n$, причем*

$$\|x_* - x^{(n)}\| \le \frac{q^n}{1 - q}\|f\|.$$

Теорема 1. *Элементы $a - b$ и $a - Jx_*$ подобны, если*
1) $\|b\|_M \gamma \|J\| < 3 - 2\sqrt{2}$ *и x_* — решение уравнения* (2);
2) $\|b\|_M \gamma \|J\| < 1/4$ *и x_* — решение уравнения* (3).

Доказательство. Так как схема доказательства утверждений 1) и 2) одинакова, то докажем утверждение 2). В данном случае неравенство (5) имеет вид

$$\gamma^2\|J\|\cdot\|b\|^2r^2+(\|b\|\gamma+\gamma\|J\|\cdot\|b\|-1)r+1\le 0.$$

Обозначив $\|b\|\cdot\gamma\cdot\|J\|=\varepsilon$, получим неравенство $\varepsilon^2r^2+(2\varepsilon-1)r+1\le 0$, существование решений которого обеспечивает условие $(2\varepsilon-1)^2-4\varepsilon^2>0$, или $\varepsilon<\frac{1}{4}$. Осталось применить лемму 1.

В общем случае элемент x_* может быть найден методом простых итераций, если в качестве нулевого приближения рассматривать нулевой элемент. □

Пусть спектр $\sigma(a,B)$ невозмущенного элемента a представи́м в виде $\sigma(a,B)=\sigma_1\cup\sigma_2$, где σ_1 конечно, $\sigma_1\cap\sigma_2=\emptyset$ и $\sigma_2\ne\emptyset$. Символом p_1 обозначим идемпотент, определенный формулой

$$p_1=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma R(\lambda,a)\,d\lambda,$$

где γ — спрямляемый жорданов контур, окружающий множество σ_1, и $p_2=e-p_1$. Очевидно, что p_1, p_2 необратимы в B. С помощью идемпотентов p_1 и p_2 каждый элемент $x\in B$ представим в виде $x=p_1xp_1+p_2xp_1+p_1xp_2+p_2xp_2=\sum\limits_{i,j=1,2}x_{ij}$, где $x_{ij}=p_ixp_j$. Таким образом, алгебра B есть прямая сумма замкнутых подпространств $B_{ij}=\{x\in B: p_ixp_j=x\}$ и $M_{ij}=B_{ij}\cap M$, $i,j=1,2$. Отметим, что подпространства B_{ii}, $i=1,2$, являются подалгебрами с единицами $e_1=p_1$ и $e_2=p_2$ соответственно, причем $xy=yx=0\ \ \forall x\in B_{11}$, $y\in B_{22}$, поэтому подалгебры B_{11} и B_{22} образуют прямую сумму $B_{11}\oplus B_{22}=B_0\subset B$. Следовательно, алгебра B изоморфна алгебре матриц второго порядка, где $x_{ii}=p_ixp_i$, $i=1,2$, — элементы подалгебр B_{ii}, $i=1,2$, и $x_{12}=p_1xp_2$, $x_{21}=p_2xp_1$ — элементы подпространств B_{12} и B_{21} соответственно, если изоморфизм задан формулой

$$N: x\mapsto\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{pmatrix},$$

причем можно положить $\|Nx\|_2=\|x\|$, т. е. норму матрицы элемента $x\in B$ считаем равной норме элемента x в алгебре B.

Лемма 2. *Пусть $x=x_1+x_2\in B_0$, $x_1\in B_{11}$, $x_2\in B_{22}$. Тогда $\sigma(x,B)=\sigma(x_1,B_{11})\cup\sigma(x_2,B_{22})$.*

Утверждение леммы следует из того, что элемент $x\in B_0$ обратим тогда и только тогда, когда обратимы элементы x_1 и x_2 в своих подалгебрах.

