ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 4 (479)

УДК 517.956

В.Ф. ВОЛКОДАВОВ, Ю.А. ИЛЮШИНА

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЙ ПРИНЦИП ЛОКАЛЬНОГО ЭКСТРЕМУМА ДЛЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ

1. Задача Гурса

Уравнение

$$u_{xy} + \frac{\alpha}{x+y} u_y = 0, \quad 0 < \alpha < 1, \tag{1.1}$$

рассмотрим на множестве $G = G_- \cup G_+$, где

$$G_- = \{(x,y) \mid -h < x < 0,\ -x < y < h\}, \quad G_+ = \{(x,y) \mid 0 < x < h,\ 0 < y < h - x\}.$$

Подобно тому, как это сделано в ([1], с. 67–68), в данной статье методом Римана для уравнения (1.1) в областях G_- и G_+ доказаны следующие утверждения.

Теорема 1. *Если*

$$u(x,h) = \omega(x) \in C_{[-h;0]} \cap C^1_{(-h;0)}, \tag{1.2}$$

$$u(0,y) = \varphi(y) \in C^1_{[0;h]}, \tag{1.3}$$

$\omega(0) = \varphi(h) = 0$, *то задача Гурса в области* G_- *для уравнения* (1.1) *с данными* (1.2), (1.3) *имеет единственное решение*

$$u(x,y) = \omega(x) - \int_y^h \varphi'(s) s^\alpha (x+s)^{-\alpha} ds, \tag{1.4}$$

при этом $u(x,y) \in C(\overline{G}_-)$.

Теорема 2. *Если*

$$u(x,0) = \psi(x) \in C_{[0;h]} \cap C^1_{(0;h)}, \tag{1.5}$$

$\psi(0) = \varphi(0) = 0$, *то задача Гурса в области* G_+ *для уравнения* (1.1) *с данными* (1.3), (1.5) *имеет единственное решение*

$$u(x,y) = \psi(x) - \int_0^y \varphi'(s) s^\alpha (x+s)^{-\alpha} ds, \tag{1.6}$$

при этом $u(x,y) \in C(\overline{G}_+)$.

2. Характеристический принцип локального экстремума

Пусть

$$v_-(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\int_{-y}^{x}(x-t)^{-\lambda_1}(-t)^{r_1}u(t,y)dt,$$

где $0<\lambda_1<1$, $\lambda_1<r_1$, функция $u(t,y)$ определяется формулой (1.4).

Лемма 1. *Если функция $u(x,y)\in C(\overline{G}_-)$ такова, что $u(0,y)=\varphi(y)$ достигает наибольшего положительного (наименьшего отрицательного) значения в точке ξ, $0<\xi<h$, при этом $u(x,h)\equiv 0$, где $u(x,h)$ определяется формулой (1.2), то $\lim\limits_{x\to 0-0} v_-(x,\xi)<0$ (>0).*

Доказательство. Пользуясь формулой (1.4), находим

$$v_-(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\int_{-y}^{x}\omega(t)(x-t)^{-\lambda_1}(-t)^{r_1}dt - \int_{-y}^{x}(x-t)^{-\lambda_1}(-t)^{r_1}dt\int_{y}^{h}\varphi'(s)s^{\alpha}(t+s)^{-\alpha}ds\right]. \quad (2.1)$$

Первое слагаемое выражения, стоящего в скобках, интегрируем по частям, полагая $U=\omega(t)$,

$$V=V(x,t)=\int_{t}^{x}(x-s)^{-\lambda_1}s^{r_1}ds. \quad (2.2)$$

Во втором слагаемом в скобках равенства (2.1) меняем порядок интегрирования. Получим

$$\int_{-y}^{x}(x-t)^{-\lambda_1}(-t)^{r_1}dt\int_{y}^{h}\varphi'(s)s^{\alpha}(t+s)^{-\alpha}ds = \int_{y}^{h}\varphi'(s)s^{\alpha}ds\int_{-y}^{x}(x-t)^{-\lambda_1}(-t)^{r_1}(t+s)^{-\alpha}dt. \quad (2.3)$$

