ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 7 (434)

УДК 515.124.4

Е.Н. СОСОВ

О ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВАХ В ОБОБЩЕННОМ ХОРДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Систематическое исследование геометрии хордовых пространств содержится в монографии [1]; там же изложены основные свойства выпуклых множеств в хордовом пространстве (гл. 3). В данной статье условие конечной компактности хордового пространства заменяется более слабыми условиями и показывается, что основные свойства выпуклых множеств сохраняются после этой замены. Такая замена дает возможность включить в общее исследование соответствующие данной теме области из геометрии банаховых многообразий.

1. Основные определения и теоремы

Пусть (X,ρ) — метрическое пространство, а S — семейство сегментов пространства X ([2], с.42). Сегменты семейства S будем называть хордами. Обобщенным хордовым пространством назовем метрическое пространство X с фиксированным семейством S, удовлетворяющее условиям A_1–A_8 (ср. [1], с. 23).

A_1. Для каждой хорды все ее подсегменты (включая точки) являются хордами.

A_2. Каждые две различные точки пространства X можно соединить хордой.

A_3. Если в приведенной параметризации (т. е. параметризации пропорциональной длине дуги с областью определения равной отрезку $[0,1]$) последовательность хорд поточечно сходится к некоторому сегменту, то этот сегмент является хордой.

A_4. Для каждой точки $p\in X$ существует открытый шар $B(p,r_p)$, $r_p>0$ такой, что всякие две различные точки из этого шара можно соединить единственной хордой.

A_5. Всякую хорду, соединяющую точки из шара $B(p,r_p)$, можно единственным образом продолжить в обе стороны до большей хорды.

Иногда на пространство X будем налагать более сильное условие PG. Всякую хорду можно единственным образом продолжить до геодезической линии ([2], с. 48; [1], с. 3).

Для компактной записи следующих условий введем несколько обозначений. K обозначает множество всех вещественных чисел $\mathbb{R}$, если выполнено условие PG. В ином случае $K=[0,1]$. T ($T(x,y)$) обозначает хорду (с концами x, y). $|T|$ — длина хорды T. W_x — множество всех $y\in X$ таких, что существует единственная хорда $T(x,y)$. $T_\lambda(x,y)$ — точка, которая находится из следующих условий:

а) если $\lambda\in[0,1]$, то

$$T_\lambda(x,y)\in T(x,y),\quad |T(x,T_\lambda(x,y))|=\lambda|T(x,y)|;$$

б) если выполнено условие PG и $\lambda>1$ ($\lambda<0$), то $|T(x,T_\lambda(x,y))|=|\lambda|\,|T(x,y)|$ и точка $T_\lambda(x,y)$ принадлежит геодезической, содержащей хорду $T(x,y)$, таким образом, чтобы точка y (x) лежала между точкой x ($T_\lambda(x,y)$) и точкой $T_\lambda(x,y)$ (y).

Для каждого $\lambda\in K$ введем множество $\omega_\lambda(x,y)=\{T_\lambda(x,y):T\in S\}$.

A_6. Из условий $x=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$, $y=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ следует, что для каждого $\lambda\in K$ $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(\omega_\lambda(x_n,y_n),\omega_\lambda(x,y))=0$.

A_7. Для каждого $x \in X$ и для каждого $\lambda \in (0,1)$ отображение $\lambda_x : W_x \to W_x$, $\lambda_x = \omega_\lambda(x,y)$, отображает открытые в X множества, принадлежащие множеству W_x, в открытые в X множества.

A_8. Для каждого $p \in X$ существует непрерывное отображение $\tau_p : B(p,r_p) \to B(p,r_p)$, удовлетворяющее условию $p = \omega_{1/2}(x, \tau_p(x))$ для каждого $x \in B(p,r_p)$.

Замечание. Нетрудно проверить, что все условия A_1–A_8 выполняются в хордовом пространстве. Нетрудно также проверить, что условия A_7, A_8 следуют из условий A_1–A_4, A_6, PG.