Перейдем к построению линейных операторов $J: M\to M$ и $\Gamma: M\to B$. Пусть

$$Jx=p_1xp_1+p_2xp_2,\quad x\in M,$$

т. е. оператор J осуществляет диагонализацию матрицы элемента x и $J^2=J$. Оператор Γ однозначно определяется в п. 3) определения 1. Положим $y=\Gamma x$, тогда y есть решение рассматриваемого в B уравнения

$$ay-ya=x_{21}+x_{12}, \tag{7}$$

удовлетворяющее условию $Jy=0$. Следовательно, $y_{11}=y_{22}=0$ и уравнение (7) эквивалентно системе уравнений

$$\begin{aligned}a_{11}y_{12}-y_{12}a_{22}&=x_{12},\\ a_{22}y_{21}-y_{21}a_{11}&=x_{21}.\end{aligned}$$

Из ([6], гл. 1) следует, что каждое из этих уравнений имеет единственное решение

$$\begin{aligned}y_{21}&=-\frac{1}{4\pi^2}\int_{\gamma_2}\int_{\gamma_1}\frac{R(\mu,a_{22})x_{21}R(\lambda,a_{11})}{\mu-\lambda}d\lambda\,d\mu,\\ y_{12}&=-\frac{1}{4\pi^2}\int_{\gamma_2}\int_{\gamma_1}\frac{R(\mu,a_{11})x_{12}R(\lambda,a_{22})}{\mu-\lambda}d\lambda\,d\mu,\end{aligned}$$

где γ_1 и γ_2 — жордановы спрямляемые контуры, окружающие взаимно непересекающиеся области G_1 и G_2, которые содержат множества σ_1 и σ_2, и R — резольвента элемента a_{ii} как элемента подалгебры B_{ii}, $i = 1, 2$. Таким образом, матрица элемента $y = \Gamma x$ построена, и оператор Γ определен.

Рассмотрим частный случай, когда $\sigma_1 = \{\lambda_1\}$ — одноточечное множество.

Определение 2. Изолированная точка спектра $\lambda_1 \in \sigma(a)$ называется полупростой, если $ap_1 = \lambda_1 p_1$, и простой, если подалгебра B_{11} одномерна, т. е. все элементы кратны идемпотенту p_1.

В частности, одномерность алгебры B_{11} влечет выполнение равенства $p_1 x p_1 = \alpha(x) p_1$, где $\alpha : B \to \mathbb{C}$ — линейный функционал, причем, очевидно, $\|\alpha\| \leq \|p_1\|$. В дальнейшем этот функционал будет использоваться в оценках отклонения спектра невозмущенного элемента от возмущенного.

Пусть λ_1 — полупростая точка спектра невозмущенного элемента a. Тогда непосредственной проверкой можно убедиться, что оператор Γ имеет вид $\Gamma x = p_1 x s - s x p_1$, $x \in M$, где элемент $s \in B$ однозначно определяется условием $sp_1 = p_1 s = 0$, $(\lambda_1 e_2 - a_{22})s = s(\lambda_1 e_2 - a_{22}) = e_2$, т. е. элемент s имеет матрицу Ns вида $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (\lambda_1 e_2 - a_{22})^{-1} \end{pmatrix}$, и $\|s\| = \|(\lambda_1 e - a_{22})\|^{-1}$.

Из уравнения (3), умножая обе части его слева и справа на идемпотенты p_1, p_2, получим следующую систему уравнений для определения матрицы искомого элемента x:

$$x_{11} = b_{12}\Gamma x_{21} + b_{11}, \tag{8}$$

$$x_{21} = b_{22}\Gamma x_{21} - (\Gamma x_{21})b_{11} - (\Gamma x_{21})b_{12}\Gamma x_{21} + b_{21}, \tag{9}$$

$$x_{12} = b_{11}\Gamma x_{12} - (\Gamma x_{12})b_{22} - (\Gamma x_{12})b_{21}\Gamma x_{12} + b_{12}, \tag{10}$$

$$x_{22} = b_{21}\Gamma x_{12} + b_{22}. \tag{11}$$

Введем следующие обозначения. Через $\widetilde{b}_{22}$ обозначим наибольшую из норм операторов $x \mapsto (\Gamma x)b_{22} : M_{12} \to M_{12}$, $x \mapsto b_{22}\Gamma x : M_{21} \to M_{21}$, символами $\widetilde{b}_{12}$ и $\widetilde{b}_{21}$ — соответственно нормы операторов $x \mapsto b_{12}\Gamma x : M_{21} \to M_{11}$, $x \mapsto b_{21}\Gamma x : M_{12} \to M_{22}$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия*

$$\gamma\|b_{11}\| + \widetilde{b}_{22} + 2(\widetilde{b}_{12}\|b_{21}\|\gamma)^{1/2} < 1, \tag{12}$$

$$\gamma\|b_{11}\| + \widetilde{b}_{22} + 2(\widetilde{b}_{21}\|b_{12}\|\gamma)^{1/2} < 1. \tag{13}$$