Интеграл (2.2) и внутренний интеграл в правой части формулы (2.3) вычисляем заменами $s=t+(x-t)z$, $t=-y+(x+y)z$ соответственно. Результаты вычислений дают

$$V(x,t) = -\frac{1}{1-\lambda_1}(x-t)^{1-\lambda_1}(-t)^{r_1}F\left(1,-r_1;2-\lambda_1;\frac{x-t}{-t}\right), \quad (2.4)$$

$$\int_{-y}^{x}(x-t)^{-\lambda_1}(-t)^{r_1}(t+s)^{-\alpha}dt =$$

$$= \frac{1}{1-\lambda_1}y^{r_1}(x+y)^{1-\lambda_1}(s-y)^{-\alpha}F_1\left(1,-r_1,\alpha;2-\lambda_1;\frac{x+y}{y},\frac{x+y}{y-s}\right). \quad (2.5)$$

Из равенств (2.2)–(2.5) находим

$$v_-(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{1-\lambda_1}\omega(-y)(x+y)^{1-\lambda_1}y^{r_1}F\left(1,-r_1;2-\lambda_1;\frac{x+y}{y}\right) + \right.$$
$$+\frac{1}{1-\lambda_1}\int_{-y}^{x}\omega'(t)(-t)^{r_1}(x-t)^{1-\lambda_1}F\left(1,-r_1;2-\lambda_1;\frac{x-t}{-t}\right)dt -$$
$$\left. -\frac{1}{1-\lambda_1}(x+y)^{1-\lambda_1}y^{r_1}\int_{y}^{h}\varphi'(s)s^{\alpha}(s-y)^{-\alpha}F_1\left(1,-r_1,\alpha;2-\lambda_1;\frac{x+y}{y},\frac{x+y}{y-s}\right)ds\right].$$

Применяя формулы "сокращенного" дифференцирования

$$\frac{d}{dz}z^{c-1}F(a,b;c;pz) = (c-1)z^{c-2}F(a,b;c-1;pz),$$
$$\frac{d}{dz}z^{c-1}F_1(a,b,b';c;pz,qz) = (c-1)z^{c-2}F_1(a,b,b';c-1;pz,qz),$$

где p и q не зависят от z, доказанные Волкодавовым В.Ф., и тождества ([2], сс. 73, 232)

$$F(a,b;c;1)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)},$$
$$F_1(a,b,b';c;1;z)=\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}F(a,b';c-b;z),\quad c-a-b>0,$$

находим

$$\lim_{x\to 0-0}v_-(x,y)=\frac{\lambda_1}{r_1-\lambda_1}\Big[y^{r_1-\lambda_1}\int_y^h\varphi'(s)F\Big(r_1-\lambda_1,\alpha;r_1-\lambda_1+1;\frac{y}{s}\Big)ds-$$
$$-\omega(-y)y^{r_1-\lambda_1}-\int_{-y}^0\omega'(t)(-t)^{r_1-\lambda_1}dt\Big].\quad (2.6)$$

По условию леммы

$$\lim_{x\to 0-0}v_-(x,y)=\frac{\lambda_1}{r_1-\lambda_1}y^{r_1-\lambda_1}\int_y^h\varphi'(s)F\Big(r_1-\lambda_1,\alpha;r_1-\lambda_1+1;\frac{y}{s}\Big)ds.\quad (2.7)$$