В дальнейшем будем использовать следующие обозначения и определения. $\overline{M}$ ($\mathring{M}, \mathrm{Fr}\, M$) — замыкание (внутренность, граница) множества M. $F(p,M) = \{x \in M : \rho(p,x) = \rho(p,M)\}$ — множество всех оснований точки p на множестве M ([1], c. 10). $[xyz]^W$ означает, что точки x, y, z различные и точка y принадлежит некоторой хорде $T(x,z)$ ([1], c. 149). $[xyz]$ означает, что точки x, y, z различные и точка y принадлежит единственной хорде $T(x,z)$ ([1], c. 149). Обобщенное хордовое пространство назовем обобщенным G-пространством Буземана, если оно удовлетворяет условию

G. Семейство S совпадает с семейством всех сегментов пространства X (ср. [2], c. 54).

Множество M пространства X, удовлетворяющего условиям A_1, A_2, называется U-множеством, если для каждых двух различных точек из множества M существует единственная хорда с концами с этих точках (ср. [1], c. 73).

Обобщенным прямым хордовым пространством (обобщенным прямым G-пространством Буземана) назовем обобщенное хордовое пространство (обобщенное G-пространство Буземана), которое является U-множеством и удовлетворяет условию PG (ср. [1], c. 26).

Прямой назовем геодезическую, содержащую некоторую хорду, отличную от точки. Множество M пространства X, удовлетворяющего условиям A_1, A_2, назовем выпуклым, если для каждых двух различных точек из M все хорды с концами в этих точках принадлежат множеству M (ср. [1], c. 72). Множество M с непустой внутренностью обобщенного хордового пространства назовем строго выпуклым, если множество $\overline{M}$ является U-множеством и для каждых двух различных точек $x, y \in \overline{M}$ каждая точка z, удовлетворяющая условию $[xzy]$, является внутренней точкой множества M (ср. [2], c. 153).

Функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется слабо безвершинной, если она непрерывная, пространство X удовлетворяет условиям A_1, A_2 и $f(y) \le \max(f(x), f(z))$ для всех x, y, z таких, что $[xyz]^W$ ([1], c. 73). Прямую P_1 в прямом обобщенном хордовом пространстве назовем перпендикуляром к прямой P в точке x, если $\{x\} = P \cap P_1$ и каждая точка прямой P_1 имеет своим основанием на прямой P точку x. При этом прямая P называется трансверсалью к прямой P_1 в точке x (ср. [1], c. 10; [2], c. 158).

Пусть M — выпуклое множество с непустой внутренностью обобщенного хордового пространства такое, что $\overline{M} \subset B(p,r_p)$. Фиксируем точку $q \in \mathrm{Fr}\, M$. Опорной хордой множества M в точке q назовем хорду $T(x,y)$ такую, что $x, y \in B(p,r_p)$ и $[xqy]$. Обозначим множество всех точек на всех опорных хордах в точке q множества M через V_q (ср. [1], c. 79). Введем множества (ср. [1], c. 79)

$$A_q = \{x \in B(p,r_p) : \exists y (y \in \mathring{M}, [xyq])\},$$

$$C_q = \{x \in B(p,r_p) : \exists y (y \in \mathring{M}, [xqy])\}.$$

Полукасательной хордой множества M в точке q назовем хорду $T(q,x)$, удовлетворяющую условиям:

а) хорда $T(q,x)$ принадлежит некоторой опорной хорде множества M в точке q;

б) существует последовательность точек $\{y_n\}$ из A_q такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = z$ и $z \in T(q,x) \setminus \{q\}$.

Обозначим множество всех точек на всех полукасательных хордах множества M в точке q через $\widetilde{V}_q$ (ср. [1], с. 79). В обобщенном прямом хордовом пространстве имеет смысл говорить об опорных и полукасательных прямых, если в определениях множеств V_q, A_q, C_q, $\widetilde{V}_q$ заменить шар $B(p, r_p)$ на пространство X.

Прежде чем формулировать полученные результаты, приведем некоторые элементарные свойства, тесно связанные с этими результатами. Доказательства этих свойств те же, что и доказательства, приведенные в [1].