Тогда каждое из уравнений (9), (10) *имеет единственное решение, которое можно найти методом последовательных приближений, отправляясь от нулевого элемента, причем*

$$\|x_{21}\| \leq 2\|b_{21}\|(1 - (\gamma\|b_{11}\| + \widetilde{b}_{22}) + \psi_1)^{-1} = g_1,$$

$$\|x_{12}\| \leq 2\|b_{12}\|(1 - (\gamma\|b_{11}\| + \widetilde{b}_{22}) + \psi_2)^{-1} = g_2,$$

где

$$\psi_1 = ((1 - \gamma\|b_{11}\| - \widetilde{b}_{22}) - 4\widetilde{b}_{21}\|b_{12}\|\gamma)^{1/2},$$

$$\psi_2 = ((1 - \gamma\|b_{11}\| - \widetilde{b}_{22}) - 4\widetilde{b}_{12}\|b_{21}\|\gamma)^{1/2}.$$

Доказательство. Рассмотрим, например, уравнение (9). Для него условие (5) имеет вид

$$\widetilde{b}_{12}\gamma\|b_{21}\|r^2 + \left(\widetilde{b}_{22} + \gamma\|b_{11}\| - 1\right) r + 1 \leq 0.$$

Тогда условие существования решений для него есть условие (12). Применяя лемму 1, получаем, что уравнение (9) разрешимо и для его решения (при $n = 0$) имеем приведенную выше оценку. □

Замечание. Выполнение условий (12), (13) гарантирует подобие возмущенного элемента $a - b$ элементу $a - x_{11} - x_{22}$.

Теперь, обладая приближениями для x_{11} и x_{22}, можно получить информацию о спектре возмущенного элемента $a-b$.

Представим элемент $\widetilde{a}_{11}=a_{11}-x_{11}$ в виде $a_{11}-b_{11}-(x_{11}-b_{11})$. Пусть $\sigma(a_{11}-b_{11},B_{11})$ известен, тогда из (8), (9) следует, что $\sigma(\widetilde{a}_{11},B_{11})\subset\mathbb{C}\setminus V$,

$$V=\{\lambda\in\rho(a_{11}-b_{11}):\|a_{11}-b_{11}-\lambda_1 e_1\|^{-1}\widetilde{b}_{12}g_1<1\}.$$

Аналогичную оценку можно выписать для $\sigma(a_{22}-x_{22},B_{22})$.

Рассмотрим теперь случай, когда λ_1 — полупростая точка спектра. Тогда уравнения (8), (9) превратятся в уравнения

$$x_{11}=b_{11}-b_{12}sx_{21}, \tag{14}$$

$$x_{21}=-b_{22}sx_{21}+sx_{21}b_{11}-sx_{21}b_{12}sx_{21}+b_{21}. \tag{15}$$

Теорема 3. *Пусть выполнено неравенство*

$$\|s\|\,\|b_{11}\|+\widetilde{b}_{22}+2(\widetilde{b}_{12}\|b_{21}\|\cdot\|s\|)^{1/2}<1, \tag{16}$$

где символом $\widetilde{b}_{22}$ обозначена норма оператора $x\mapsto b_{22}sx:M_{21}\to M_{21}$, а символом $\widetilde{b}_{12}$ — норма оператора $x\mapsto b_{12}sx:M_{21}\to M_{11}$. Тогда уравнение (15) имеет единственное решение, которое можно найти методом простых итераций, причем

$$\|x_{21}\|<g_1,\quad \|x_{11}-b_{11}\|\le\widetilde{b}_{12}g_1,$$

где $g_1=2\|b_{21}\|(1-(\|s\|\,\|b_{11}\|+\widetilde{b}_{22})+\psi_1)^{-1}$.

Доказательство теоремы 3 аналогично доказательству теоремы 2.

Пусть λ_1 — простая точка спектра $\sigma(a_{11},B_{11})$, и λ — точка спектра возмущенного элемента $a-b$. Тогда из (14) следует $\alpha(x)=\alpha(b)-\alpha(bsx)$,

$$|\lambda-\lambda_1|\le\frac{\|b_{11}\|+\widetilde{b}_{12}g_1}{\|p_1\|}\le|\alpha(b)|+\frac{\widetilde{b}_{12}g_1}{\|p_1\|}, \tag{17}$$

$$|\lambda-\lambda_1+\alpha(b)|\le\frac{\widetilde{b}_{12}g_1}{\|p_1\|}. \tag{18}$$

Обозначим через $\operatorname{Matr}\mathbb{C}^n$ алгебру комплексных матриц размера $n\times n$. Рассмотрим алгебру $C=C(K,\operatorname{Matr}\mathbb{C}^n)$ непрерывных на компакте K функций со значениями в алгебре $\operatorname{Matr}\mathbb{C}^n$, нормой $\|\varphi\|=\max\limits_{t\in K}\|\varphi(t)\|$ и умножением $(fg)(t)=f(t)g(t)\ \forall f,g\in C(K,\operatorname{Matr}\mathbb{C}^n)$. Единичным элементом такой алгебры служит функция $e(t)\equiv E$, где E — единичная матрица для всех $t\in K$.