Пусть $\varphi(y)$ достигает наибольшего положительного (наименьшего отрицательного) значения в точке ξ, $0<\xi<h$. Пользуясь тождеством $(\varphi(t)-\varphi(\xi))'=\varphi'(t)$, в равенстве (2.7) проинтегрируем по частям, полагая $U=F(r_1-\lambda_1,\alpha;r_1-\lambda_1+1;\frac{y}{s})$. Получим

$$\lim_{x\to 0-0}v_-(x,\xi)=-\frac{\lambda_1}{r_1-\lambda_1}\xi^{r_1-\lambda_1}\varphi(\xi)F\Big(r_1-\lambda_1,\alpha;r_1-\lambda_1+1;\frac{\xi}{h}\Big)+$$
$$+\frac{\alpha\lambda_1}{r_1-\lambda_1+1}\xi^{r_1-\lambda_1+1}\int_\xi^h(\varphi(s)-\varphi(\xi))s^{-2}F\Big(r_1-\lambda_1+1,\alpha+1;r_1-\lambda_1+2;\frac{\xi}{s}\Big)ds.$$

Из этого равенства следуют утверждения леммы.

Пусть

$$v_+(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\int_x^{h-y}(t-x)^{-\lambda_2}t^{r_2}u(t,y)dt,$$

где $0<\lambda_2<1$, $\lambda_2<r_2$, функция $u(t,y)$ определяется формулой (1.6). Подобно тому, как при доказательстве леммы 1 получено выражение (2.6), находим

$$\lim_{x\to 0+0}v_+(x,y)=\frac{\lambda_2}{r_2-\lambda_2}\Big[(h-y)^{r_2-\lambda_2}\int_0^y\varphi'(s)s^{\alpha}(s+h-y)^{-\alpha}F\Big(1,\alpha;r_2-\lambda_2+1;\frac{h-y}{s+h-y}\Big)ds+$$
$$+\psi(h-y)(h-y)^{r_2-\lambda_2}-\int_0^{h-y}\psi'(t)t^{r_2-\lambda_2}dt\Big].\quad (2.8)$$

С использованием равенства (2.8) аналогично лемме 1 доказывается

Лемма 2. *Если $u(x,y)\in C(\overline{G}_+)$ такова, что $u(0,y)=\varphi(y)$ достигает наибольшего положительного (наименьшего отрицательного) значения в точке ξ, $0<\xi<h$, при этом $u(x,0)\equiv 0$, где $u(x,0)$ определяется формулой* (1.5), *$r_2-\lambda_2>\alpha$, то $\lim\limits_{x\to 0+0}v_+(x,\xi)>0$ (<0).*

3. Единственность и существование решения задачи Δ_2 для уравнения (1.1)

Задача Δ_2. На множестве G найти решение $u(x,y)\in C(\overline{G}_+\cap\overline{G}_-)$ уравнения (1.1), удовлетворяющее условиям (1.3), (1.4) и условию сопряжения

$$\lim_{x\to 0-0}v_-(x,y)=b(y)\lim_{x\to 0+0}v_+(x,y),\quad (3.1)$$

где $b(y)$ — заданная функция, $\lim\limits_{x\to 0-0}v_-(x,y)$ и $\lim\limits_{x\to 0+0}v_+(x,y)$ определяются формулами (2.6) и (2.8) соответственно.

Теорема 3. *Если $b(y) \in C_{(0;h)}$, $b(y) > 0$, $r_2 - \lambda_2 > \alpha$ и существует решение задачи Δ_2, то оно единственное.*

Доказательство теоремы проводится методом от противного с применением лемм 1 и 2.

Теорема 4. *Если функция $\omega(x)$ подчиняется условию теоремы 1, $\psi(x) \in C^1_{[0;h]}$, $\psi(h) = 0$, $r_i - \lambda_i - \alpha > 1$, $i = 1, 2$, $b(y) \equiv b$ ($b > 0$, b — const), то существует единственное решение задачи Δ_2.*