1. Непрерывная функция $f : X \to \mathbb{R}$ слабо безвершинная тогда и только тогда, когда для каждого $r \in \mathbb{R}$ множество $\{x \in X : f(x) \le r\}$ выпуклое ([1], с. 73).
2. Все замкнутые шары пространства X, удовлетворяющего условиям A_1, A_2, выпуклые тогда и только тогда, когда функция $f = \rho(p, x)$ слабо безвершинная ([1], с. 73).
3. Если пространство X удовлетворяет условиям A_1, A_2, точка y является основанием точки p на множестве M и выполняется условие $[pxy]^W$, то точка y является основанием точки x на множестве M ([1], с. 73). Если, кроме того, пространство X удовлетворяет условиям A_5, G, то точка y является единственным основанием точки x на множестве M (ср. [2], с. 156).
4. Пусть M является сегментом, лучом или геодезической линией пространства X с представлением $x = x(t)$. Если $z = z(u)$, $u \in [u_1, u_2]$ — непрерывная параметризованная кривая такая, что множество $F(z(u), M)$ связное и для каждого $u \in [u_1, u_2]$ и $x(t_1) \in F(z(u_1), M)$, $x(t_2) \in F(z(u_2), M)$, $t_3 \in [t_1, t_2]$, то существует число $u_3 \in [u_1, u_2]$ такое, что $x(t_3) \in F(z(u_3), M)$ ([1], с. 10).

Теорема 1. *Пусть M — выпуклое U-множество пространства X, удовлетворяющего условиям A_1–A_5. Тогда верны следующие утверждения.*

A. *Если выполняется условие A_7 и $\mathring{M} \neq \emptyset$, то $\mathring{M}$ — выпуклое множество и $\overline{M} = \overline{\mathring{M}}$.*
B. *Если выполняется условие A_6 и $\overline{M}$ является U-множеством, то $\overline{M}$ — выпуклое множество* (ср. [1], с. 74).
C. *Если $\overline{M}$ является U-множеством обобщенного хордового пространства X, $x_0 \in \mathring{M}$, $x \in \overline{M}$, то $(T(x_0, x) \setminus \{x\}) \subset \mathring{M}$ и $\mathring{M} = \mathring{\overline{M}}$.*

Теорема 2. *В обобщенном хордовом пространстве X, являющимся U-множеством, следующие утверждения эквивалентны* (ср. [1], с. 74).

A. *Все замкнутые шары выпуклые.*
B. *Для каждой точки $p \in X$ и каждой хорды T функция $f = \rho(p, x(t))$, где $x = x(t)$ — представление хорды T, безвершинная* (*определение см.* [2], с. 144).
C. *Для каждой точки $p \in X$ и каждой хорды T множество $F(p, T)$ связное.*

Кроме того, из этих утверждений следует, что пересечение произвольной сферы и произвольной хорды является либо пустым множеством, либо хордой, либо двумя точками.

Теорема 3. *Пусть $B(p, r_p)$ — фиксированный открытый шар из условия A_4 обобщенного G-пространства.*

Тогда следующие утверждения эквивалентны (ср. [2], с. 157, (20.9)).

A. *Все замкнутые шары, принадлежащие шару $B(p, r_p)$, выпуклые.*
B. *Все замкнутые шары, принадлежащие шару $B(p, r_p)$, строго выпуклые.*
C. *Каждая точка $x \in B(p, r_p)$ имеет единственное основание на каждом сегменте T, удовлетворяющем условию $\rho(x, T) < r_p - \rho(p, x)$*

Кроме того, из A, B, C *следует утверждение*

D. *Произвольный сегмент и произвольная сфера, принадлежащая шару $B(p, r_p)$, пересекаются не более, чем в двух точках.*

В свою очередь, из D *следует*

$\tilde{\mathrm{C}}$. *Каждая точка* $x \in B(p, r_p)$ *имеет единственное основание на каждом сегменте* T, *удовлетворяющем условию*

$$\max\{\rho(x, y) : y \in T\} < r_p - \rho(p, x).$$

Доказательство следующей теоремы совпадает с доказательством теоремы 4 из ([1], с. 65), если учесть теорему 1.