Пусть a — невозмущенный элемент алгебры $C=C(K,\operatorname{Matr}\mathbb{C}^n)$, $\sigma(a,C)=\sigma_1\cup\sigma_2$, $\sigma_1\cap\sigma_2=\emptyset$ и σ_1, σ_2 — непустые множества. Непосредственно из теорем 2 и 3 следует

Теорема 4. *Пусть возмущение $b\in C(K,\operatorname{Matr}\mathbb{C}^n)$ такое, что выполняются условия (12), (13). Тогда возмущенный элемент $a-b$ подобен элементу $a-x_{11}-x_{22}$, где $x_{11}=p_1xp_1$ и $x_{22}=p_2xp_2$ суть решения уравнений (8) и (11) соответственно, причем $\sigma(a,C)=\sigma(a_{11}-x_{11},C_{11})\cup\sigma(a_{22}-x_{22},C_{22})$ и $\sigma(a_{11}-x_{11},C_{11})\subset\mathbb{C}\setminus V_1$,*

$$V_1=\{\mu\in\rho(a_{11}-b_{11}):\|a_{11}-b_{11}-\mu e_1\|^{-1}\widetilde{b}_{12}g_1<1\},$$

$\sigma(a_{22}-x_{22},C_{22})\subset\mathbb{C}\setminus V_2$,

$$V_2=\{\mu\in\rho(a_{22}-b_{22})\,:\,\|a_{22}-b_{22}-\mu e_2\|^{-1}\widetilde{b}_{21}g_2<1\}.$$

Более того, если λ_1 — простая точка спектра невозмущенного элемента, то для точки спектра λ возмущенного элемента имеют место оценки (17), (18).

Применим теорему 4 к вопросу обусловленности простого изолированного собственного значения матрицы $A_0 = (a_{ij})$. Если матрица A_0 взята из математической модели, описывающей реальный процесс, то числа a_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$, обычно известны с некоторой неустранимой погрешностью. Кроме того, при применении любого численного алгоритма нахождения собственных значений также вносится вычислительная погрешность. Поэтому актуальным является вопрос обусловленности собственных значений, т. е. насколько найденное собственное значение близко к истинному.

Пусть A_0^ε — некоторое возмущение матрицы A_0 такое, что $\|A_0^\varepsilon - A_0\| < \varepsilon$, λ^ε — собственное значение возмущенной матрицы A_0^ε, λ — собственное значение невозмущенной матрицы A_0. В вычислительной математике широкое применение имеет оценка ([7], с. 310; [8])

$$|\lambda - \lambda^\varepsilon| \leq k(\lambda)\varepsilon + O(\varepsilon^2), \tag{19}$$

где $k(\lambda)$ — локальное число обусловленности собственного значения λ, причем $k(\lambda)$ в случае простоты собственного значения λ есть величина, обратная косинусу угла между левым и правым собственными векторами. Легко можно показать, что в этом случае $k(\lambda)$ есть норма ортопроектора на соответствующее одномерное подпространство. Отметим, что формула (19) эффективна только при $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, где ε_0 зависит от расположения и обусловленности остальных собственных значений и может оказаться практически нулем. Ниже уточним формулу (19) в случае простого собственного значения и укажем формулу для нахождения ε_0.