Доказательство. Принимая во внимание формулы (2.6), (2.8) и условие сопряжения (3.1), приходим к уравнению относительно неизвестной функции $\varphi'(y)$

$$\frac{\lambda_1}{r_1-\lambda_1} y^{r_1-\lambda_1} \int_y^h \varphi'(s) F\left(r_1-\lambda_1, \alpha; r_1-\lambda_1+1; \frac{y}{s}\right) ds -$$

$$-\frac{\lambda_2 b}{r_2-\lambda_2}(h-y)^{r_2-\lambda_2} \int_0^y \varphi'(s) s^\alpha (s+h-y)^{-\alpha} F\left(1, \alpha; r_2-\lambda_2+1; \frac{h-y}{s+h-y}\right) ds = g(y), \quad (3.2)$$

$$g(y) = \frac{\lambda_1}{r_1-\lambda_2}\omega(-y) y^{r_1-\lambda_1} + \frac{\lambda_1}{r_1-\lambda_1}\int_{-y}^0 \omega'(t)(-t)^{r_1-\lambda_1} dt +$$

$$+\frac{b\lambda_2}{r_2-\lambda_2}\psi(h-y)(h-y)^{r_2-\lambda_2} - \frac{b\lambda_2}{r_2-\lambda_2}\int_0^{h-y}\psi'(t) t^{r_2-\lambda_2} dt.$$

Пусть $\varphi'(t)$ — решение уравнения (3.2). При выполнении условий теоремы обе части этого тождества продифференцируем по y, применив при этом тождество ([2], с. 111)

$$\frac{d}{dz} z^{c-1}(1-z)^{b-c+1} F(a, b; c; z) = (c-1) z^{c-2}(1-z)^{b-c} F(a-1, b; c-1; z).$$

В результате дифференцирования тождества (3.2) придем к уравнению

$$\varphi'(y) = \int_0^h \varphi'(s) K(y, s) ds + f(y), \quad (3.3)$$

$$K(y,s) = \begin{cases} K_1(y,s), & 0 \le s \le y; \\ K_2(y,s), & y \le s \le h, \end{cases}$$

$$K_1(y,s) = -\frac{b\lambda_2}{a(y)}(h-y)^{r_2-\lambda_2-1} y^{-\alpha} s^\alpha (s+h-y)^{-\alpha}, \quad K_2(y,s) = -\frac{\lambda_1}{a(y)} y^{r_1-\lambda_1-\alpha-1}(s-y)^\alpha s^{-\alpha},$$

$$a(y) = -\lambda_1 B(r_1-\lambda_1; 1-\alpha) y^{r_1-\lambda_1-\alpha} - \frac{b\lambda_2}{r_2-\lambda_2} h^{-\alpha}(h-y)^{r_2-\lambda_2} F\left(1, \alpha; r_2-\lambda_2+1; \frac{h-y}{h}\right),$$

$$f(y) = -\frac{1}{a(y)} y^{-\alpha}[\lambda_1 \omega(-y) y^{r_1-\lambda_1-1} - b\lambda_2 \psi(h-y)(h-y)^{r_2-\lambda_1-1}].$$

При выполнении условий данной теоремы $a(y), f(y) \in C_{[0;h]}$, при этом $a(y) < 0$, $y \in [0; h]$. Нетрудно видеть, что $K(y, s)$ — ограниченная функция в $[0, h; 0, h]$ и имеет одну линию конечного разрыва, т. е. по определению является регулярным ядром ([3], с. 19). В ([3], с. 39–55) доказаны существование и единственность решения уравнения (3.3). Это решение записывается через резольвенту

$$\varphi'(y) = f(y) + \int_0^h R(y, s; 1) f(s) ds,$$

которую ввиду громоздкости не приводим ([3], с. 54).

Из существования и единственности решения уравнения (3.3) следует существование решения задачи Δ_2. Теорема 4 доказана.

Литература

1. Волкодавов В.Ф., Николаев Н.Я. *Краевые задачи для уравнения Эйлера–Пуассона–Дарбу.* Учеб. пособие по спецкурсу "Уравнения математической физики". – Куйбышев: Изд-во Куйбышевск. гос. пед. ун-та, 1984. – 80 с.
2. Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра.* – М.: Наука, 1965. – 294 с.
3. Привалов И.И. *Интегральные уравнения.* – М.: Гостехиздат, 1937. – 248 с.

Самарский государственный педагогический университет

Поступила 28.02.2001