Теорема 4. *Пусть для каждой точки* p *обобщенного хордового пространства* X *существует открытый шар* $B(p, r_1(p))$ *такой, что все открытые шары из этого шара строго выпуклые и* $r_1(p) < r_p$. *Тогда пространство* X *является обобщенным* G*-пространством.*

Теорема 5. *Пусть обобщенное хордовое пространство* X *не имеет размерности* 1, q — *граничная точка выпуклого множества* $M \subset X$ *такого, что* $\overset{\circ}{M} \neq \emptyset$ *и* $\overline{M} \subset B(p, r_p)$. *Тогда* $B(p, r_p) = V_q \cup A_q \cup C_q$ *и множество* V_q $(\tilde{V}_q)$ *отделяет в шаре* $B(p, r_p)$ *множество* A_q *от множества* C_q *(ср.* (20.3), (20.4) *из* [2], *с.* 154 *и* (1) *из* [1], *с.* 79).

Теорема 6. *Пусть обобщенное прямое хордовое пространство* X *не имеет размерности* 1 *и все открытые шары в нем выпуклые. Тогда верны следующие утверждения.*

A. *Для каждой точки* x *и для каждой прямой* P *существует перпендикуляр к прямой* P, *содержащий точку* x. *Объединение всех перпендикуляров к прямой* P, *содержащих точку* x, *пересекает прямую* P *по хорде. Причем, если основание точки* x *на прямой* P *единственно, то через точку* x *проходит единственный перпендикуляр к прямой* P.

B. *Трансверсали к данной прямой* P *в данной точке* $q \in P$ *совпадают с опорными прямыми в граничной точке* q *для шара с центром в произвольной точке* $x \in P$, *отличной от точки* q, *радиуса* $\rho(x, q)$.

C. *Множество точек, расположенных на всех трансверсалях к данной прямой* P *в данной точке* $q \in P$, *разбивает пространство* X *на два линейно связных множества.*

Доказательство этой теоремы аналогично доказательствам утверждений ([1], с. 80–82, (2), (3); [2], с. 160, (20.11), (20.12)), если учесть теоремы 2, 5.

2. Доказательство теорем

Доказательство теоремы 1. A. Пусть $x, y \in \overset{\circ}{M}$. Тогда существует окрестность $U_y \subset \overset{\circ}{M}$ точки y. Возьмем произвольную точку z, удовлетворяющую условию $[xzy]$. Тогда $z \in \lambda_x(U_y)$, где $\lambda = \rho(x, z)\rho^{-1}(x, y)$, поскольку $\overset{\circ}{M} \subset W_x$. Из условия A_7 следует, что $\lambda_x(U_y) \subset \overset{\circ}{M}$. Поэтому $\overset{\circ}{M}$ — выпуклое множество. Пусть $x_0 \in \overset{\circ}{M}$, $x \in \overline{M}$. Возьмем произвольную окрестность U_x точки x. Тогда существует точка $z \in U_x \cap M$. Кроме того, из условия A_7 следует, что $(T(x_0, z) \setminus \{z\}) \subset \overset{\circ}{M}$, поскольку $x_0 \in \overset{\circ}{M}$ и z — точка выпуклого множества $M \subset W_z$. Теперь очевидно, что $(T(x_0, z) \setminus \{z\}) \cap U_x \neq \emptyset$. Поэтому $U_x \cap \overset{\circ}{M} \neq \emptyset$. Таким образом, $x \in \overline{\overset{\circ}{M}}$ и $\overline{M} \subset \overline{\overset{\circ}{M}}$. Обратное включение очевидно.

B. Пусть $x, y \in \overline{M}$, $z \in T(x, y)$. Тогда эти точки можно представить в виде $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, $y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$, $z = \omega_\lambda(x, y)$, где $\{x_n\}, \{y_n\} \subset M$, $\lambda \in [0, 1]$. Кроме того, $\{\omega_\lambda(x_n, y_n)\} \subset M$, поскольку M — выпуклое множество. Из условия A_6 следует теперь, что $z \in \overline{M}$. Таким образом, множество $\overline{M}$ выпуклое.