Зададим компакт

$$K = \prod_{i,j=1}^{n} [-\delta_{ij}, \delta_{ij}],$$

где $\delta_{ij} > 0$, или $K = [-\delta_{11}, \delta_{11}] \times [-\delta_{12}, \delta_{12}] \times \cdots \times [-\delta_{nn}, \delta_{nn}]$, т. е. K есть декартово произведение n^2 отрезков $[-\delta_{ij}, \delta_{ij}]$, $i, j = 1, \ldots, n$. Пусть $F : K \to \operatorname{Matr} \mathbb{C}^n$, $F(t) = (f_{ij}(t))$, положим

$$\|F\| = \|F(t)\|_{\operatorname{Matr} \mathbb{C}^n} = \max_{t \in K} \left(\sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}^2(t) \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{20}$$

Рассмотрим функцию $A(t) \in C(K, \operatorname{Matr} \mathbb{C}^n)$, определяемую формулой $A(t) = A_0(t) - \Phi(t)$, где $\Phi(t) = (t_{ij})$, $t_{ij} \in [-\delta_{ij}, \delta_{ij}]$, $A_0(t) \equiv A_0$. Очевидно, $\|\Phi\| \leq \Big(\sum\limits_{i,j=1}^{n} \delta_{ij}^2 \Big)^{\frac{1}{2}}$. Числа δ_{ij} характеризуют максимально возможную погрешность задания числа a_{ij}, $\delta_{ij} = 0$, если априори известно, что это число задано точно. Здесь проблема обусловленности сводится к нахождению спектра элемента $A(t)$, $t \in K$, из банаховой алгебры $C(K, \operatorname{Matr} \mathbb{C}^n)$.

Пусть λ_1 — изолированная полупростая точка спектра постоянной функции A_0. Тогда функция $P_1(t) = P_1$ также является постоянной и определяется из равенства $A_0 P_1 = \lambda_1 P_1$.

Теорема 5. *Пусть компакт K таков, что выполняется условие* (16) *относительно нормы, определяемой формулой* (20). *Тогда* $\sigma(A_{11}, C_{11}) \subset \mathbb{C} \setminus V$,

$$V = \{\mu \in \rho(\lambda_1 P_1 - P_1 \Phi P_1) : \|\lambda_1 P_1 - P_1 \Phi P_1 - \mu P_1\|^{-1} \cdot \widetilde{b}_{12} g_1 < 1\}.$$

Более того, если λ_1 — простая изолированная точка спектра постоянной функции A_0, то

$$|\lambda - \lambda_1| \leq \frac{\|\Phi_{11}\|}{\|P_1\|} + \frac{\widetilde{b}_{12} g_1}{\|P_1\|},$$

или

$$|\lambda - \lambda_1| \leq |\alpha(\Phi)| + O(\|P_1 \Phi P_2\| \cdot \|P_2 \Phi P_1\|). \tag{21}$$

Так как $\|\alpha(\Phi)\| \leq |\alpha| \cdot \|\Phi\| \leq \|p_1\| \cdot \|\Phi\|$, то из (21) непосредственно вытекает неравенство

$$|\lambda - \lambda_1| \leq \|p_1\| \cdot \|\Phi\| + O(\|P_1\Phi P_2\| \cdot \|P_2\Phi P_1\|) \leq \varepsilon\|p_1\| + O(\|P_1\Phi P_2\| \cdot \|P_2\Phi P_1\|).$$

Оценка (21) точнее оценки (19), потому что в (21) учитываются именно нормы блоков возмущения, задаваемого функцией Φ, и показано, что ведущую роль в оценивании близости найденного собственного значения к истинному играет норма блока Φ_{11} или же возможная погрешность в задании элементов блока P_1AP_1 известной матрицы A_0.

Замечание. Неравенство (16) дает значение ε_0, для которого имеют место оценки (19), (21).

Литература

1. Баскаков А.Г. *Гармонический анализ линейных операторов.* Учебное пособие. – Воронеж: Изд-во Воронежск. ун-та, 1987. – 164 с.
2. Баскаков А.Г. *Спектральный анализ возмущенных квазианалитических и спектральных операторов* // Изв. РАН. Сер. матем. – 1994. – Т. 58. – № 4. – С. 3–32.
3. Ускова Н.Б. *Об оценках спектральных проекторов возмущенных самосопряженных операторов* // Сиб. матем. журн. – 2000. – Т. 41. – № 3. – С. 712–721.
4. Рудин У. *Функциональный анализ.* – М.: Мир, 1975. – 443 с.
5. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ.* – М.: Наука, 1984. – 752 с.
6. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.* – М.: Наука, 1970. – 534 с.
7. Голуб Дж., Ван Лоун Ч. *Матричные вычисления.* – М.: Мир, 1999. – 548 с.
8. Агеев А.А. *Условные оценки устойчивости в несимметричной проблеме собственных значений* // Изв. вузов. Математика. – 2001. – № 9. – С. 3–12.

Воронежский государственный технический университет

Поступила 09.10.2002