C. Пусть, напротив, существует точка y отличная от точки x такая, что $y \in T(x_0, x) \setminus \overset{\circ}{M}$. Выберем $\lambda \in (0, 1)$ такое, что $\lambda_y(x_0) \in B(y, r_y)$ и $\rho(y, \lambda_y(x_0)) < \rho(y, x)$. Из условия непрерывности отображения λ_y следует, что существует окрестность $U_{x_0} \subset \overset{\circ}{M}$ точки x_0, обладающая свойством $\lambda_y(U_{x_0}) \subset B(y, r_y)$. Из условий A_7, A_8 следует, что множество $\tau_y(\lambda_y(U_{x_0}))$ открытое и $\tau_y(\lambda_y(U_{x_0}))\cap$

$T(y,x) \neq \emptyset$. Но из п. A следует $\overline{M} = \overline{\mathring{M}}$. А из п. B следует $T(y,x) \subset \overline{M}$. Поэтому существует точка $z \in \tau_y(\lambda_y(U_{x_0})) \cap \mathring{M}$. Пусть $z_1 = \lambda_y^{-1}(\tau_y^{-1}(z))$. Тогда $z_1 \in U_{x_0}$ и $y \in \mu_z(U_{x_0})$, где $\mu = \rho(y,z)\rho^{-1}(z,z_1)$. Из условия A_7 и п. A следует теперь, что $y \in \mathring{M}$. Получили противоречие.

Пусть $x \in \mathring{\overline{\mathring{M}}}$. Тогда существуют окрестность $B(x,r)$, $0 < r < r_x$, и точка z такие, что $B(x,r) \subset \overline{\mathring{M}}$ и $z \in \mathring{M} \cap B(x,r)$. Используя условие A_5, продолжим хорду $T(z,x)$ до большей хорды $T(z,y) \subset B(x,r)$. Тогда из первой части доказательства следует $x \in \mathring{M}$. Следовательно, $\mathring{\overline{\mathring{M}}} \subset \mathring{M}$. Обратное включение очевидно.

Доказательство теоремы 2 (ср. [1], с. 74, (4), где, к сожалению, имеются неточности в формулировке и доказательстве). Из A следует B. Если функция $f = \rho(p, x(t))$ не является безвершинной, то существуют точки x, y, z на хорде T такие, что $[xyz]$ и либо $f(y) > \max(f(x), f(z))$, либо $f(y) = r = \max(f(x), f(z))$, $r = f(x) > f(z)$. Первый случай приводит к противоречию, поскольку замкнутый шар $B[p,r]$ выпуклый. Во втором случае из п. C теоремы 1 следует, что y — внутренняя точка шара $B[p,r]$. А это противоречит тому, что $f(y) = r$. Очевидно, что из B следует C. Из C следует A. Пусть замкнутый шар $B[p,r]$ невыпуклый. Тогда, используя условие A_1 и непрерывность параметрического представления хорды, можно найти хорду $T(a,b)$, удовлетворяющую условиям $\rho(a,p) = \rho(b,p) = r$ и $\rho(x,p) > r$ для каждой точки x такой, что $[axb]$. А это противоречит условию C. Докажем последнее утверждение. Если $r < \rho(p,T)$, то $B[p,r] \cap T = \emptyset$. Если $r = \rho(p,T)$, то множество $B[p,r] \cap T$ является хордой, поскольку замкнутый шар $B[p,r]$ выпуклый. Если $r > \rho(p,T)$, то из п. C теоремы 1 следует, что множество $B[p,r] \cap T$ состоит не более чем из двух точек.

Доказательство теоремы 3. Докажем, что из A следует B. Пусть замкнутый шар $B[x, r_1]$ не является строго выпуклым. Тогда существуют точки y, z, q, удовлетворяющие условиям $\rho(x,y) = \rho(x,z) = \rho(x,q) = r_1$ и $[yzq]$. Используя условие A_5, продолжим сегмент (z,x) до сегмента $T(z,u)$ такого, что $r_1 + \rho(u,x) < r_p - \rho(u,p)$. Тогда $r_2 = \max(\rho(u,y), \rho(u,q)) < \rho(u,x) + r_1 = \rho(u,z)$ и точка z не принадлежит замкнутому шару $B[u, r_2]$. Получаем противоречие с условием A. Очевидно, что из B следует C и D. Докажем, что из C следует A. Допустим, что найдется невыпуклый замкнутый шар $B[x, r_1] \subset B(p, r_p)$. Тогда существуют точки a, b, удовлетворяющие условиям $\rho(x,a) = \rho(x,b) = r_1$, $T(a,b) \cap B[x,r_1] = \{a,b\}$. Но отсюда следует, что точка x имеет два основания на сегменте $T(a,b)$. Получили противоречие. Докажем, что из $\widetilde{\mathrm{C}}$ следует D. Пусть точка x имеет два основания на сегменте T. Предположение о том, что таких оснований больше двух приводит к противоречию с условием D. Пусть точка z удовлетворяет условию $\rho(x,z) = \max\{\rho(x,q) : q \in T(a,b)\}$. Непрерывно уменьшая λ ($\lambda \leq 1$), найдем первую точку z_1, отличную от точки z, которая принадлежит пересечению сферы $S(\lambda_z(x), \lambda\rho(z,x))$ с сегментом $T(a,b)$. Если таких точек больше одной, то получаем противоречие с условием D. Пусть для определенности $z_1 \in T(a,z)$. Очевидно, что существует сфера $S(\lambda_z(x), r_1)$, радиус r_1 которой удовлетворяет неравенствам

$$\max(\min\{\rho(\lambda_z(x), q) : q \in T(z,b)\},\ \min\{\rho(\lambda_z(x), q) : q \in T(z_1, z)\}) < r_1 < \lambda\rho(x,z).$$

Эта сфера пересекает сегмент $T(a,b)$ по меньшей мере в трех точках. А это противоречит условию D.

Доказательство теоремы 5. Из определения множеств A_q, C_q, V_q и теоремы 1 следует, что $A_q \cap C_q = \emptyset$ и $B(p, r_p) = V_q \cup A_q \cup C_q$. Пусть $x = x(t)$, $t \in [0,1]$, — непрерывный путь такой, что $x(0) \in A_q$, $x(1) \in C_q$. Обозначим

$$t_0 = \sup\{t : t \in [0,1],\ \exists y_t (y_t \in \mathring{M}, [x(t) y_t q])\}.$$

Очевидно, что $t_0 > 0$. Допустим $t_0 \in A_q$. Из условия A_6 следует, что отображение λ_q непрерывно в шаре $B(p, r_p)$ для каждого $\lambda \in (0,1)$. Следовательно, для малого $t - t_0 > 0$ существует точка $y_t \in \overset{\circ}{M}$, удовлетворяющая условию $[x(t)y_t q]$. А это противоречит определению t_0. Допустим $t_0 \in C_q$. Отображения $\tau_q : B(q, r_q) \to B(q, r_q)$, $\lambda_q : B(p, r_p) \to \lambda_q(B(p, r_P))$ непрерывны для каждого $\lambda \in (0,1)$. Отсюда нетрудно получить, что для малого $t_0 - t > 0$ существует точка $\overline{y}_t \in \overset{\circ}{M}$, удовлетворяющая условию $[\overline{y}_t q x(t)]$. Кроме того, из определения t_0 следует, что при сколь угодно малом $t_0 - t_1 > 0$ существует точка $y_{t_1} \in \overset{\circ}{M}$, удовлетворяющая условию $[q y_{t_1} x(t_1)]$. Тогда при $0 < t_0 - t_1 < t_0 - t$ выполняется условие $[\overline{y}_{t_1} q y_{t_1}]$. Но по теореме 1 $\overset{\circ}{M}$ — выпуклое множество. Значит, $q \in \overset{\circ}{M}$. Также получили противоречие. Следовательно $x(t_0) \in V_q$. Теперь нетрудно заметить, что $x(t_0) \in \widetilde{V}_q$.

Литература

1. Busemann H., Phadke B.B. *Spaces with distinguished geodesics.* – New York and Basel: Marcel Dekker, Inc., 1987. – 159 p.
2. Буземан Г. *Геометрия геодезических.* – М.: Физматгиз, 1962. – 503 с.

Казанский педагогический университет

Поступила 15.02.1996